ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 13 № 1 2007

УДК 512.542

О СУЩЕСТВОВАНИИ КАРТЕРОВЫХ ПОДГРУПП[1]

Е. П. Вдовин

В работе получен критерий существования картеровой подгруппы в конечной группе в терминах нормального ряда. Приведён пример, показывающий, что критерий не может быть переформулирован в терминах композиционного ряда. В конце приведена классификация картеровых подгрупп в почти простых группах.

Введение

Напомним, что нильпотентная самонормализуемая подгруппа группы G называется *картеровой подгруппой*. Классический результат, полученный Картером в [1] утверждает, что любая конечная разрешимая группа содержит картеровы подгруппы и все они сопряжены. Говорят, что конечная группа G удовлетворяет условию **(C)** если, для любого её неабелева композиционного фактора S и любой её нильпотентной подгруппы N, картеровы подгруппы (если существуют) группы $\langle \mathrm{Aut}_N(S), S\rangle$ сопряжены (определение группы $\mathrm{Aut}_N(S)$ дано ниже). В работе [2] доказано, что если конечная группа G удовлетворяет условию **(C)**, то её картеровы подгруппы сопряжены. В недавней работе [3, Теорема 10.1] доказано, что в любой почти простой группе с известным простым цоколем картеровы подгруппы сопряжены. Таким образом, по модулю классификации конечных простых групп, в любой конечной группе картеровы подгруппы сопряжены. В настоящей работе под конечной группой мы всегда имеем ввиду конечную группу, удовлетворяющую **(C)**, таким образом, результаты работы не зависят от классификации конечных простых групп. Существуют конечные группы без картеровых подгрупп, минимальным примером является группа Alt_5. В работе мы даём критерий существования картеровых подгрупп в терминах нормального ряда.

Если G — группа, A, B, H — подгруппы группы G и B нормальна в A ($B\trianglelefteq A$), то $N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$. Если $x \in N_H(A/B)$, то x индуцирует автоморфизм $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ группы A/B. Таким образом, существует гомоморфизм группы $N_H(A/B)$ в $\mathrm{Aut}(A/B)$. Образ этого гомоморфизма обозначается через $\mathrm{Aut}_H(A/B)$, в то время как его ядро обозначается через $C_H(A/B)$. В частности, если S — композиционный фактор группы G, то для любой $H \leq G$ группа $\mathrm{Aut}_H(S)$ определена.

Пусть $G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_n = \{e\}$ — неуплотняемый нормальный ряд группы G (напомним, что предполагается, что G удовлетворяет **(C)**). Тогда $G_i/G_{i+1} = T_{i,1} \times \ldots \times T_{i,k_i}$, где $T_{i,1} \simeq \ldots \simeq T_{i,k_i} \simeq T_i$ и T_i — простая группа. Если $i \geqslant 1$, то обозначим за $\overline{K}_i$ картерову подгруппу группы G/G_i (если она существует) и за K_i её полный прообраз в G/G_{i+1}. Если $i = 0$, то $\overline{K}_0 = \{e\}$ и $K_0 = G/G_1$. Мы говорим, что конечная группа G удовлетворяет условию **(E)**, если для любых i, j, либо $\overline{K}_i$ не существует, либо $\mathrm{Aut}_{K_i}(T_{i,j})$ содержит картерову подгруппу.

Следующая лемма показывает, что гомоморфный образ картеровой подгруппы вновь является картеровой подгруппой. Мы будем постоянно использовать этот факт.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00797), гранта Президента РФ (МК–1455.2005.1) и СО РАН (грант № 29 для молодых ученых и Интеграционный проект 2006.1.2).

Лемма 1. [3, Лемма 2.1] *Пусть G — конечная группа, пусть K — картерова подгруппа группы G и предположим, что N — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что KN удовлетворяет* **(C)** *(это условие автоматически выполнено, если G удовлетворяет* **(C)** *или если N разрешима) или $KN = G$. Тогда KN/N является картеровой подгруппой группы G/N.*

1. Критерий

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа, H — нормальная подгруппа группы G, $S = (A/H)/(B/H)$ — композиционный фактор группы G/H и L — подгруппа группы G.*

Тогда $\mathrm{Aut}_L(A/B) \simeq \mathrm{Aut}_{LH/H}((A/H)/(B/H))$.

Доказательство. Поскольку $H \leq B$, то $H \leq C_G(A/B)$, следовательно, можно считать, что $L = LH$. Кроме того, можно предполагать, что $L \leq N_G(A) \cap N_G(B)$ и $G = LA$. Тогда действие, задаваемое на A/B по правилу $x : Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ совпадает с действием на $(A/H)/(B/H)$, задаваемом по правилу $xH : BaH \mapsto Bx^{-1}axH$, откуда следует лемма.

Далее нам потребуется знание дополнительной информации о строении картеровых подгрупп в группах специального вида. Пусть A' — группа с нормальной подгруппой T'. Рассмотрим прямое произведение $A_1 \times \ldots \times A_k$, где $A_1 \simeq \ldots \simeq A_k \simeq A'$ и его нормальную подгруппу $T = T_1 \times \ldots \times T_k$, где $T_1 \simeq \ldots \simeq T_k \simeq T'$. Рассмотрим симметрическую группу Sym_k, действующую на $A_1 \times \ldots \times A_k$ по правилу $A_i^s = A_{i^s}$ для всех $s \in S$ и определим X равным полупрямому произведению $(A_1 \times \ldots \times A_k) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_k$ (подстановочное сплетение групп A' и Sym_k). Обозначим через A прямое произведение $A_1 \times \ldots \times A_k$ и через π_i проекцию $\pi_i : A \to A_i$. Во введённых обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть G — такая подгруппа группы X, что $T \leq G$, $G/(G \cap T)$ нильпотентна и $(G \cap A)^{\pi_i} = A_i$. Предположим также, что A разрешима. Пусть K — картерова подгруппа группы G.*

Тогда $(K \cap A)^{\pi_i}$ является картеровой подгруппой группы A_i.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и пусть G — контрпример минимального порядка с минимальным k. Тогда $S = G/(G \cap A)$ транзитивна и примитивна. Действительно, если S не является транзитивной, то $S \leq \mathrm{Sym}_{k_1} \times \mathrm{Sym}_{k-k_1}$, значит, $G \leq G_1 \times G_2$. Если мы обозначим за $\psi_i : G \to G_i$ естественный гомоморфизм, то $G^{\psi_i} = G_i$ удовлетворяет условиям леммы и $K^{\psi_i} = K_i$ является картеровой подгруппой группы G_i. Очевидно, $(G \cap A)^{\pi_j} = (G_i \cap A^{\psi_i})^{\pi_j}$, где $i = 1$ если $j \in \{1, \ldots, k_1\}$ и $i = 2$ если $j \in \{k_1 + 1, \ldots, k\}$, т. е. следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} G \cap A \arrow[rr, "\pi_j"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & & A_j, \\ & G_1 \cap A^{\psi_1} \arrow[ur, "\pi_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \cap A \arrow[rr, "\pi_j"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & & A_j. \\ & G_2 \cap A^{\psi_2} \arrow[ur, "\pi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Таким образом, мы получаем утверждение по индукции. Если S транзитивна, но непримитивна, пусть

$$\Omega_1 = \{T_1, \ldots, T_m\}, \Omega_2 = \{T_{m+1}, \ldots, T_{2m}\}, \ldots, \Omega_l = \{T_{(l-1)m+1}, \ldots, T_{lm}\}$$

система импримитивности. Тогда она содержит нетривиальную нетранзитивную нормальную подгруппу

$$F' \leq \underbrace{\mathrm{Sym}_m \times \ldots \times \mathrm{Sym}_m}_{l \text{ раз}},$$

где $k = m \cdot l$. Рассмотрим полный прообраз F группы F' в X. Тогда $G \cap F \leq F_1 \times \ldots \times F_l$. Обозначим через $\psi_i : F \to F_i$ естественную проекцию, тогда $(G \cap F)^{\psi_i} = F_i$. Заметим, что все из F_i удовлетворяют условиям леммы и, если мы определим $T_i' = T_{(i-1)m+1} \times \ldots \times T_{im}$, то G удовлетворяет условиям леммы с $T' = T_1' \times \ldots \times T_l'$ и $A' = F$. По индукции мы имеем, что $(K \cap F)^{\psi_i}$ является картеровой подгруппой группы F_i и, если $j \in \{m \cdot (i-1) + 1, \ldots m \cdot i\}$, то $\left((K \cap F)^{\psi_i} \cap A^{\psi_i}\right)^{\pi_j}$ является картеровой подгруппой группы A_j. Поскольку $(G \cap A)^{\pi_j} = \left((K \cap F)^{\psi_i} \cap A^{\psi_i}\right)^{\pi_j}$ (для подходящего i), мы получаем утверждение по индукции.

Пусть Y' — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в T (если Y' тривиальна, то T тривиальна и доказывать нечего, поскольку в этом случае G нильпотентна). Таким образом, Y' является нормальной элементарной абелевой p-группой. Пусть $Y_i = (Y')^{\pi_i}$, тогда $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_k$ — нетривиальная нормальная подгруппа группы G (Y является подгруппой группы G поскольку $T \leq G$). Пусть $\bar{\pi}_i : (G \cap A) \to A_i/Y_i = \overline{A}_i$ — проекция, соответствующая проекции π_i. Обозначим за $\overline{K} = KY/Y$ соответствующую картерову подгруппу группы $\overline{G} = G/Y$. Тогда $\overline{G}$ удовлетворяет условиям леммы. По индукции, $(\overline{K} \cap \overline{A})^{\bar{\pi}_i}$ является картеровой подгруппой группы $\overline{A}_i$. Пусть K_1 — полный прообраз группы $\overline{K}$ в G и пусть Q — холлова p'-подгруппа группы K_1. Тогда $(Q \cap A)^{\pi_i}$ является холловой p'-подгруппой группы $(K_1 \cap A)^{\pi_i}$. В виду доказательства [4, Теорема 20.1.4], мы получаем, что $K = N_{K_1}(Q)$ является картеровой подгруппой группы G и $(N_{K_1 \cap A}(Q \cap A))^{\pi_i}$ является картеровой подгруппой группы A_i. Таким образом, нам нужно показать, что $(N_{K_1 \cap A}(Q \cap A))^{\pi_i} = (N_{K_1 \cap S}(Q))^{\pi_i}$. По индукции, равенство $(N_{\overline{K} \cap \overline{A}}(\overline{A} \cap \overline{Q}))^{\bar{\pi}_i} = (N_{\overline{K} \cap \overline{G}}(\overline{Q}))^{\bar{\pi}_i}$ выполнено. Таким образом, нам необходимо доказать, что $(N_Y(Q \cap A))^{\pi_i} = (N_Y(Q))^{\pi_i}$. Заметим также, что $(N_Y(Q \cap A))^{\pi_i} \leq N_{Y_i}((Q \cap A)^{\pi_i})$.

Поскольку S является транзитивной и примитивной подгруппой группы Sym_k, то $k = r$ является простым и $S = \langle s \rangle$ является циклической. Если $r = p$, то $Q \cap A = Q$ и доказывать нечего. В противном случае пусть h — r-элемент из K, порождающий S по модулю $K \cap A$. Очевидно $Q = (Q \cap A)\langle h \rangle$. Пусть $t \in Y_i$ — элемент группы $N_{Y_i}((Q \cap A)^{\pi_i})$. Тогда $(t \cdot t^h \cdot \ldots \cdot t^{h^{r-1}}) \in N_Y(Q)$ и $t^{\pi_i} = (t \cdot t^h \cdot \ldots \cdot t^{h^{r-1}})^{\pi_i}$, значит, $(N_Y(Q \cap A))^{\pi_i} \leq N_{Y_i}((Q \cap A)^{\pi_i}) \leq (N_Y(Q))^{\pi_i} \leq (N_Y(Q \cap A))^{\pi_i}$.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа. Тогда G содержит картерову подгруппу тогда и только тогда, когда G удовлетворяет* **(E)**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала часть «только тогда». Пусть H — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $H = T_1 \times \ldots \times T_k$, где $T_1 \simeq \ldots \simeq T_k \simeq T$ — простые группы.

Если H элементарная абелева (т. е., T циклическая простого порядка), то $\mathrm{Aut}(T)$ разрешима и содержит картерову подгруппу. Предположим, что T — неабелева простая группа. Очевидно, K является картеровой подгруппой группы KH. По [2, Лемма 3] мы получаем, что $\mathrm{Aut}_{KH}(T_i)$ содержит картерову подгруппу для всех i. Индукция по порядку группы завершает доказательство необходимости.

Теперь докажем часть «тогда». Вновь предположим противное, что G — контрпример минимального порядка, т. е., что G не содержит картерову подгруппу, но G удовлетворяет **(E)**. Пусть H — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $H = T_1 \times \ldots \times T_k$, где $T_1 \simeq \ldots \simeq T_k \simeq T$, и T — конечная простая группа.

По определению G/H удовлетворяет **(E)**, таким образом, по индукции, существует картерова подгруппа $\overline{K}$ группы $\overline{G} = G/H$. Пусть K — полный прообрза $\overline{K}$, тогда K удовлетворяет **(E)**. Если $K \neq G$, то, по индукции K содержит картерову подгруппу K'. Заметим, что K' является картеровой подгруппой группы G. Действительно, предположим, что $x \in N_G(K') \setminus K'$. Поскольку $K'H/H = \overline{K}$ является картеровой подгруппой группы $\overline{G}$, мы получаем, что $x \in K$. Но K' является картеровой подгруппой группы K, таким образом $x \in K'$. Значит, $G = K$, т. е. G/H нильпотентна.

Если H абелева, то G разрешима, следовательно, G содержит картерову подгруппу. Предположим, что T — неабелева простая конечная группа. Покажем сначала, что $C_G(H)$ тривиален. Предположим, что $C_G(H) = M$ нетривиален. Поскольку T — неабелева простая группа, отсюда следует, что $M \cap H = \{e\}$, поэтому M нильпотентна. По лемме 2 мы получаем, что G/M удовлетворяет **(E)**. По индукции мы получаем, что G/M содержит картерову подгруппу $\overline{K}$. Пусть K' — полный прообраз группы $\overline{K}$ в G. Тогда K' разрешима, следовательно, содержит картерову подгруппу K. Как и раньше мы получаем, что K является картеровой подгруппой группы G, противоречие. Значит, $C_G(H) = \{e\}$.

Поскольку H является минимальной нормальной подгруппой группы G, мы получаем, что $\mathrm{Aut}_G(T_1) \simeq \mathrm{Aut}_G(T_2) \simeq \ldots \simeq \mathrm{Aut}_G(T_k)$. Таким образом, существует мономорфизм

$$\varphi : G \to (\mathrm{Aut}_G(T_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}_G(T_k)) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_k = G_1$$

и мы отождествляем G с G^φ. Обозначим за K_i картерову подгруппу группы $\mathrm{Aut}_G(T_i)$ и за A подгруппу $\mathrm{Aut}_G(T_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}_G(T_k)$. Поскольку G/H нильпотентна, то $K_iT_i = \mathrm{Aut}_G(T_i)$ и $G_1 = (K_1T_1 \times \ldots \times K_kT_k) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_k$. Пусть $\pi_i : G \cap A \to (G \cap A)/C_{(G\cap A)}(T_i)$ — канонические проекции. Поскольку $G/(G \cap A)$ транзитивна, мы получаем, что $(G \cap A)^{\pi_i} = K_iT_i$.

Поскольку $\mathrm{Aut}_{G\cap A}(T_i) = K_iT_i$, то $G \cap A$ удовлетворяет **(E)**. По индукции она содержит картерову подгруппу M. По [2, Лемма 3] мы получаем, что M^{π_i} является картеровой подгруппой группы K_iT_i, следовательно, мы можем предполагать $M^{\pi_i} = K_i$. В частности, если $R = (K_1 \cap T_1) \times \ldots \times (K_k \cap T_k)$, то $M \leq N_G(R)$. В виду [3], картеровы подгруппы в любой конечной группе сопряжены. Поскольку $(G \cap A)/H$ нильпотентна, мы получаем, что $G \cap A = MH$, значит, $G = N_G(M)H$. Более того, $N_G(M) \cap A = M$, значит $N_G(M)$ разрешима. Поскольку M нормализует R, и $M^{\pi_i} = K_i$, мы получаем, что $N_G(M)$ нормализует R, значит, $N_G(M)R$ разрешима. Следовательно, она содержит картерову подгруппу K. По лемме 3, $(K \cap A)^{\pi_i}$ есть картерова подгруппа группы $(N_G(M)R \cap A)^{\pi_i}$ (R играет роль подгруппы T из леммы 3 в этом случае), поэтому $(K \cap A)^{\pi_i} = K_i$. Предположим, что $x \in N_G(K) \setminus K$. Поскольку $G/H = N_G(M)H/H = KH/H$, отсюда следует, что $x \in H$. Следовательно, $x^{\pi_i} \in (N_G(K) \cap A)^{\pi_i} \leq N_{T_i}((K \cap A)^{\pi_i}) = K_i$. Поскольку $\bigcap_i \mathrm{Ker}(\pi_i) = \{e\}$, отсюда следует, что $x \in R \leq N_G(M)R$. Но K есть картерова подгруппа группы $N_G(M)R$, значит, $x \in K$. Это противоречие завершает доказательство.

2. Пример

В данном параграфе мы построим пример, показывающий, что мы не можем заменить условие **(E)** более слабым условием: для каждого композиционного фактора S группы G, $\mathrm{Aut}_G(S)$ содержит картерову подгруппу. Этот пример показывает также, что расширение группы, содержащей картерову подгруппу, с помощью группы, содержащей картерову подгруппу, может не содержать картерову подгруппу.

Рассмотрим $L = \Gamma SL_2(3^3) = PSL_2(3^3) \leftthreetimes \langle\varphi\rangle$, где φ — полевой автоморфизм группы $PSL_2(3^3)$. Пусть $X = (L_1 \times L_2) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_2$, где $L_1 \simeq L_2 \simeq L$ и, если $\sigma = (1, 2) \in \mathrm{Sym}_2 \setminus \{e\}$, $(x, y) \in L_1 \times L_2$, то $\sigma(x, y)\sigma = (y, x)$ (подстановочное сплетение группы L и Sym_2). Обозначим за $H = PSL_2(3^3)\times PSL_2(3^3)$ минимальную нормальную подгруппу группы X и за $M = L_1\times L_2$. Пусть $G = (H \leftthreetimes \langle(\varphi, \varphi^{-1})\rangle) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_2$ — подгруппа группы X. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для любого композиционного фактора S группы G, $\mathrm{Aut}_G(S)$ содержит картерову подгруппу.

2. $G \cap M \trianglelefteq G$ содержит картерову подгруппу.

3. $G/(G \cap L)$ нильпотентна.

4. G не содержит картерову подгруппу.

1. Очевидно, нам нужно проверить утверждение лишь для неабелевых композиционных факторов. Любой неабелев композиционный фактор S группы G изоморфен $PSL_2(3^3)$ и $\mathrm{Aut}_G(S) = L$. Ввиду [3, Теорема 7.1] (теорема 3 ниже) мы получаем, что L содержит картерову подгруппу (совпадающую с силовской 3 подгруппой).

2. Поскольку $(G \cap M)/H$ нильпотентна и из предыдущего утверждения, мы получаем, что $G \cap M$ удовлетворяет **(E)**, поэтому содержит картерову подгруппу (легко убедиться, что силовская 3-подгруппа группы $G \cap M$ является картеровой подгруппой группы $G \cap M$).

3. Очевидно.

4. Предположим, что K является картеровой подгруппой группы G. Тогда KH/H является картеровой подгруппой группы G/H. Но G/H есть неабелева группа порядка 6, значит, $G/H \simeq \mathrm{Sym}_3$ и KH/H есть силовская 2-подгруппа группы G/H. Ввиду [2, Лемма 3] следует, что $\mathrm{Aut}_K(PSL_2(3^3))$ является картеровой подгруппой группы $\mathrm{Aut}_{KH}(PSL_2(3^3)) = PSL_2(3^3)$. Но $PSL_2(3^3)$ не содержит картеровых подгрупп ввиду [3, Теорема 7.1] (теорема 3 ниже).

3. Классификация картеровых подгрупп

В [3, Лемма 2.3] доказано, что картерова подгруппа конечной группы G содержит силовскую 2-подгруппу S группы G в том и только в том случае, если $N_G(S) = SC_G(S)$. Будем говорить, что конечная группа G удовлетворяет условию **(ESyl2)**, если для её силовской 2-подгруппы S выполнено условие $N_G(S) = SC_G(S)$. Для удобства читателя приведем здесь основные классификационные теоремы из [3].

Теорема 2. [3, Теорема 5.1] *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем характеристики p, $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ и $O^{p'}(G)$ изоморфна $D_4(q)$ или ${}^3D_4(q^3)$. Предположим, что τ — графовый автоморфизм порядка 3 группы $O^{p'}(G)$ (напомним, что для группы $G \simeq {}^3D_4(q^3)$ автоморфизм τ — это такой автоморфизм, множество неподвижных точек которого изоморфно $G_2(q)$). Обозначим через A_1 подгруппу группы $\mathrm{Aut}(D_4(q))$, порожденную внутренне-диагональными и полевыми автоморфизмами, а также графовым автоморфизмом порядка 2. Пусть подгруппа $A \leq \mathrm{Aut}(O^{p'}(G))$ такова, что $A \not\leq A_1$ (если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$), и K — картерова подгруппа группы A. Предположим также, что $G = A \cap \overline{G}_\sigma$ и $A = KG$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(а) *$G \simeq {}^3D_4(q^3)$, $(|A : G|, 3) = 1$, q нечетно и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A;*

(б) *$(|A : G|, 3) = 3$, q нечетно, $\tau \in A$, и, с точностью до сопряжения элементом из G, подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_A(\tau) \in \Gamma G_2(q)$ и $\tau \in K$;*

(в) *$(|A : G|, 3) = 3$, $q = 2^t$, $|A : G| = 3t$, $A = G \leftthreetimes \langle \tau, \varphi \rangle$, где φ — полевой автоморфизм порядка t, перестановочный с τ и, с точностью до сопряжения элементом из G, подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_G(\langle \tau, \varphi \rangle_{2'}) \simeq G_2(2^{t_{2'}})$ и $\tau \in K$;*

(г) *$O^{p'}(G) \simeq D_4(p^{3t})$, p нечетно, факторгруппа A/G циклическая, $\tau \notin A$, $A = G \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, где, для некоторого натурального m, $\zeta = \tau \varphi^m$ является графово-полевым автоморфизмом, и, с точностью до сопряжения элементом из G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, где Q является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}} \simeq {}^3D_4(p^{3t/|\zeta_{2'}|})$.*

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены.

Теорема 3. [3, Теорема 6.1] *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа (G не обязательно простая) над полем характеристики p и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Предположим также, что $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$. Выберем подгруппу A группы $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$, для которой выполнено равенство $A \cap \overline{G}_\sigma = G$, и, если $O^{p'}(G) = D_4(q)$, предположим, что A*

содержится в подгруппе A_1, определенной в формулировке теоремы 2. Пусть K — картерова подгруппа группы A и $A = KG$.

Тогда выполнено в точности одно из следующих утверждений:

(а) *G определена над полем характеристики 2, $A = \langle G, \zeta g, t\rangle$, где t — 2-элемент, K содержится в нормализаторе некоторой t-инвариантной подгруппы Бореля группы G и $K \cap \langle G, \zeta g\rangle$ удовлетворяет одному из утверждений* (a)–(e) [2, лемма 3.8]*;*

(б) *$G \simeq \mathbf{P}SL_2(3^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A, $|\zeta| = t$ нечетно, и, с точностью до сопряжения в G, выполнено равенство $K = Q \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где Q является силовской 3-подгруппой группы $G_{\zeta_{3'}}$;*

(в) *$A = {}^2G_2(3^{2n+1}) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, $|\zeta| = 2n+1$ и с точностью до сопряжения в G выполнено равенство $K = (K \cap G) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ и $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, где Q порядка 2 и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$;*

(г) *p не делит $|K \cap G|$ и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A, ввиду* [2, лемма 3.5] *группа A удовлетворяет* **(ESyl2)** *тогда и только тогда, когда G удовлетворяет* **(ESyl2)**.

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены.

Приведем также следующие две технические леммы, которые будут использоваться при классификации картеровых подгрупп в почти простых группах.

Лемма 4. [2, Лемма 5] *Предположим, что G — конечная группа. Пусть K — картерова подгруппа группы G с центром $Z(K)$. Предположим также, что $e \neq z \in Z(K)$ и $C_G(z)$ удовлетворяет условию* **(C)**.

(1) *Любая подгруппа Y, содержащая K и удовлетворяющая условию* **(C)**, *самонормализуема в G.*

(2) *Никакой элемент, сопряжённый с z в G, кроме z, не лежит в $Z(G)$.*

(3) *Если H — картерова подгруппа группы G, не сопряжённая с K, то z не сопряжён ни с каким элементом из центра группы H.*

В частности, централизатор $C_G(z)$ самонормализуем в G, и z не сопряжён ни с какой степенью $z^k \neq z$.

Лемма 5. [3, Лемма 2.6] *Пусть G — конечная группа, H — такая подгруппа группы G, что $|G : H| = 2^t$. Предположим, что H удовлетворяет условию* **(Esyl2)**. *Тогда G удовлетворяет условию* **(Esyl2)**.

Ввиду условия **(E)** и теоремы 1, изучение картеровых подгрупп в конечных группах сводится к классификации картеровых подгрупп в почти простых группах A, удовлетворяющих дополнительному условию $A/F^*(A)$ нильпотентна. Классификация картеровых подгрупп в группах, удовлетворяющих такому условию получена ранее различными авторами и мы приведем её здесь в форме, удобной для использования.

Докажем сначала следующую теорему, которая показывает, что если для некоторой подгруппы S группы $\mathrm{Aut}(G)$ существует картерова подгруппа, то она существует и в любой бо́льшей группе $S \leq A \leq \mathrm{Aut}(G)$ (здесь G — известная конечная простая группа).

Теорема 4. *Пусть G — конечная простая группа и $G \leq A \leq \mathrm{Aut}(G)$ — почти простая группа с простым цоколем G. Предположим, что A содержит такую подгруппу S, что $G \leq S$ и S содержит картерову подгруппу.*

Тогда A содержит картерову подгруппу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — картерова подгруппа группы S. Очевидно, можно считать, что $S = KG$.

Предположим, что либо $G \simeq \mathrm{Alt}_n$ для некоторого $n \geqslant 5$, либо G является спорадической. Поскольку по [5, Лемма 2.10] любой элемент нечётного простого порядка группы G сопряжен со своей нетривиальной степенью, и поскольку $|\mathrm{Aut}(G) : G|$ является степенью двойки, леммы 4 и 5 влекут, что если некоторая $G \leq S \leq \mathrm{Aut}(G)$ содержит картерову подгруппу K, то K совпадает с силовской 2-подгруппой группы S. Так как $|A : S|$ является степенью двойки, утверждение теоремы в этом случае следует из леммы 5.

Предположим, что $G = {}^3D_4(q^3)$. По [6, Теорема 1.2(vi)] каждый элемент группы G сопряжен со своим обратным. Если q нечётно, то [3, Лемма 4.3] влечёт что K является силовской 2-подгруппой группы S. Поэтому из леммы 5 и [3, Лемма 4.3] следует, что A удовлетворяет условию **(ESyl2)**, т. е. содержит картерову подгруппу. Если $q = 2^t$ чётно, то из теорем 2 и 3 следует, что либо $|\mathrm{Aut}(G) : S| = 3$ и картерова подгруппа группы S является картеровой подгруппой группы A, либо $|\mathrm{Aut}(G) : S| = 2$ и, если $A \neq S$, то A содержит такую подгруппу M индекса 3, что M удовлетворяет теореме 3(2) и картерова подгруппа группы M является картеровой подгруппой группы A.

Предположим, что G является группой лиева типа, $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$ и, если $G \simeq D_4(q)$, то $S \leq A_1$, где $A_1 \leq \mathrm{Aut}(D_4(q))$ определена в теореме 2. Тогда группа S удовлетворяет одному из утверждений (1)–(5) теоремы 3. Рассмотрим все эти случаи по отдельности.

Предположим, что S удовлетворяет утверждению (1). Может быть выполнено два случая: либо 3 не делит $|\zeta|$, либо 3 делит $|\zeta|$. В первом случае мы имеем, что $|\mathrm{Aut}(G) : S| = 2$, таким образом, либо $A = S$, либо $A = \mathrm{Aut}(G)$. Если $A = S$ то доказывать нечего, если $A = \mathrm{Aut}(G)$, то A удовлетворяет утверждению (2) теоремы 3, таким образом, содержит картерову подгруппу. Во втором случае (когда 3 делит $|\zeta|$) мы получаем, что A равна либо ${}^2A_2(2^{2t}) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, либо $\widehat{{}^2A_2(2^{2t})} \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, либо ${}^2A_2(2^{2t}) \leftthreetimes \langle\zeta\tau\rangle$, либо $\mathrm{Aut}(G)$ (здесь τ — полевой автоморфизм порядка 2, коммутирующих с ζ). Первые две группы содержат картерову подгруппу ввиду теоремы 3(1), последние две группы содержат картерову подгруппу в ввиду теоремы 3(2).

Предположим, что S удовлетворяет утверждению (2) теоремы 3. Тогда

$$|\mathrm{Aut}(G) : S| \leqslant 2,$$

значит, либо $A = S$, либо $A = \mathrm{Aut}(G)$. В первом случае A, очевидно, содержит картерову подгруппу. Во втором случае $|A : S| = 2$ и A содержит картерову подгруппу ввиду теоремы 3(2).

Предположим, что S удовлетворяет либо условию (3), либо условию (4) теоремы 3. Тогда $S = \mathrm{Aut}(G) = A$ и доказывать нечего.

Предположим, что S удовлетворяет условию (5) теоремы 3. Пусть Q — силовская 2-подгруппа группы $S \cap \widehat{G}$. Как замечено в теореме 3(5), тогда выполнено равенство $N_{S\cap\widehat{G}}(Q) = QC_{S\cap\widehat{G}}(Q)$. Поскольку $A\cap\widehat{G} \geq S\cap\widehat{G}$, то, ввиду [7], мы получаем, что $N_{A\cap\widehat{G}}(Q_1) = Q_1C_{A\cap\widehat{G}}(Q_1)$, где Q_1 является силовской 2-подгруппой группы $A\cap\widehat{G}$. Из [3, Лемма 4.3] следует, что для силовской 2-подгруппы Q_2 группы A выполнено $N_A(Q_2) = Q_2C_A(Q_2)$. Следовательно, [3, Лемма 2.3] влечёт, что A содержит картерову подгруппу.

Предположим теперь, что $G = D_4(q)$ и S удовлетворяет теореме 2. Поскольку графовые автоморфизмы порядка 2 и 3 не коммутируют, лишь один из них может содержаться в нильпотентной подгруппе. Таким образом, мы можем предполагать, что лишь один из них содержится в A. Тогда любая подгруппа A, содержащая S, либо удовлетворяет теореме 2, либо удовлетворяет теореме 3, условию (2), если q чётно и условию (5), если q нечётно, т. е. содержит картерову подгруппу.

Таблицы, приведённые ниже, устроены следующим образом. В первом столбце указана простая группа S, в группе автоморфизмов которой классифицируются картеровы подгруппы. Во втором столбце приведены условия на подгруппу A её группы автоморфизмов, при которых A содержит картерову подгруппу. В третьем столбце приведено строение картеровой подгруппы K. Для всех подгрупп, группы $\mathrm{Aut}(S)$, несодержащих A, картеровы подгруппы не существуют. Через $P_r(G)$ обозначена силовская r-подгруппа группы G. Через φ обозначен полевой автоморфизм группы лиева типа S, через τ — графовый автоморфизм группы лиева типа S, содержащийся в K (поскольку графовые автоморфизмы порядка 2 и 3 группы $D_4(q)$ не коммутируют, лишь один из них может содержаться в K). Если A не содержит графовых автоморфизмов, то мы полагаем $\tau = e$. Через ψ обозначен полевой автоморфизм группы S максимального порядка, содержащийся в A (он является степенью φ, но $\langle\psi\rangle$ может не совпадать с $\langle\varphi\rangle$). Через $K(U_3(2))$ обозначена картерова подгруппа группы $\widehat{{}^2A_2(2^2)}$ порядка $2\cdot 3$. Если G — разрешимая группа, то через $K(G)$ обозначена картерова подгруппа группы G. В таблице 3 через ζ обозначен графово-полевой автоморфизм группы $A_2(2^{2t})$ порядка $2t$.

Таблица 1. Группы автоморфизмов знакопеременных групп, содержащие картеровы подгруппы.

Группа S	Условия на A	Строение K
Alt_5	$A = \mathrm{Sym}_5$	$K = P_2(\mathrm{Sym}_5)$
Alt_n, $n \geq 6$	никаких	$K = P_2(S)$

Таблица 2. Группы автоморфизмов спорадических групп, содержащие картеровы подгруппы.

Группа S	Условия на A	Строение K
J_2, J_3, Suz, HN	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = P_2(A)$
$\not\simeq J_1, J_2, J_3, Suz, HN$	никаких	$K = P_2(A)$

Таблица 3. Группы автоморфизмов классических групп, содержащие картеровы подгруппы.

Группа S	Условия на A	Строение K
$A_1(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$	никаких	$K = N_A(P_2(S))$
$A_1(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$	$\widehat{S} \leq A$	$K = N_A(P_2(\widehat{S}))$
$A_n(2^t)$, $t \geq 2$, если $n = 1$	$\varphi g \in A$, $g \in \widehat{S}$	$K = \langle \varphi, \tau\rangle \rightthreetimes S_{\varphi_{2'}}$
$A_2(2^{2t})$, $3 \nmid t$	$\langle S, \zeta g\rangle \leq A \leq S \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, $C_{A\cap\widehat{S}}(\varphi_{2'}) \simeq PGU_3(2)$	$K = \langle \zeta g\rangle \times K(PGU_3(2))$
$A_n(q)$, q нечётно, $n \geq 2$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
${}^2A_2(2^{2t})$, t нечётно, $3 \nmid t$	$\langle S, \varphi_{2'} g\rangle \leq A \leq \widehat{S} \leftthreetimes \langle\varphi_{2'}\rangle$ $C_{A\cap\widehat{S}}(\varphi_{2'}) \simeq PGU_3(2)$ $C_{A\cap\widehat{S}}(\varphi_{2'}) \simeq PSU_3(2)$	 $K = \langle\varphi_{2'}\rangle \times K(PGU_3(2))$ $K = \langle\varphi_{2'}\rangle \times P_2(PSU_3(2))$
${}^2A_2(2^{2t})$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle\varphi\rangle \rightthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$
${}^2A_n(q^2)$, q нечётно	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
${}^2A_n(2^{2t})$, $n \geq 3$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle\varphi\rangle \rightthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$
$B_2(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$B_2(2^t)$, $t \geq 2$	$\varphi \in A$	$K = \langle\varphi, \tau\rangle \rightthreetimes P_2((S_\tau)_\varphi)$
$B_2(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$	$\widehat{S} \leq A$	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$B_n(q)$, q нечётно, $n \geq 3$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$C_n(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$C_n(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$	$\widehat{S} \leq A$	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$C_n(2^t)$, $n \geq 3$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle\varphi\rangle \times P_2(S_{\varphi_{2'}})$
$D_4(q)$, q нечётно	никаких	если $\lvert\tau\rvert \leq 2$, то $K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))));$

		если $\|\tau\| = 3$, то $K = \langle \tau, \psi \rangle \leftthreetimes P_2(S_\tau)$
$D_4(2^t)$	$\varphi \in A$	если $\|\tau\| \le 2$, то $K = \langle \tau, \varphi \rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$; если $\|\tau\| = 3$, то $K = \langle \tau, \varphi \rangle \leftthreetimes P_2((S_\tau)_{\varphi_{2'}})$
$D_n(q)$, q нечётно, $n \ge 5$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$D_n(2^t)$, $n \ge 5$	$\varphi \in A$	$K = \langle \tau, \varphi \rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$
${}^2D_n(q^2)$, q нечётно	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
${}^2D_n(2^{2t})$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle \varphi \rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$

Таблица 4. Группы автоморфизмов исключительных групп лиева типа, содержащие картеровы подгруппы.

Группа S	Условия на A	Строение K
${}^2B_2(2^{2n+1})$, $n \ge 1$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle \varphi \rangle \times P_2({}^2B_2(2))$
$({}^2F_4(2))'$	никаких	$K = P_2(A)$
${}^2F_4(2^{2n+1})$, $n \ge 1$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle \varphi \rangle \times P_2({}^2F_4(2))$
${}^2G_3(3^{2n+1})$	$A = \mathrm{Aut}(G)$	$\langle \varphi \rangle \leftthreetimes (2 \times P)$, где $\|P\| = 3^{\|\varphi\|_3}$
остальные, q нечётно	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
остальные, $q = 2^t$	$\varphi g \in A$, $g \in \widehat{S}$	$\langle \tau, \varphi \rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$

В качестве следствия из таблиц отметим следующий интересный результат.

Лемма 6. *Пусть S — известная конечная простая группа, $S \not\simeq J_1$ и $G = \mathrm{Aut}(S)$. Тогда группа G содержит картерову подгруппу.*

Доказательство. Ввиду [7, Теоремы 2 и 3] если S не является группой лиева типа и отлична от J_1, то группа её автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S)$ удовлетворяет **(ESyl2)** и содержит картерову подгруппу. Далее, если S — группа лиева типа в чётной характеристике, то $\mathrm{Aut}(S)$ содержит картерову подгруппу ввиду теоремы 3(2). Если S — группа лиева типа в нечётной характеристике и $S \not\simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$, то $\widehat{S}$ удовлетворяет **(ESyl2)**, следовательно, содержит картерову подгруппу. По теореме 4 группа $\mathrm{Aut}(S)$ содержит картерову подгруппу. Наконец, если $S \simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$, то $\mathrm{Aut}(S)$ содержит картерову подгруппу ввиду теоремы 3(4).

Автор выражает благодарность Мазурову Виктору Даниловичу за обсуждение статьи, которое позволило существенно улучшить первоначальный вариант.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carter R.W.** Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. 1961. T. 75. C 136–139.
2. **Вдовин Е.П.** О проблеме сопряжённости для картеровых подгрупп // СМЖ. 2006. Т. 47, №4. С. 725–730.
3. **Вдовин Е.П.** Картеровы подгруппы в конечных почти простых группах // Алгебра и логика. В печати.
4. **Каргополов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, Физматлит, 1996.
5. **Tamburini M.C., Vdovin E.P.** Carter subgroups of finite groups // J. Algebra. 2002. T. 255, № 1. C. 148–163.
6. **Tiep P.H., Zalesski A.E.** Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type // J. Group Theory. 2005. T. 8, № 3. C 291–315.

7. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых групп // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
8. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, №5. С. 594–623.