**690.** Пусть $X_{p^m-1}$ — круговой полином. Доказать, что всякий его неприводимый множитель над полем $K = GF(p)$ имеет степень $m$.

**691.** Доказать, что существует одно и только одно (с точностью до изоморфизма) поле из $p^m$ элементов (оно обозначается $GF(p^m)$).

**692.** Подсчитать число неприводимых над $K = GF(p)$ полиномов данной степени.

## § 8. Симметрические полиномы

**693.** Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$;

b) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;

c) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_3^2x_1^2$;

d) $x_1^5x_2^2 + x_1^2x_2^5 + x_1^5x_3^2 + x_1^2x_3^5 + x_2^5x_3^2 + x_2^2x_3^5$;

e) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$;

f) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$;

g) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$;

h) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$.

**694.** Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$;

b) $(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$;

c) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$.

**695.** Выразить через основные симметрические полиномы моногенные полиномы:

a) $x_1^2 + \ldots$;
b) $x_1^3 + \ldots$;
c) $x_1^2x_2x_3 + \ldots$;
d) $x_1^2x_2^2 + \ldots$;
e) $x_1^3x_2 + \ldots$;
f) $x_1^4 + \ldots$;
g) $x_1^2x_2^2x_3 + \ldots$;
h) $x_1^3x_2x_3 + \ldots$;
i) $x_1^3x_2^2 + \ldots$;
j) $x_1^4x_2 + \ldots$;
k) $x_1^5 + \ldots$;
l) $x_1^2x_2^2x_3x_4 + \ldots$;
m) $x_1^2x_2^2x_3^2 + \ldots$;
n) $x_1^3x_2x_3x_4 + \ldots$;
o) $x_1^3x_2^2x_3 + \ldots$;
p) $x_1^3x_2^3 + \ldots$;
q) $x_1^4x_2x_3 + \ldots$;
r) $x_1^4x_2^2 + \ldots$;
s) $x_1^5x_2 + \ldots$;
t) $x_1^6 + \ldots$

**696.** Выразить через основные симметрические полиномы моногенный полином

$$x_1^2x_2^2 \ldots x_k^2 + \ldots$$



**697.** Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}$;

b) $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 + x_2} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{x_2 + x_3} + \frac{(x_3 - x_1)^2}{x_3 + x_1}$;

c) $\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}\right)$.

**698.** Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $\sum \frac{1}{x_i}$; b) $\sum \frac{1}{x_i^2}$; c) $\sum\limits_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j}$.

**699.** Вычислить сумму квадратов корней уравнения

$$x^3 + 2x - 3 = 0.$$

**700.** Вычислить $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_1 + x_3x_1^3$ от корней уравнения $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$.

**701.** Определить значение моногенной симметрической функции

$$x_1^3x_2x_3 + \ldots$$

от корней уравнения

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

**702.** Вычислить значение симметрической функции от корней уравнения $f(x) = 0$:

a) $x_1^4x_2 + \ldots, \qquad f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$;

b) $x_1^3x_2^3 + \ldots, \qquad f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$;

c) $(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2)$,
$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8.$$

**703.** Выразить через коэффициенты уравнения

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

следующие симметрические функции:

a) $a_0^4 (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$;

b) $a_0^4 (x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_1x_2)$;

c) $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} + \frac{(x_1 - x_3)^2}{x_1x_3} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{x_2x_3}$;

d) $a_0^4 (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2)$.