ГЛАВА VI

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ И НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Теоретические основы

Пусть f и g — два полинома с вещественными коэффициентами, не имеющие общих вещественных корней. Вещественный корень x_0 полинома f отнесем к первому типу относительно g, если произведение fg меняет знак с — на +, когда x, возрастая, проходит через x_0. Корень относится ко второму типу, если fg меняет знак с + на —. Если fg не меняет знака при прохождении x через корень f, то такой корень (необходимо четной кратности) не относится ни к первому, ни ко второму типу. Пусть $a < b$, причем $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$. Индексом полинома f относительно g называется разность между числом корней полинома f первого и второго типа, заключенных в интервале (a, b).

Рядом Штурма $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_k$ с началом f, g называется последовательность полиномов, в которой $h_0 = f$, $h_1 = g$ и выполнены требования: 1) h_k не обращается в нуль при $a \leqslant x \leqslant b$. 2) Если $h_i(x_0) = 0$ $(0 < i < k)$, то $h_{i-1}(x_0)\, h_{i+1}(x_0) < 0$.

Имеет место теорема Штурма: индекс f относительно g равен разности числа перемен знаков в значениях полиномов ряда Штурма, вычисленных в начале и в конце отрезка.

Для построения ряда Штурма можно применить алгорифм Евклида к полиномам $h_0 = f$, $h_1 = g$, принимая за h_{i+1} остаток от деления h_{i-1} на h_i, взятый с обратным

знаком. Последним полиномом окажется константа или полином, не имеющий вещественных корней.

757. Доказать, что если полином f не имеет кратных корней и $g = f'$, то все вещественные корни f будут корнями первого типа относительно g, так что индекс f относительно f' в интервале (a, b) равен числу корней в этом интервале.

758. Доказать, что если полином f не имеет кратных корней, то вещественный корень x_0 полинома f будет корнем первого типа относительно g, если $\frac{g(x_0)}{f'(x_0)} > 0$, и второго типа, если $\frac{g(x_0)}{f'(x_0)} < 0$.

***759.** Пусть последовательность полиномов $f_0, f_1, \ldots, f_n$ такова, что степень f_k равна k, старшие коэффициенты положительны и $f_k(x) = a_k(x) f_{k-1}(x) - c_k(x) f_{k-2}(x)$, где $a_k(x)$ и $c_k(x)$ — полиномы и $c_k(x) > 0$ при всех вещественных x для всех $k \geqslant 2$. Доказать, что все корни всех полиномов вещественны и корни соседних полиномов разделяются (т. е. между любыми двумя корнями полинома f_k есть один корень полинома f_{k-1}).

***760.** Дан полином $f(z)$ с комплексными коэффициентами и на плоскости комплексной переменной z дан простой замкнутый контур (т. е. замкнутая линия без самопересечений). Известно, что на этом контуре нет корней полинома $f(z)$. Доказать, что число корней полинома $f(z)$ внутри контура (с учетом кратностей) равно приращению аргумента $f(z)$, деленному на 2π, вычисленному в предположении, что z обходит контур один раз в положительном направлении. Иными словами, число корней внутри контура равно числу оборотов точки $f(z)$ вокруг начала (эта теорема называется принципом аргумента).

***761.** Пусть $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ — полином с комплексными коэффициентами и на плоскости комплексной переменной дан простой замкнутый контур. Пусть известно, что для всех z на контуре имеет место строгое неравенство $|f_1(z)| > |f_2(z)|$. Доказать, что полиномы $f(z)$ и $f_1(z)$ имеют одинаковое число корней внутри контура (теорема Руше).

***762.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, не имеющие общих вещественных корней, и $h(z) = f(z) + ig(z)$. Обозначим через n_1 число корней (с учетом кратности) полинома $h(z)$ в верхней