*675. Доказать, что если полином n-й степени с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 более чем при $2m$ целых значениях переменной ($n=2m$ или $2m+1$), то он неприводим над $\mathbb{Q}$.

*676. Доказать неприводимость над $\mathbb{Q}$ полинома

$$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1,$$

если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные между собой целые числа.

*677. Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами, принимающий значение $+1$ более чем при трех целых значениях независимой переменной, не может принимать значение -1 при целых значениях независимой переменной.

*678. Доказать, что полином n-й степени с целыми коэффициентами, принимающий значения ± 1 более чем при $n/2$ целых значениях независимой переменной, неприводим над $\mathbb{Q}$ при при $n\geqslant 12$.

*679. Доказать, что если полином с целыми коэффициентами ax^2+bx+1 неприводим над $\mathbb{Q}$, то неприводим и полином

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1,$$

где $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ при $n\geqslant 7$. Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые, различные между собой числа.

§ 7. Сравнения в кольце полиномов. Алгебраические расширения

*680. Выполнить действия в кольце $\mathbb{Q}[x]/\varphi$ (классов вычетов кольца $\mathbb{Q}[x]$ по модулю φ):

a) $(x^2+x+1)^3$, $\quad\varphi(x)=x^3-1$;

b) $\dfrac{x+2}{x-2}$, $\quad\varphi(x)=x^3+x+1$;

c) $\dfrac{1}{x^2+x-1}$, $\quad\varphi(x)=x^3-2$;

d) $\dfrac{1}{(1+x)^m}$, $\quad\varphi(x)=x^n$.

681. Установить изоморфизм полей $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ и $\mathbb{Q}[x]/(x^3-3)$.

682. Установить изоморфизм кольца $Q[x]/(x^2-3x+2)$ и кольца, образованного парами (a, b) рациональных чисел, с покомпонентными сложением и умножением.

*683. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. В кольце $K[x]/(f)$, где K — некоторое поле, выразить $\lambda_i\lambda_j$ линейно через λ_k. Здесь $\lambda_0=a_0$, $\lambda_i=a_0x^i+\ldots+a_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1$.

*684. Исключить иррациональность в знаменателе:

a) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, $\quad\alpha^3-3\alpha+1=0$;

b) $\dfrac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\quad\alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$;

c) $\dfrac{1}{3\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1}$, $\quad\alpha^4-\alpha^3+2\alpha+1=0$;

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$; $\quad$ e) $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$;

f) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; $\quad$ g) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$.

*685. Составить уравнение с рациональными коэффициентами, корнем которого является λ:

a) $\lambda=\alpha^2+\alpha+1$, $\quad\alpha^3-\alpha-1=0$;

b) $\lambda=\alpha^3+1$, $\quad\alpha^3+2\alpha^2+2=0$;

c) $\lambda=2-\alpha^2$, $\quad\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1=0$;

d) $\lambda=\alpha^3-2$, $\quad\alpha^4-\alpha-2=0$;

e) $\lambda=\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$, $\quad\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2+1=0$.

686. Составить уравнение с рациональными коэффициентами для λ и выразить α через λ, если это возможно:

a) $\lambda=\alpha^2+\alpha$, $\quad\alpha^3-\alpha+2=0$;

b) $\lambda=\alpha^3+\alpha$, $\quad\alpha^4-3\alpha+1=0$;

c) $\lambda=\alpha^3+4\alpha^2+3\alpha-1$, $\quad\alpha^4+5\alpha^3+6\alpha^2-1=0$.

687. Пусть L — расширение поля $K=\mathrm{GF}(p)$, содержащее p^m элементов. Доказать, что все элементы поля L удовлетворяют уравнению $x^{p^m}-x=0$.

688. Пусть $f(x)$ — неприводимый полином степени m над полем $K=\mathrm{GF}(p)$. Доказать, что он есть делитель полинома $x^{p^m}-x$.

689. Пусть в некотором поле L характеристики p полином $x^{p^m}-x$ раскладывается на линейные множители. Доказать, что все корни этого полинома попарно различны и образуют поле.