

Вопросы к зачёту по курсу «Теория чисел» Определения.

1. Алгебраическое число, целое алгебраическое число, степень алгебраического числа.
2. Относительная погрешность рационального приближения.
3. Определение рационального приближения степени $\eta > 0$.
4. Определение симметризованного набора.
5. Определение асимптотически эквивалентных функций.
6. Определение функций $\pi(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$.
7. Функция Мангольдта. Определение функций Чебышёва с помощью функции Мангольдта.
8. Функция Римана.
9. Свёртка Дирихле, функция Мёбиуса.
10. Порядок элемента группы.
11. Определение характера абелевой группы.
12. Продолжение характера группы \mathbb{Z}_m^* до мультипликативной функции на \mathbb{N} .
13. Характер по модулю m . Определение ряда $L(z, \chi)$.
14. Метрика поля, метризованное поле.
15. Метрики поля \mathbb{Q} .
16. Эквивалентные метрики.
17. Топологически изоморфные метризованные поля.
18. Определение пополнения метризованного поля.
19. Определение кольца целых p -адических чисел.
20. Определение поля p -адических чисел.

Доказательства.

1. Алгебраические числа образуют поле, которое является алгебраическим замыканием поля рациональных чисел.
2. Минимальный унитарный многочлен целого алгебраического числа имеет целые коэффициенты.
3. Множество целых алгебраических чисел образует кольцо.
4. Критерий существования рационального приближения степени η .
5. Теорема Дирихле о рациональном приближении. Степень приближения иррациональных чисел.
6. Степень приближения рациональных чисел.
7. Теорема Лиувилля о степени рационального приближения алгебраического числа. Пример трансцендентного числа.
8. Тождество Эрмита.
9. Свойства производных многочлена $\frac{a_n^{p(n-1)}}{(p-1)!} x^{p-1} h(x)^p$.
10. Свойства симметризованных наборов.
11. Если α — алгебраическое число, то e^α не может быть отрицательным рациональным числом. Трансцендентность π .
12. Для любого рационального $\alpha \neq 0$ число e^α не является алгебраическим. Трансцендентность e .
13. Эквивалентность асимптотик для $\pi(x)$ и функций Чебышёва.
14. Формула обращения Мёбиуса. Доказательство тождества $\Lambda = \ln \circ \mu$. Произведение рядов Дирихле арифметических функций.
15. Представление ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-1}$ для мультипликативной функции f в виде произведения. Тождество Эйлера. Функция Римана не имеет нулей при $Re z > 1$.
16. Представление интегральной функции Чебышёва с помощью логарифмической производной функции Римана.
17. Аналитическое продолжение функции Римана в области $Re z > 0$.
18. Доказательство неравенства $|\zeta^3(s)\zeta^4(s+it)\zeta(s+2it)| \geq 1$. Функция Римана не имеет нулей на прямой $Re z = 1$.
19. Оценки модуля функции Римана, модуля её производной и модуля её логарифмической производной.
20. Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел. Асимптотическая формула для n -го простого числа.

21. Группа характеров конечной абелевой группы изоморфна этой группе. Соотношения ортогональности.
22. Свойства ряда $L(z, \chi)$.
23. Свойства функции $L(z, H)$.
24. Теорема о сходимости аналитической функции на интервале $(0, 2)$. Доказать, что точка $z = 1$ является полюсом функции $L(z, H)$.
25. Теорема Дирихле.
26. Критерий эквивалентности метрик.
27. Классификация метрик поля \mathbb{Q} .
28. Теорема о существовании пополнения.
29. Свойства кольца целых p -адических чисел.
30. Доказательство теоремы о том, что $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ является пополнением поля \mathbb{Q} .