*656. Доказать, что полином $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с целыми коэффициентами, не имеющий рациональных корней, неприводим над $\mathbb{Q}$, если существует такое простое число p, что a_0 не делится на p; $a_2, a_3, \ldots, a_n$ делятся на p^2 и a_n не делится на p^3.

657. Пусть $f(x)$ — полином с целыми коэффициентами, для которого существует такое простое число p, что a_0 не делится на p; $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ делятся на p и a_n не делится на p^2. Доказать, что тогда $f(x)$ имеет неприводимый над $\mathbb{Q}$ множитель степени $\geqslant n-k$.

658. Составить таблицу неприводимых полиномов, до пятой степени включительно, над полем GF (2).

659. Составить таблицу неприводимых полиномов, до третьей степени включительно, над полем GF (3).

660. Доказать неприводимость полинома $x^5+2x^3+3x^2-6x-5$ над полем $\mathbb{Q}$, воспользовавшись редукцией по модулю 2.

*661. Доказать неприводимость полинома $x^5-6x^3+2x^2-4x+5$ над полем $\mathbb{Q}$, воспользовавшись редукцией по модулям 2 и 3.

662. Доказать, что полиномы $X_d(x)$ при $d\mid p-1$ разлагаются на линейные множители над полем GF (p).

663. Доказать существование первообразного корня $(p-1)$-й степени из 1 в поле GF (p).

664. Пусть $f(x)$ — неприводимый полином над полем GF (p). Доказать, что полиномы $f(x)$, $f(x+1), \ldots, f(x+p-1)$ либо попарно различны, либо все совпадают.

*665. Доказать, что полином $f(x)=x^p-x-a$ при $a\not\equiv 0 \pmod p$ неприводим над полем GF (p).

666. Методом разложения на множители значений полинома при целых значениях переменной разложить на множители полиномы или доказать их неприводимость над $\mathbb{Q}$.

a) x^4-3x^2+1; b) $x^4+5x^3-3x^2-5x+1$;

c) $x^4+3x^3-2x^2-2x+1$; d) $x^4-x^3-3x^2+2x+2$.

667. Доказать, что полином четвертой степени $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Q}$, если он не имеет целых корней и не делится ни на один из полиномов вида

$$x^2+\frac{cm-am^2}{d-m^2}x+m,$$

где m — делитель числа d. Полиномы с дробными коэффициентами можно не принимать во внимание. Исключение могут представить полиномы, коэффициенты которых удовлетворяют условиям: $d=k^2$, $c=ak$.

668. Доказать, что полином пятой степени $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Q}$, если он не имеет целых корней и не делится ни на один из полиномов с целыми коэффициентами вида

$$x^2+\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm}x+m,$$

где m — делитель e, $n=\frac{e}{m}$.

669. Разложить на множители полиномы или доказать их неприводимость над $\mathbb{Q}$, пользуясь задачами 667, 668:

a) $x^4-3x^3+2x^2+3x-9$;

b) $x^4-3x^3+2x^2+2x-6$;

c) $x^4+4x^3-6x^2-23x-12$;

d) $x^5+x^4-4x^3+9x^2-6x+6$.

670. Найти все приводимые над $\mathbb{Q}$ полиномы вида x^5+ax^3+bx+1 с целыми a и b.

671. Найти необходимые и достаточные условия приводимости над $\mathbb{Q}$ полинома x^4+px^2+q с рациональными (быть может дробными) коэффициентами.

672. Доказать, что для приводимости над $\mathbb{Q}$ полинома четвертой степени, не имеющего рациональных корней, необходимо (но не достаточно) существование рационального корня кубического уравнения, получающегося при решении по способу Феррари.

*673. Доказать неприводимость над $\mathbb{Q}$ полинома $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные между собой целые числа.

*674. Доказать неприводимость над $\mathbb{Q}$ полинома $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1$ при различных между собой целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ за исключениями

$$(x-a)(x-a-1)(x-a-2)(x-a-3)+1=$$
$$=[(x-a-1)(x-a-2)-1]^2$$

и

$$(x-a)(x-a-2)+1=(x-a-1)^2.$$