779. Составить ряд Штурма, используя право делить функции Штурма на положительные величины, и отделить корни полиномов:

a) x^4+4x^2-1; b) $x^4-2x^3+3x^2-9x+1$;
c) $x^4-2x^3+2x^2-6x+1$;
d) $x^5+5x^4+10x^2-5x-3$.

780. Пользуясь теоремой Штурма, определить число вещественных корней уравнения $x^3+px+q=0$ при вещественных p и q.

*781. Определить число вещественных корней уравнения

$$x^n+px+q=0.$$

782. Определить число вещественных корней уравнения

$$x^5-5ax^3+5a^2x+2b=0.$$

*783. Пусть $f(x)$ — полином третьей степени, не имеющий кратных корней. Показать, что полином $F(x)=2f(x)f''(x)-[f'(x)]^2$ имеет два и только два вещественных корня. Исследовать случаи, когда $f(x)$ имеет двойной или тройной корень.

784. Доказать, что если ряд Штурма содержит полиномы всех степеней от нулевой до n-й, то число перемен знака в ряду старших коэффициентов полиномов Штурма равно числу пар сопряженных комплексных корней исходного полинома.

*785. Определить число вещественных корней полинома

$$E_n(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

В задачах 786—790 доказать вещественность корней некоторых специальных полиномов, опираясь на теорему задачи 759.

786. $P_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ (полиномы Эрмита).

787. $P_n(x)=(-1)^n e^x \frac{d^n (e^{-x}x^n)}{dx^n}$ (полиномы Лагерра).

788. $P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(x^2+1)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$.

789. $P_n(x)=(-1)^n (x^2+1)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

790. $P_n(x)=(-1)^{n+1} x^{2n+2} e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^{n+1}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}}$.

§ 3. Принцип аргумента и его следствия

791. Пользуясь теоремой Руше, определить число корней полинома x^5-4x^2-2 в круге радиуса 1 и в круге радиуса 2.

*792. Узнать, сколько корней в верхней полуплоскости имеет полином $h(x)=f(x)+ig(x)$:

a) $f(x)=6x^4-6x^3-15x^2+9x+8$; $g(x)=2x^3-3x$;
b) $f(x)=x^4-3$; $g(x)=x^3+1$;
c) $f(x)=x^4-4x^2+1$; $g(x)=-x^3+3x-1$.

Доказать следующие теоремы:

*793. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — взаимно простые полиномы с вещественными коэффициентами и степень g не превосходит степени f. Для того, чтобы все корни полинома $h(x)=f(x)+ig(x)$ лежали только в верхней или только в нижней полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы корни полиномов f и g были все вещественны и разделялись.

*794. Если корни взаимно простых полиномов $f(x)$ и $g(x)$ вещественные и разделяются, то все корни полиномов $\lambda f(x)+\mu g(x)$ вещественны при любых вещественных λ и μ.

*795. Пусть $\varphi(z)$ — полином, имеющий корень z_0 кратности k. Тогда для произвольного достаточно малого ρ существует такое δ что, каков бы ни был полином $\psi(z)$, удовлетворяющий на окружности $|z-z_0|=\rho$ неравенству $|\psi(z)|<\delta$, внутри круга $|z-z_0|<\rho$ полином $\varphi(z)+\psi(z)$ имеет ровно k корней (теорема о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов).

*796. Если $\varphi(x)$ — полином или рациональная функция с вещественными коэффициентами, имеющая кратный вещественный корень x_0, то, при достаточно малом $t>0$, функция $\varphi(x)+t$ или $\varphi(x)-t$ имеет невещественные корни.

*797. Если $f(x)$ и $g(x)$ — взаимно простые полиномы с вещественными коэффициентами и при любых вещест-