Построить полином наименьшей степени по таблице значений:

*639.

x	0	1	2	$\ldots$	n
y	1	2	4	$\ldots$	2^n

*640.

x	0	1	2	$\ldots$	n
y	1	a	a^2	$\ldots$	a^n

*641. Найти полином степени $2n$, дающий при делении на $x(x-2)\ldots(x-2n)$ в остатке 1, а при делении на $(x-1)(x-3)\ldots[x-(2n-1)]$ в остатке -1.

*642. Построить полином наименьшей степени по таблице значений

x	1	2	3	$\ldots$	n
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

643. Решить предыдущую задачу при $n=p-1$ над полем $GF(p)$.

*644. Найти полином не выше $(n-1)$-й степени, удовлетворяющий условию $f(x)=1/(x-a)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \neq a$, $i=1, 2, \ldots, n$.

*645. Доказать, что полином степени $k \leqslant n$, принимающий целые значения при $n+1$ последовательных целых значениях независимой переменной, принимает целые значения при всех целых значениях независимой переменной.

*646. Доказать, что полином степени n, принимающий целые значения при $x=0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, принимает целые значения при всех квадратах натуральных чисел.

647. Определить полином первой степени, приближенно принимающий таблицу значений

x	0	1	2	3	4
y	2,1	2,5	3,0	3,6	4,1

так, чтобы сумма квадратов погрешностей была наименьшей.

648. Определить полином второй степени, приближенно принимающий таблицу значений

x	0	1	2	3	4
y	1	1,4	2	2,7	3,6

так, чтобы сумма квадратов погрешностей была наименьшей.

§ 6. Рациональные корни полиномов. Приводимость и неприводимость над полем Q и над полем GF(p)

649. Доказать, что если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с целыми коэффициентами, то:

1) q есть делитель a_0;
2) p есть делитель a_n;
3) $p-mq$ есть делитель $f(m)$ при любом целом m.

В частности, $p-q$ есть делитель $f(1)$, $p+q$ — делитель $f(-1)$.

650. Найти рациональные корни полиномов:

a) $x^3-6x^2+15x-14$;
b) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;
c) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$;
d) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;
e) $24x^4-42x^3-77x^2+56x+60$;
f) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$;
g) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;
h) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$;
i) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24$;
j) $2x^3+3x^2+6x-4$; k) $4x^4-7x^2-5x-1$;
l) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$;
m) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$;
n) $x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$.

*651. Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

*652. Доказать, что если полином с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 при двух целых значениях x_1 и x_2 независимой переменной, то он не имеет рациональных корней, если $|x_1-x_2|>2$. Если же $|x_1-x_2|\leqslant 2$, то рациональным корнем может быть только $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

Доказать неприводимость над полем Q полиномов:

*653. a) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;
b) $x^5-12x^3+36x-12$; c) x^4-x^3+2x+1.

*654. $X_p(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}$, p — простое число.

*655. $X_{p^k}(x)=\dfrac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1}$, p — простое число.