полуплоскости, через n_2—число корней в нижней полуплоскости. Ясно, что $n_1+n_2=n$—степени полинома $h(z)$, ибо этот полином вещественных корней не имеет. Доказать, что $n_1-n_2=\frac{1}{\pi}\Delta\arg h(x)$. Здесь приращение аргумента вычисляется в предположении, что x пробегает всю вещественную ось от $-\infty$ до $+\infty$.

*763. В предположениях задачи 762 допустим, что степень f не меньше степени g. Доказать, что n_1-n_2 равно индексу $f(x)$ относительно $g(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

764. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет вещественные коэффициенты и его корни $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны. Для квадратичной формы

$$F(t_1, \ldots, t_n)=\sum_{i=1}^{n}(t_1p_1(x_i)+\ldots+t_np_n(x_i))^2$$

вычислить дискриминант и связать знаки коэффициентов ее канонического разложения с расположением корней полинома $f(x)$. Здесь

$$\begin{aligned} p_1(x)&=c_{11}+c_{12}x+\ldots+c_{1n}x^{n-1},\\ p_2(x)&=c_{21}+c_{22}x+\ldots+c_{2n}x^{n-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_n(x)&=c_{n1}+c_{n2}x+\ldots+c_{nn}x^{n-1}, \end{aligned}$$

причем $C=(c_{ij})$—вещественная невырожденная матрица.

765. Ответить на те же вопросы для квадратичной формы

$$F_\lambda(t_1, \ldots, t_n)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda-x_i)(t_1p_1(x_i)+\ldots+t_np_n(x_i))^2.$$

766. Ответить на те же вопросы для квадратичной формы

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{f'(x_i)}(t_1p_1(x_i)+\ldots+t_np_n(x_i))^2,$$

где $g(x)$—полином с вещественными коэффициентами, не имеющий общих корней с $f(x)$.

767. Вычислить матрицу коэффициентов квадратичной формы F задачи 764 при $a_0=1$, $p_k(x)=x^{k-1}$, $k=1, \ldots, n$.

768. Вычислить матрицу коэффициентов квадратичной формы F_λ задачи 765 при $a_0=1$, $p_k(x)=x^{k-1}$.

*769. Пусть $g(x)=b_0x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}$. Показать, что коэффициенты φ_{ij} квадратичной формы Φ задачи 766, при $a_0=1$ и $p_k(x)=x^{k-1}$, задаются формулами $\varphi_{ij}=b_0u_{i+j+n-3}+\ldots+b_{n-1}u_{i+j-2}$, где $u_0, u_1, u_2, \ldots$—последовательность, строящаяся по рекуррентным соотношениям $u_{m+n}+a_1u_{m+n-1}+\ldots+a_nu_m=0$ при начальных условиях $u_0=\ldots=u_{n-2}=0$, $u_{n-1}=1$.

*770. Вычислить матрицу коэффициентов квадратичной формы задачи 764 при $p_1(x)=1$, $p_k(x)=a_0x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}$, $k\geqslant 1$.

*771. Вычислить матрицу коэффициентов квадратичной формы задачи 765 при $p_1(x)=a_0$, $p_k(x)=a_0x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}$, $k\geqslant 1$.

*772. Пусть $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$. Доказать, что матрица квадратичной формы Φ задачи 766, при $p_1(x)=a_0$, $p_k(x)=a_0x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}$ лишь порядком столбцов отличается от матрицы метода Безу вычисления результанта (см. задачу 721).

§ 2. Теорема Штурма

Составить ряд Штурма и отделить корни полиномов:

773. a) x^3-3x-1; b) x^3+x^2-2x-1;
c) x^3-7x+7; d) x^3-x+5; e) x^3+3x-5.

774. a) $x^4-12x^2-16x-4$; b) x^4-x-1;
c) $2x^4-8x^3+8x^2-1$; d) x^4+x^2-1;
e) $x^4+4x^3-12x+9$.

775. a) $x^4-2x^3-4x^2+5x+5$;
b) $x^4-2x^3+x^2-2x+1$;
c) $x^4-2x^3-3x^2+2x+1$;
d) $x^4-x^3+x^2-x-1$;
e) $x^4-4x^3-4x^2+4x+1$.

776. a) $x^4-2x^3-7x^2+8x+1$; b) x^4-4x^2+x+1;
c) $x^4-x^3-x^2-x+1$;
d) $x^4-4x^3+8x^2-12x+8$;
e) x^4-x^3-2x+1.

777. a) x^4-6x^2-4x+2; b) $4x^4-12x^2+8x-1$;
c) $3x^4+12x^3+9x^2-1$; d) $x^4-x^3-4x^2+4x+1$;
e) $9x^4-126x^2-252x-140$.

778. a) $2x^5-10x^3+10x-3$;
b) $x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$;
c) $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$;
d) $x^5-5x^3-10x^2+2$.