Алгебра и логика, 46, N 2 (2007), ???—???

УДК 512.542

Картеровы подгруппы в конечных почти простых группах

Е.П.Вдовин

Аннотация

В статье завершается классификация картеровых подгрупп в конечных почти простых группах. В частности, мы доказываем, что картеровы подгруппы в любой конечной почти простой группе сопряжены. Вместе с предыдущими результатами автора, Ф. Далла Волты, А. Луккини и М. К. Тамбурини, в качестве следствия, получается, что картеровы подгруппы любой конечной группы сопряжены.

1 Введение

Напомним, что подгруппа конечной группы называется *картеровой подгруппой* если она нильпотентна и самонормализуема. Ввиду хорошо известного результата, любая конечная разрешимая группа содержит в точности один сопряженный класс картеровых подгрупп (см. [1]), и разумно предположить, что конечная группа содержит не более одного сопряженного класса картеровых подгрупп. Справедливость этого предположения основывается на интенсивном изучении различными авторами классов конечных групп, которые близки к простым. В частности, показано, что предположение имеет место для симметрических и знакопеременных групп (см. [2]); обозначая через p^t степень простого числа p, для любой такой группы A, что $SL_n(p^t) \leq A \leq GL_n(p^t)$ (см. [3] и [4]); для симплектических групп $Sp_{2n}(p^t)$, полных унитарных групп $GU_n(p^{2t})$ и, когда p

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00797), гранта Президента РФ (МК–1455.2005.1) и СО РАН (грант № 29 для молодых ученых и Интеграционный проект 2006.1.2)

нечетно, полных ортогональных групп $GO_n^{\pm}(p^t)$ (см. [5]). Позже в [6] результаты из [5] были расширены на любую группу G, удовлетворяющую $O^{p'}(S) \leq G \leq S$, где S — полная классическая матричная группа. Некоторые из спорадических простых групп также были изучены (см., например, [7]). В неразрешимых случаях, когда картеровы подгруппы существуют, они всегда оказывались нормализаторами силовских 2-подгрупп.

В работе мы рассмотрим следующую проблему, которую далее мы будем называть проблемой сопряженности.

Проблема. Сопряжены ли любые две картеровы подгруппы конечной группы?

В работе [8] доказано, что минимальный контрпример A к этой проблеме должен быть почти простым. Позже в [9] был получен более сильный результат.

Определение 1.1. Говорят, что конечная группа G удовлетворяет условию **(C)**, если для *любого* неабелева композиционного фактора S *любого* композиционного ряда группы G и для любой нильпотентной подгруппы N группы G картеровы подгруппы группы $\langle \mathrm{Aut}_N(S), S\rangle$ сопряжены (определение группы $\mathrm{Aut}_N(S)$ можно найти ниже).

Поскольку группа S проста, она изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(S)$ и мы отождествляем S с подгруппой $\mathrm{Inn}(S)$ группы $\mathrm{Aut}(S)$. В [9] доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если конечная группа G удовлетворяет условию* **(C)***, то картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

Таким образом, наша задача здесь доказать, что для каждой известной конечной простой группы S и любой нильпотентной подгруппы N группы $\mathrm{Aut}(S)$ картеровы подгруппы группы $\langle S, N\rangle$ сопряжены. Некоторые классы почти простых групп, которые не могут быть минимальным контрпримером к проблеме, найдены в [6] и [10]. Таблица почти простых групп, для которых проблема сопряженности решена положительно дана в [9].

Наши обозначения стандартны. Если G — конечная группа, обозначим через $\mathbf{P}G$ факторгруппу $G/Z(G) \simeq \mathrm{Inn}(G)$. Если π — множество простых чисел, то π' — его дополнение в множестве всех простых чисел. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначено множество простых делителей числа n, и через n_π обозначен максимальный делитель t числа n, для которого $\pi(t) \subseteq \pi$. Как обычно, $O_\pi(G)$ обозначает максимальную нормальную π-подгруппу группы G, через $O^{\pi'}(G)$ обозначена подгруппа, порожденная всеми π-элементами группы G. Если $\pi = \{2\}'$ — множество всех нечетных простых чисел, то $O_\pi(G) = O_{2'}(G)$ обозначается через $O(G)$. Если $g \in G$, то через g_π обозначается π-часть элемента g, т. е. $g_\pi = g^{|g|_{\pi'}}$. Через $F(G)$ обозначена подгруппа Фиттинга группы G, а через $F^*(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы G. Центральное произведение групп G и H обозначено через $G{*}H$. Для конечной группы G мы обозначим через $\mathrm{Aut}(G)$ группу автоморфизмов группы G. Если $\lambda \in \mathrm{Aut}(G)$, то через G_λ обозначено множество λ-неподвижных точек, т. е. $G_\lambda = \{g \in G \mid g^\lambda = g\}$. Если $Z(G) = \{e\}$, то $G \simeq \mathrm{Inn}(G)$ и можно предполагать, что $G \le \mathrm{Aut}(G)$. Говорят, что конечная группа G *почти простая*, если существует простая группа S, удовлетворяющая $S \le G \le \mathrm{Aut}(S)$, т. е. если $F^*(G)$ — простая группа.

Если G — группа, A, B, H — подгруппы группы G и B нормальна в A ($B \trianglelefteq A$), то полагаем $N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$. Если $x \in N_H(A/B)$, то x индуцирует автоморфизм $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ группы A/B. Таким образом, существует гомоморфизм группы $N_H(A/B)$ в $\mathrm{Aut}(A/B)$. Образ этого гомоморфизма обозначается через $\mathrm{Aut}_H(A/B)$, а его ядро — через $C_H(A/B)$. В частности, если $S = A/B$ — композиционный фактор группы G, то для любой подгруппы $H \le G$ определена группа $\mathrm{Aut}_H(S)$. Если A, H — подгруппы группы G, то $\mathrm{Aut}_H(A) = \mathrm{Aut}_H(A/\{e\})$ по определению.

2 Предварительные результаты

Лемма 2.1. *Пусть G — конечная группа, H — нормальная подгруппа группы G, $S = (A/H)/(B/H)$ — композиционный фактор группы G/H и L — подгруппа группы G. Тогда* $\mathrm{Aut}_L(A/B) \simeq \mathrm{Aut}_{LH/H}((A/H)/(B/H))$.

Доказательство. Поскольку $H \le B$, то $H \le C_G(A/B)$, следовательно, можно считать, что $L = LH$. Кроме того, можно предполагать, что $L \le N_G(A) \cap N_G(B)$ и $G = LA$. Тогда действие, задаваемое на A/B по правилу $x : Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ совпадает с действием на $(A/H)/(B/H)$, задаваемом по правилу $xH : BaH \mapsto Bx^{-1}axH$, откуда следует лемма. $\square$

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.2. *Пусть G — конечная группа, H — нормальная подгруппа группы G и $\overline{N}$ — нильпотентная подгруппа группы $\overline{G} = G/H$. Тогда существует такая нильпотентная подгруппа N группы G, что $NH/H = \overline{N}$.*

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $G/H = \overline{N}$. Существует такая подгруппа U группы G, что $UH = G$. Выберем среди таких подгрупп подгруппу минимального порядка. Тогда $U \cap H \leq \Phi(U)$, где $\Phi(U)$ — подгруппа Фраттини группы U. Действительно, если существует максимальная подгруппа M группы U, несодержащая $U \cap H$, то, очевидно, $MH = G$, что противоречит минимальности группы U. Таким образом, группа $U/\Phi(U)$ нильпотентна, следовательно, группа U нильпотентна и $N = U$. $\square$

Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что если конечная группа G удовлетворяет **(C)**, то для любой ее нормальной подгруппы N и разрешимой подгруппы H, группы G/H и HN удовлетворяют **(C)**.

Лемма 2.3. *Пусть G — конечная группа, K — картерова подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что KN удовлетворяет* **(C)** *(это условие автоматически выполнено, если G удовлетворяет* **(C)** *или N разрешима) или $KN = G$. Тогда KN/N является картеровой подгруппой группы G/N.*

Доказательство. Если $KN = G$, то утверждение очевидно. Предположим, что $KN \neq G$, т. е. KN удовлетворяет **(C)**. Рассмотрим $x \in G$ и предположим, что $xN \leq N_{G/N}(KN/N)$. Следовательно, $x \in N_G(KN)$. Имеем, что K^x есть картерова подгруппа группы KN. Поскольку KN удовлетворяет **(C)**, мы получаем, что ее картеровы подгруппы сопряжены. Таким образом, существует такой $y \in KN$, что $K^y = K^x$. Поскольку K является картеровой подгруппой группы G, отсюда следует, что $xy^{-1} \in N_G(K) = K$ и $x \in KN$. $\square$

Лемма 2.4. [9, лемма 5] *Пусть K — картерова подгруппа конечной группы G, неединичный элемент z лежит в $Z(K)$ и $C_G(z)$ удовлетворяет* **(C)**. *Тогда*

(а) *любая подгруппа Y, содержащая K и удовлетворяющая* **(C)**, *является самонормализуемой в G;*

(б) *никакой сопряженный с z элементом из G, кроме z, не лежит в $Z(K)$;*

(в) *если H — картерова подгруппа группы G, не сопряженная с K, то z не сопряжен ни с каким элементом из центра группы H.*

В частности, централизатор $C_G(z)$ является самонормализуемым в G, и z не сопряжен ни с какой степенью $z^k \neq z$.

Лемма 2.5. *Пусть G — конечная группа и Q — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда картерова подгруппа K группы G, содержащая Q, существует в том и только в том случае, если $N_G(Q) = QC_G(Q)$.*

Доказательство. Предположим, что существует картерова подгруппа K группы G, содержащая Q. Поскольку K нильпотентна, отсюда следует, что Q нормальна в K и $K \leq QC_G(Q) \trianglelefteq N_G(Q)$. По теореме Фейта-Томпсона (см. [11]) нормализатор $N_G(Q)$ разрешим. По лемме 2.4(a) группа $QC_G(Q)$ самонормализуема в $N_G(Q)$, значит, $N_G(Q) = QC_G(Q)$.

Предположим теперь, что $N_G(Q) = QC_G(Q)$, т. е. $N_G(Q) = Q \times O(C_G(Q))$. Поскольку подгруппа $O(C_G(Q))$ нечетного порядка, она разрешима. Следовательно, она содержит картерову подгруппу K_1. Рассмотрим нильпотентную подгруппу $K = Q \times K_1$ группы G. Ясно, что $N_G(K) \leq N_G(Q)$. Но K есть картерова подгруппа группы $N_G(Q)$, значит, K есть картерова подгруппа группы G. $\square$

Определение 2.6. Имея ввиду лемму 2.5, будем говорить, что конечная группа G удовлетворяет условию **(ESyl2)**, если для силовской 2-подгруппы Q группы G справедливо равенство $N_G(Q) = QC_G(Q)$. Иными словами, группа G удовлетворяет **(ESyl2)**, если любой элемент нечетного порядка, нормализующий силовскую 2-подгруппу Q группы G, централизует Q.

Лемма 2.7. *Пусть G — конечная группа, Q — силовская 2-подгруппа группы G и x — элемент нечетного порядка из $N_G(Q)$. Предположим, что существуют такие нормальные подгруппы $G_1, \ldots, G_k$ группы G, что $G_1 \cap \ldots \cap G_k \cap Q \leq Z(N_G(Q))$ и x централизует Q по модулю G_i для всех i. Тогда x централизует Q. В частности, если G/G_i удовлетворяет* **(ESyl2)** *для всех i, то G удовлетворяет* **(ESyl2)**.

Доказательство. Рассмотрим нормальный ряд $Q \trianglerighteq Q_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq Q_k \trianglerighteq Q_{k+1} = \{e\}$, где $Q_i = Q \cap (G_1 \cap \ldots \cap G_i)$. Условия леммы влекут, что x централизует каждый фактор Q_{i-1}/Q_i. Поскольку x нечетного порядка, это влечет, что x централизует Q. $\square$

Лемма 2.8. [9, лемма 3] *Пусть K — картерова подгруппа конечной группы G. Предположим, что существует нормальная подгруппа $B = T_1 \times \ldots \times T_k$ группы G такая, что $G = KB$, $Z(T_i) = \{e\}$ и T_i не разложима в прямое произведение собственных подгрупп для всех i. Тогда $\mathrm{Aut}_K(T_i)$ является картеровой подгруппой группы $\langle \mathrm{Aut}_K(T_i), T_i \rangle$.*

Лемма 2.9. *Пусть H — такая подгруппа конечной группы G, что $|G : H| = 2^t$, H удовлетворяет условию* **(ESyl2)**, *и любой элемент нечетного порядка группы G лежит в H (это условие, очевидно, эквивалентно субнормальности подгруппы H). Тогда G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**.

Доказательство. Пусть Q — такая силовская 2-подгруппа группы G, что $Q \cap H$ — силовская 2-подгруппа группы H. Рассмотрим элемент $x \in N_G(Q)$ нечетного порядка. Поскольку $x \in H$, то $x \in N_H(Q) \leq N_H(Q \cap H) = (Q \cap H) \times O(N_H(Q \cap H))$, т. е. $x \in O(N_H(Q \cap H))$. Таким образом, множество элементов нечетного порядка из $N_G(Q)$ образует подгруппу $R = O(N_H(Q \cap H)) \cap N_G(Q)$ группы $N_G(Q)$. Ясно, что R нормальна в $N_G(Q)$, следовательно, $R = O(N_G(Q))$. С другой стороны, Q нормальна в $N_G(Q)$ по определению и $Q \cap R = \{e\}$, откуда $N_G(Q) = Q \times O(N_G(Q))$. $\square$

3 Группы лиева типа

Наши обозначения для групп лиева типа совпадают с обозначениями из [12], а для линейных алгебраических групп — из [13]. Если G — каноническая конечная группа лиева типа (определение смотри ниже) с тривиальным центром (мы не исключаем непростые группы лиева типа, такие как $A_1(2)$, все исключения даны в [12, теоремы 11.1.2 и 14.4.1]), то $\widehat{G}$ обозначает группу внутренне-диагональных автоморфизмов группы G. В виду [14, 3.2] мы имеем, что $\mathrm{Aut}(G)$ порождается внутренне-диагональными, полевыми и графовыми автоморфизмами. Поскольку мы предполагаем, что $Z(G)$ тривиален, мы получаем, что $G \simeq \mathrm{Inn}(G)$ и, значит, можно предполагать, что $G \leq \widehat{G} \leq \mathrm{Aut}(G)$.

Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\overline{\mathbb{F}}_p$ положительной характеристики p. При этом $Z(\overline{G})$ может быть нетривиальным. Эндоморфизм σ группы $\overline{G}$ называется *отображением Фробениуса*, если $\overline{G}_\sigma$ конечна и σ является автоморфизмом группы $\overline{G}$ как абстрактной группы. Группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ называются *каноническими конечными группами лиева типа* и любая группа G, удовлетворяющая $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$, называется *конечной группой лиева типа*. Если $\overline{G}$ является простой алгебраической группой присоединенного типа, то будем говорить, что G также имеет присоединенный тип. Заметим, что в [12] только группы $O^{p'}(\overline{G})$ называются группами лиева типа.

Но позже в [15] Р.Картер говорит, что любая группа $\overline{G}_\sigma$ является конечной группой лиева типа для произвольной связной редуктивной группы $\overline{G}$. Более того, в [16] и [17] без каких-либо пояснений любая группа G, удовлетворяющая условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$, называется конечной группой лиева типа. Таким образом, приводя определение конечных групп лиева типа и канонических конечных групп лиева типа, мы намерены прояснить ситуацию здесь. Например, $\mathbf{P}SL_2(3)$ является канонической конечной группой лиева типа и $\mathbf{P}GL_2(3)$ является конечной группой лиева типа. Заметим, что элемент порядка 3 не сопряжен со своим обратным в $\mathbf{P}SL_2(3)$ и сопряжен со своим обратным в $\mathbf{P}GL_2(3)$. Поскольку такая информация о сопряжении важна во многих случаях (и очень важна и полезна в данной работе), мы находим разумным использовать такие обозначения. Через $\Phi(\overline{G})$ обозначена корневая система группы $\overline{G}$ и через Φ или $\Phi(G)$ обозначена корневая система группы $O^{p'}(G)$. Через $\Delta(\overline{G})$ обозначена фундаментальная группа группы $\overline{G}$, а через $\Delta(\Phi)$ — факторгруппа решетки, порожденной фундаментальными весами корневой системы Φ по решетке, порожденной корневой системой Φ. Отметим, что $\Delta(\overline{G})$ всегда является факторгруппой группы $\Delta(\Phi(\overline{G}))$ и для любой корневой системы Φ, отличной от D_{2n} группа $\Delta(\Phi)$ является циклической, а $\Delta(D_{2n})$ является элементарной абелевой группой порядка 4. Группа Вейля группы $\overline{G}$ обозначается через $W(\overline{G})$ и группа Вейля корневой системы Φ обозначается через $W(\Phi)$. Если $W(\Phi)$ — группа Вейля корневой системы Φ, то через w_0 обозначен единственный элемент, переводящий все положительные корни в отрицательные.

Мы говорим, что группы лиева типа G, у которых $O^{p'}(G)$ совпадает с одной из групп ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^2E_6(q^2)$, определены над $GF(q^2)$, группы лиева типа ${}^3D_4(q^3)$ определены над $GF(q^3)$ и остальные группы лиева типа определены над $GF(q)$. Поле $GF(q)$ во всех случаях называется *базовым полем.* Ввиду [18, лемма 2.5.8], если $\overline{G}$ — группа присоединенного типа, то $\overline{G}_\sigma$ — группа внутренне-диагональных автоморфизмов группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Если $\overline{G}$ односвязна, то $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ (см. [19, 12.4]). В любом случае, ввиду [18, теорема 2.2.6(g)] $\overline{G}_\sigma = \overline{T}_\sigma O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ для любого σ-инвариантного максимального тора $\overline{T}$ группы $\overline{G}$. В общем случае, для данной конечной группы лиева типа G (если мы рассматриваем ее как абстрактную группу) соответствующая алгебраическая группа определена не единственным образом. Например, если $G = \mathbf{P}SL_2(5) \simeq SL_2(4)$, то G можно получить либо как $(SL_2(\overline{\mathbb{F}}_2))_\sigma$, либо как $O^{5'}((\mathbf{P}SL_2(\overline{\mathbb{F}}_5))_\sigma)$ (для подходящих σ). Значит, для любой конечной группы G лиева типа, мы фиксируем (некоторым способом) соответствующую алгебраическую группу $\overline{G}$ и отображение Фробениуса σ такие, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть $U = \langle X_r \mid r \in \Phi(\overline{G})^+\rangle$ — максимальная унипотентная подгруппа группы G. Если мы зафиксируем порядок на $\Phi(\overline{G})$, то любой $u \in U$ можно единственным образом записать в виде

$$u = \prod_{r\in\Phi^+} x_r(t_r), \tag{1}$$

где корни берутся в заданном порядке и t_r лежат в поле определения группы G. Если $O^{p'}(G)$ совпадает с одной из групп ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2E_6(q^2)$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, или ${}^2F_4(2^{2n+1})$, то будем говорить, что группа G является *скрученной*, в остальных случаях группа G называется расщепленной. Если $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ — скрученная группа лиева типа и $r \in \Phi(\overline{G})$, то через $\bar{r}$ всегда обозначен образ корня r относительно симметрии корневой системы, соответствующей графовому автоморфизму, используемому при построении группы G. Иногда мы используем обозначение $\Phi^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$, и $\Phi^+(q) = \Phi(q)$ является расщепленной канонической группой лиева типа с базовым полем $GF(q)$, $\Phi^-(q) = {}^2\Phi(q^2)$ является скрученной канонической группой лиева типа, определенной над полем $GF(q^2)$ (с базовым полем $GF(q)$).

Далее пусть $\overline{R}$ — замкнутая σ-инвариантная подгруппа группы $\overline{G}$. Положим $R = G\cap\overline{R}$ и $N(G,R) = G \cap N_{\overline{G}}(\overline{R})$. Заметим, что $N(G,R) \neq N_G(R)$ в общем случае, и мы называем группу $N(G,R)$ *алгебраическим нормализатором* группы R. Например, если $G = SL_n(2)$, то подгруппа диагональных матриц H группы G тривиальна, значит, $N_G(H) = G$. Но $G = (SL_n(\overline{\mathbb{F}}_2))_\sigma$, где σ — отображение Фробениуса $\sigma : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^2)$. Поэтому $H = \overline{H}_\sigma$, где $\overline{H}$ является подгруппой диагональных матриц в $SL_n(\overline{\mathbb{F}}_2)$.

Таким образом, $N(G,H)$ является группой мономиальных матриц в G. Мы используем термин «алгебраический нормализатор» для того, чтобы избегать подобных трудностей и чтобы сделать наши доказательства универсальными. Группа R называется *тором* (соотв. *редуктивной подгруппой*, *параболической подгруппой*, *максимальным тором*, *редуктивной подгруппой максимального ранга*) если $\overline{R}$ — тор (соотв. редуктивная подгруппа, параболическая подгруппа, максимальный тор, редуктивная подгруппа максимального ранга) группы $\overline{G}$. Максимальный σ-инвариантный тор $\overline{T}$, для которого $\overline{T}_\sigma$ является подгруппой Картана группы $\overline{G}_\sigma$ называется *максимальным расщепленным тором.* Если $\overline{R}$ — связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\overline{G}$, то $\overline{R}=\overline{G}_1*\ldots*\overline{G}_k*\overline{Z}$, где $\overline{G}_i$ являются простыми связными линейными алгебраическими группами и $\overline{Z}=Z(\overline{R})^0$ (см [13, теорема 27.5]). Более того, если $\Phi_1,\ldots,\Phi_k$ — корневые системы групп $\overline{G}_1,\ldots,\overline{G}_k$ соответственно, то $\Phi_1\cup\ldots\cup\Phi_k$ является подсистемой системы $\Phi(\overline{G})$. Существует удобный алгоритм, принадлежащий Борелю и де Зибенталю [20] и, независимо, Дынкину [21] определения неразложимых подсистем произвольной неразложимой корневой системы Φ. Необходимо удалить некоторые вершины из расширенной диаграммы Дынкина корневой системы Φ и повторить процедуру для полученных компонент связности. Связные компоненты, получаемые таким образом, являются диаграммами Дынкина для неразложимых подсистем и диаграмма Дынкина любой неразложимой подсистемы может быть получена таким образом.

Далее предположим, что редуктивная подгруппа $\overline{R}$ является σ-инвариантной. Ввиду [19, 10.10] существует σ-инвариантный максимальный тор $\overline{T}$ группы $\overline{R}$. Пусть $\overline{G}_{i_1},\ldots,\overline{G}_{i_{j_i}}$ — σ-орбита группы $\overline{G}_{i_1}$. Рассмотрим индуцированное действие отображения σ на факторгруппе

$$(\overline{G}_{i_1}*\ldots*\overline{G}_{i_{j_i}})/Z(\overline{G}_{i_1}*\ldots*\overline{G}_{i_{j_i}})\simeq \mathbf{P}\overline{G}_{i_1}\times\ldots\times\mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}.$$

Поскольку $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}\simeq\ldots\simeq\mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}$ являются простыми (как абстрактные группы), то σ индуцирует циклическую подстановку на множестве $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1},\ldots,\mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}$, и можно считать, что нумерация выбрана так, что $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}^{\sigma}=$

$\mathbf{P}\overline{G}_{i_2}, \ldots, \mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}^{\sigma} = \mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$. Таким образом, справедливо равенство

$$(\mathbf{P}\overline{G}_{i_1} \times \ldots \times \mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma = \\ \{x \mid x = g \cdot g^\sigma \cdot \ldots \cdot g^{\sigma^{j_i-1}} \text{ для некоторого } g \in \mathbf{P}\overline{G}_{i_1}\}_\sigma \simeq (\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}.$$

Ввиду [19, 10.15] группа $\mathbf{P}\overline{G}_{\sigma^{j_i}}$ конечна, значит, $O^{p'}((\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}})$ является канонической конечной группой лиева типа, возможно, с бóльшим базовым полем, чем базовое поле группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.

Пусть $\overline{B}_{i_1}$ — прообраз σ^{j_i}-инвариантной подгруппы Бореля группы $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$ в группе $\overline{G}_{i_1}$ относительно естественного эпиморфизма, и $\overline{T}_{i_1}$ — σ^{j_i}-инвариантный максимальный тор группы $\overline{G}_{i_1}$, лежащий в $\overline{B}_{i_1}$ (их существование следует из [19, 10.10]). Тогда, как следует из замечания в начале параграфа 11 из [19], подгруппы $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$, порожденные $\overline{T}_{i_1}$-инвариантными корневыми подгруппами, взятыми по всем положительным и отрицательным корням соответственно также являются σ^{j_i}-инвариантными. Поскольку $\overline{G}_{i_1}$ — простая алгебраическая группа, то $\overline{G}_{i_1}$ порождается подгруппами $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$. Далее, $Z(\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}})$ состоит из полупростых элементов, поэтому ограничение естественного эпиморфизма $\overline{G}_{i_1} \to \mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$ на $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$ есть изоморфизм. Следовательно, для любого k подгруппы $(\overline{U}_{i_1})^{\sigma^k}$ и $(\overline{U}_{i_1}^-)^{\sigma^k}$ являются максимальными σ^{j_i}-инвариантными связными унипотентными подгруппами группы $\overline{G}_{i_k}$ и порождают группу $\overline{G}_{i_k}$.

Таким образом, $\overline{U}_{i_1} \times (\overline{U}_{i_1})^\sigma \times \ldots \times (\overline{U}_{i_1})^{\sigma^{j_i-1}}$ и $\overline{U}_{i_1}^- \times (\overline{U}_{i_1}^-)^\sigma \times \ldots \times (\overline{U}_{i_1}^-)^{\sigma^{j_i-1}}$ являются максимальными σ-инвариантными связными унипотентными подгруппами группы $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}}$ и порождают группу $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}}$. В силу [19, следствие 12.3(a)], мы имеем

$$O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma) = \\ \langle (\overline{U}_{i_1} \times (\overline{U}_{i_1})^\sigma \times \ldots \times (\overline{U}_{i_1})^{\sigma^{j_i-1}})_\sigma, (\overline{U}_{i_1}^- \times (\overline{U}_{i_1}^-)^\sigma \times \ldots \times (\overline{U}_{i_1}^-)^{\sigma^{j_i-1}})_\sigma \rangle \simeq \\ \langle (\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}_{i_1}^-)_{\sigma^{j_i}} \rangle = O^{p'}((\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}).$$

В силу [19, 11.6 и следствие 12.3], группа $\langle (\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}_{i_1}^-)_{\sigma^{j_i}} \rangle$ является канонической конечной группой лиева типа. Более того, из приведенных выше рассуждений следует, что группы $\langle(\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}^-_{i_1})_{\sigma^{j_i}}\rangle/Z(\langle(\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}^-_{i_1})_{\sigma^{j_i}}\rangle)$ и $O^{p'}((\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}})$ изоморфны. Обозначая $O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma)$ через G_i, мы получаем, что G_i является канонической конечной группой лиева типа для всех i. Подгруппы G_i группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, возникающие таким образом, называются *подсистемными подгруппами* группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.

Поскольку $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{j_i}$ является σ-инвариантной подгруппой, то $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{j_i} \cap \overline{T}$ является σ-инвариантным максимальным тором группы $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{j_i}$. Следовательно, мы можем предполагать, что для любой σ-орбиты $\{\overline{G}_{i_1}, \ldots, \overline{G}_{i_{j_i}}\}$, пересечение $\overline{T} \cap \overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}}$ является максимальным σ-инвариантным тором группы $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}}$. Тогда $\overline{R}_\sigma = \overline{T}_\sigma(G_1 * \ldots * G_m)$ и $\overline{T}_\sigma$ нормализует каждую из групп G_i.

Для σ-орбиты $\{\overline{G}_{i_1}, \ldots, \overline{G}_{i_{j_i}}\}$ группы $\overline{G}_{i_1}$, удовлетворяющей $G_i = O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma)$, рассмотрим $\mathrm{Aut}_{\overline{R}_\sigma}(G_i)$. Поскольку $G_1 * \ldots * G_{i-1} * G_{i+1} * \ldots * G_k * \overline{Z}_\sigma \leq C_{\overline{R}_\sigma}(G_i)$, мы имеем, что $\mathrm{Aut}_{\overline{R}_\sigma}(G_i) \simeq \left(\overline{T}_\sigma G_i\right)/Z\left(\overline{T}_\sigma G_i\right)$. Из [18, предложение 2.6.2] следует, что автоморфизмы, индуцируемые тором $\overline{T}_\sigma$ на G_i являются диагональными. Следовательно, справедливы включения $\mathbf{P}G_i \leq \mathrm{Aut}_{\overline{R}_\sigma}(G_i) \leq \widehat{\mathbf{P}G_i}$, в частности $\mathrm{Aut}_{\overline{R}_\sigma}(G_i)$ является конечной группой лиева типа.

Пусть $\overline{R}$ — σ-инвариантная связная редуктивная подгруппа максимального ранга (в частности, $\overline{R}$ может быть максимальным тором) группы G. Поскольку группы $N_{\overline{G}}(\overline{R})/\overline{R}$ и $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ изоморфны, мы получаем индуцированное действие автоморфизма σ на $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ и мы говорим, что $w_1 \equiv w_2$, для $w_1, w_2 \in N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ если существует элемент $w \in N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$, удовлетворяющий равенству $w_1 = w^{-1}w_2w^\sigma$. Пусть $Cl(\overline{G}_\sigma, \overline{R})$ — множество $\overline{G}_\sigma$-сопряженных классов σ-инвариантных подгрупп $\overline{R}^g$, где $g \in \overline{G}$. Тогда $Cl(\overline{G}_\sigma, \overline{R})$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством σ-сопряженных классов $Cl(N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}, \sigma)$, где W — группа Вейля группы $\overline{G}$, $W_{\overline{R}}$ — группа Вейля группы $\overline{R}$ (и она является подгруппой группы W). Если w — элемент группы $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$, и $(\overline{R}^g)_\sigma$ соответствует σ-сопряженному классу элемента w, то говорят, что $(\overline{R}^g)_\sigma$ получена «скручиванием» группы $\overline{R}$ элементом $w\sigma$. При этом $(\overline{R}^g)_\sigma \simeq \overline{R}_{\sigma w}$. Более подробно о скручивании можно прочитать в [23].

Лемма 3.1. *Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над полем характеристики p, t — элемент порядка r группы $\overline{G}$, не делящегося на p. Тогда $C_{\overline{G}}(t)/C_{\overline{G}}(t)^0$ является $\pi(r)$-группой.*

Доказательство. Поскольку p не делит r, то t полупрост. Значит, $C_{\overline{G}}(t)^0$ есть связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\overline{G}$ и любой p-элемент группы $C_{\overline{G}}(t)$ содержится в $C_{\overline{G}}(t)^0$ (см. [22, Теорема 2.2]). Предположим, что некоторое простое число $s \notin \pi(r)$ делит порядок $|C_{\overline{G}}(t)/C_{\overline{G}}(t)^0|$. Тогда $s \neq p$ и для некоторого натурального $k > 0$, централизатор $C_{\overline{G}}(t)$ содержит такой элемент x порядка s^k, что $x \notin C_{\overline{G}}(t)^0$. Поскольку x и t коммутируют, то $x \cdot t$ — полупростой элемент группы $\overline{G}$ порядка rs^k. Следовательно, существует максимальный тор $\overline{T}$ группы $\overline{G}$, для которого $x \cdot t \in \overline{T}$. Тогда $(xt)^r = x^r \in \overline{T}$. Поскольку $(s, r) = 1$, существует такое m, что $rm \equiv 1 \pmod{s^k}$, таким образом, $(x^r)^m = x \in \overline{T}$. Так как $xt, x \in \overline{T}$, то $t \in \overline{T}$, поэтому $\overline{T} \leq C_{\overline{G}}(t)^0$, значит, $x \in C_{\overline{G}}(t)^0$; противоречие. □

Напомним, что элемент x линейной алгебраической группы $\overline{G}$ называется *регулярным*, если его централизатор имеет минимальную возможную размерность. В частности, если элемент x полупрост и группа $\overline{G}$ связна и редуктивна, то элемент x называется *регулярным*, если компонента связности его централизатора является максимальным тором группы $\overline{G}$.

Предположим теперь, что $\overline{R}$ является σ-инвариантной параболической подгруппой группы $\overline{G}$ и $\overline{U}$ — ее унипотентный радикал. Тогда она содержит такую связную редуктивную подгруппу $\overline{L}$, что $\overline{R}/\overline{U} \simeq \overline{L}$. Подгруппа $\overline{L}$ называется *фактором Леви* группы $\overline{R}$. Более того, если $\overline{Z} = Z(\overline{L})^0$, то $\overline{L} = C_{\overline{G}}(\overline{Z})$ (см. [13, 30.2]). Пусть $Rad(\overline{R})$ — радикал группы $\overline{R}$. Тогда он является σ-инвариантной связной разрешимой подгруппой, значит, по [19, 10.10], он содержит σ-инвариантный максимальный тор $\overline{Z}$. Далее, $C_{\overline{G}}(\overline{Z}) = C_{\overline{R}}(\overline{Z})$ есть σ-инвариантный фактор Леви группы $\overline{R}$. Таким образом, любая σ-инвариантная параболическая подгруппа группы $\overline{G}$ содержит σ-инвариантный фактор Леви $\overline{L}$ и $\overline{L}$ является связной редуктивной подгруппой максимального ранга группы $\overline{G}$.

Лемма 3.2. (Лемма Хартли-Шута [24, лемма 2.2]) *Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — конечная каноническая присоединенная группа лиева типа с полем определения $GF(q)$. Пусть H — подгруппа Картана группы G и $s \in GF(q)$. Если $r = \bar{r}$ и группа G скрученная, то предположим также, что s лежит в базовом поле группы G. Тогда существует такой элемент $h(\chi) \in H$, что*

$\chi(r) = s$, за исключением следующих случаев, в которых $h(\chi)$ может быть выбран так, чтобы $\chi(r)$ имел указанные значения:

(а) $G = A_1(q)$, $\chi(r) = s^2$;

(б) $G = C_n(q)$, r — *длинный корень*, $\chi(r) = s^2$;

(в) $G = {}^2A_2(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^3$;

(г) $G = {}^2A_3(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^2$;

(д) $G = {}^2D_n(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^2$;

(е) $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, $r = a$ *или* $r = 3a+b$, *где* a — *короткий*, b — *длинный фундаментальные корни*, $\chi(r) = s^2$.

Лемма 3.3. *Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ — конечная присоединенная группа лиева типа над полем нечетной характеристики p и корневая система Φ группы $\overline{G}$ — одна из следующих: A_n ($n \geqslant 2$), D_n ($n \geqslant 4$), B_n ($n \geqslant 3$), G_2, F_4, E_6, E_7 или E_8; и $G \not\simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$. Пусть U — максимальная унипотентная подгруппа группы G, H — подгруппа Картана группы G, нормализующая U, и Q — силовская 2-подгруппа группы H. Тогда $C_U(Q) = \{e\}$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму для случая $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = O^{p'}(G)$, т. е. можно считать, что G является канонической присоединенной группой лиева типа. Если G расщепленная или $G \simeq {}^2D_n(q^2)$, то лемма следует из [10, лемма 2.8]. Предположим, что $G \simeq {}^2A_n(q^2)$ или $G \simeq {}^2E_6(q^2)$, тогда $\Phi(\overline{G})$ равна A_n и E_6 соответственно. Обозначим через $\bar{r}$ образ корня r корневой системы Φ относительно соответствующей симметрии. В терминах из [12], корневая система $\Phi(\overline{G})$ представима в виде объединения классов эквивалентности Ψ_i, причем каждый из Ψ_i имеет тип либо A_1, либо $A_1 \times A_1$, либо A_2. Ввиду [12, Предложение 13.6.1], справедливо равенство $U = \prod_i X_{\Psi_i}$, где

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t) \mid t \in GF(q)\},$$

если $\Psi_i = \{r\}$ имеет тип A_1 (при этом $r = \bar{r}$);

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\},$$

если $\Psi_i = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$ (при этом $r \neq \bar{r}$ и $r + \bar{r} \notin \Phi(\overline{G})$);

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u) \mid t \in GF(q^2), u + u^q = -N_{r,\bar{r}}tt^q\},$$

если $\Psi_i = \{r, \bar{r}, r + \bar{r}\}$ имеет тип A_2 (при этом $r \neq \bar{r}$ и $r + \bar{r} \in \Phi(\overline{G})$). Далее, если $h(\chi)$ — элемент из группы H, то справедливы следующие равенства (см. [12, стр. 263]):

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t),$$

если $r = \bar{r}$ и $\Psi_i = \{r\}$ имеет тип A_1;

$$h(\chi)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t)x_{\bar{r}}(\chi(\bar{r})t^q),$$

если $r \neq \bar{r}$, $r + \bar{r} \notin \Phi(\overline{G})$ и $\Psi_i = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$;

$$h(\chi)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t)x_{\bar{r}}(\chi(\bar{r})t^q)x_{r+\bar{r}}(\chi(r+\bar{r})u),$$

если $r \neq \bar{r}$, $r + \bar{r} \in \Phi(\overline{G})$ и $\Psi_i = \{r, \bar{r}, r + \bar{r}\}$ имеет тип A_2.

Пусть u — нетривиальный элемент из $C_U(Q)$. Тогда u содержит нетривиальный множитель из X_{Ψ_i} для некоторого i. В силу единственности разложения в виде произведения $\prod_i X_{\Psi_i}$ (см. [12, Предложение 13.6.1]) можно считать, что $u \in X_\Psi$.

Предположим, что Ψ имеет тип A_1, т. е. $u = x_r(t)$, $t \in GF(q)$, $r = \bar{r}$. Ввиду леммы Хартли-Шута 3.2 для любого $s \in GF(q)$ существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = s$. Возьмем $s = -1$. Тогда существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = -1$. Поскольку $h(\chi)^2 = h(\chi^2)$ (см. формулу на стр. 98 из [12]), то мы имеем, что $\chi^2(r) = 1$, т. е. $|h(\chi)^2| < |h(\chi)|$. Значит, порядок $|h(\chi)|$ четен и можно записать $h(\chi) = h_2 \cdot h_{2'} = h(\chi_1) \cdot h(\chi_2)$ — разложение элемента $h(\chi)$ в виде произведение его 2- и $2'$- частей. Далее, $\chi(r) = \chi_1(r) \cdot \chi_2(r)$, следовательно, $\chi_1(r) = -1$ и $\chi_2(r) = 1$. Таким образом, $h(\chi_1)x_r(t)h(\chi_1)^{-1} = x_r(-t) \neq x_r(t)$. Значит, случай $u = x_r(t)$ и $\Psi = \{r\}$ имеет тип A_1 невозможен.

Предположим, что $\Psi = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$. По лемме Хартли-Шута 3.2 для любого $s \in GF(q^2)$ существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = s^2$. Поскольку существует такой $s \in GF(q^2)$, что $s^2 = -1$, то существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = -1$. Как и раньше $h(\chi)$ представим в виде $h(\chi_1) \cdot h(\chi_2)$ — произведения своих 2- и $2'$- частей. Тогда $\chi_1(r) = -1$, следовательно

$$h(\chi_1)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)h(\chi_1)^{-1} = x_r(-t)x_{\bar{r}}(-t^q) \neq x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q).$$

Таким образом, случай $u = x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)$ и $\Psi = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$ невозможен.

Предположим, наконец, что $\Psi = \{r, \bar{r}, r + \bar{r}\}$ имеет тип A_2. По лемме Хартли-Шута 3.2 для любого $s \in GF(q^2)$ существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = s^3$. Выберем $s = -1$, тогда существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = -1$. Вновь $h(\chi) = h(\chi_1) \cdot h(\chi_2)$ представим в виде произведения своих 2- и $2'$- частей и $\chi_1(r) \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} h(\chi_1)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u)h(\chi_1)^{-1} = \\ x_r(-t)x_{\bar{r}}(\chi_1(-t^q)x_{r+\bar{r}}(\chi_1(r+\bar{r})u) \neq \\ x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u) \end{aligned}$$

при $t \neq 0$. Если $t = 0$, то выберем s так, что $s^2 = -1$. Тогда $\chi_1(r + \bar{r}) = -1$ и, как и выше, мы получаем неравенство. Значит, и этот последний случай невозможен.

Используя лемму Хартли-Шута 3.2, аналогичные рассуждения доказывают лемму и в оставшихся случаях $G \simeq {}^3D_4(q^3)$, $G \simeq G_2(q)$ и $G \simeq F_4(q)$. Нам в дальнейших рассуждениях не потребуется применять лемму 3.3 для этих групп, поэтому мы не приводим для них подробного доказательства. □

Лемма 3.4. *Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = G$ — каноническая присоединенная конечная группа лиева типа над полем нечетной характеристики p и -1 не является квадратом в базовом поле группы G. Предположим, что корневая система Φ группы $\overline{G}$ равна C_n. Пусть U — максимальная унипотентная подгруппа группы G, H — подгруппа Картана группы G, нормализующая U, и Q — силовская 2-подгруппа группы H. Тогда $C_U(Q) = \langle X_r \mid r$ является длинным корнем$\rangle$.*

Доказательство. Если r — короткий корень, то существует корень s, удовлетворяющий условию $< s, r >= 1$. Таким образом, $x_r(t)^{h_s(-1)} = x_r((-1)^{<s,r>}t) = x_r(-t)$ (см. [12, предложение 6.4.1]). Следовательно, если $x \in C_U(Q)$ и $x_r(t)$ — нетривиальный множитель в разложении (1) элемента x, то r является длинным корнем. Далее, если r является длинным корнем, то для любого корня s либо $| < s, r > | = 2$, либо $< s, r >= 0$, т. е. $x_r(t)^{h_s(-1)} = x_r(t)$. При выполнении условия, что -1 не является квадратом в базовом поле группы G (т. е. в поле $GF(q)$) мы получаем, что $q \equiv -1 \pmod 4$, поэтому $\langle h_s(-1) \mid s \in \Phi\rangle = Q$, откуда следует лемма. □

Лемма 3.5. *Пусть $G = PSp_{2n}(q)$ — простая каноническая группа лиева типа, J — подмножество фундаментальных корней, содержащее длинный фундаментальный корень r_n, P_J — параболическая подгруппа, порожденная подгруппой Бореля B и группами X_r при $-r \in J$, L — фактор Леви подгруппы P_J. Обозначим через S квазипростую нормальную подгруппу группы L, изоморфную $Sp_{2k}(q)$ (она всегда существует, поскольку $r_n \in J$). Тогда $Aut_L(S/Z(S)) = S/Z(S)$.*

Доказательство. Данное утверждение известно, оно доказано, например, в неопубликованной работе Н.А.Вавилова. Мы приведем здесь доказательство для полноты изложения. Как мы отмечали выше, L является редуктивной подгруппой максимального ранга группы G, и потому справедливы включения $S/Z(S) \leq \mathrm{Aut}_L(S/Z(S)) \leq \widehat{S/Z(S)}$. Поскольку $|\widehat{C_n(q)} : C_n(q)| = (2, q-1)$, то для четного q утверждение очевидно. Если же q нечетно, то для $\mathrm{Aut}_L(S/Z(S))$ могут быть выполнены лишь две возможности: либо $\mathrm{Aut}_L(S/Z(S)) = S/Z(S)$, либо $\mathrm{Aut}_L(S/Z(S)) = \widehat{S/Z(S)}$. Покажем, что второе равенство невозможно.

В наших обозначениях фундаментальные корни корневой системы группы S — это корни $r_{n-k+1}, \ldots, r_n$. Если выполнено равенство $\mathrm{Aut}_L(S/Z(S)) = \widehat{S/Z(S)}$, то существуют такие элементы $s_1, \ldots, s_k$ решетки

$\mathbb{Z}\Phi = \mathbb{Z}C_n$, что

$$< s_i, r_{n-k+j} >= \frac{(s_i, r_{n-k+j})}{(s_i, s_i)} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

(Они порождают решетку фундаментальных весов и, таким образом, позволяют получить все диагональные автоморфизмы группы S.) Но для любого корня r из C_n мы имеем, что либо $< r, r_n >= 0$, либо $< r, r_n >= \pm 2$, т. е. для любого элемента $s \in \mathbb{Z}\Phi$ число $< s, r_n >$ четно, в частности, отлично от 1. Следовательно, такого набора элементов $s_1, \dots, s_k$ не существует. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть G — конечная группа лиева типа над полем нечетной характеристики и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Тогда если G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**, *то любая группа L, для которой справедливо $G \leq L \leq \overline{G}_\sigma$ удовлетворяет* **(ESyl2)**.

Доказательство. Пусть Q — силовская 2-подгруппа группы $\overline{G}_\sigma$ и $Q^0 = O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \cap Q$ — силовская 2-подгруппа группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Ясно, что если $N_{\overline{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\overline{G}_\sigma}(Q)$, то утверждение леммы справедливо. Ввиду [25, теорема 1], если $\overline{G}_\sigma$ — классическая группа, то равенство $N_{\overline{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\overline{G}_\sigma}(Q)$ может не выполняться лишь в том случае, когда корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип A_1 или C_n. Если корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип A_1 или C_n, то $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 2$ и утверждение леммы следует из леммы 2.9.

Предположим теперь, что G — группа исключительного типа. Если $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, то утверждение леммы, очевидно, справедливо. Поэтому равенство $N_{\overline{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\overline{G}_\sigma}(Q)$, возможно, не выполняется лишь в том случае, когда корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип E_6 или E_7. Если корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип E_7, то $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 2$ и утверждение леммы следует из леммы 2.9.

Предположим, что корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип E_6. Тогда либо $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, либо $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 3$. В первом случае доказывать нечего, поэтому предположим, что $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 3$. Поскольку группа G совпадает либо с $\overline{G}_\sigma$, либо с $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, и поскольку в том случае, если $G = \overline{G}_\sigma$ доказывать нечего, можно считать, что $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Ввиду [18, теорема 4.10.2] существует такой максимальный тор T группы $\overline{G}_\sigma$, что Q содержится в $N(\overline{G}_\sigma, T)$. Поскольку $|\overline{G}_\sigma : G| = 3$, то $Q = Q^0 \leq N(G, T \cap G)$. Ввиду [26, теорема 6] справедливо равенство $N_G(Q) = Q \times R^0$, где $R^0 \leq T$ — циклическая группа нечетного порядка. Далее, поскольку $\overline{G}_\sigma = TG$, то $N_{\overline{G}_\sigma}(Q) = \langle N_T(Q), N_G(Q) \rangle$. Действительно, $N(G, T \cap G)/(T \cap G) \simeq N(G, T)/T$. Следовательно, силовская 2-подгруппа QT/T группы $N(G, T)/T$ совпадает со своим нормализатором. Поскольку факторгруппа $\overline{G}_\sigma/G$ циклическая порядка 3, то $N_{\overline{G}_\sigma}(Q) = \langle tg, N_G(Q) \rangle$, где $t \in T$ и $g \in G$. Кроме того, поскольку $|\overline{G}_\sigma : G| = 3$, можно считать, что tg является элементом порядка 3^k для некоторого $k > 0$. Так как $t \in T \leq N(\overline{G}_\sigma, T)$, то $Q^t \leq N(G, T \cap G)$. Значит, существует элемент $g_1 \in N(G, T \cap G)$ такой, что $Q^t = Q^{g_1^{-1}}$. Поэтому можно считать, что $tg = tg_1 \in N(\overline{G}_\sigma, T)$. При естественном эпиморфизме $\pi : N(\overline{G}_\sigma, T) \to N(\overline{G}_\sigma, T)/T$ образ $N_{N(\overline{G}_\sigma, T)}(Q)$ совпадает с Q. Значит, $(tg)^\pi = e$, поэтому $tg \in T$. Таким образом, любой элемент нечетного порядка группы $\overline{G}_\sigma$, нормализующий Q, лежит в T. Поскольку T — тор, то T — абелева группа, значит, множество элементов нечетного порядка группы $N_{\overline{G}_\sigma}(Q)$ образует нормальную подгруппу R группы $N_{\overline{G}_\sigma}(Q)$. Следовательно, $N_{\overline{G}_\sigma}(Q) = Q \times R$, т. е. $\overline{G}_\sigma$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** ☐

Следующая лемма немедленно вытекает из [25, теорема 1].

Лемма 3.7. *Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = G$ — каноническая конечная группа лиева типа и $\overline{G}$ либо имеет тип A_1, либо имеет тип C_n, p нечетно, $q = p^\alpha$ — порядок базового поля группы G. Тогда G удовлетворяет условию* **(ESyl2)** *в том и только в том случае, если $q \equiv \pm 1 \pmod 8$.*

Отметим, что лемма 3.6 вместе с [25, теорема 1] и [26, теорема 6] влечет, что любая группа лиева типа над полем нечетной характеристики, отличная от группы Ри и групп из леммы 3.7, удовлетворяет **(ESyl2)**.

Лемма 3.8. *Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ — конечная присоединенная группа лиева типа с базовым полем характеристики p и порядка q. Предположим также, что группа $O^{p'}(G)$ не изоморфна группам ${}^2D_{2n}(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^2F_4(2^{2n+1})$. Тогда существует такой максимальный σ-инвариантный тор $\overline{T}$ группы $\overline{G}$, что*

(а) *$(N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T})_\sigma \simeq (N_{\overline{G}}(\overline{T}))_\sigma/(\overline{T}_\sigma) = N(\overline{G}_\sigma, \overline{T}_\sigma)/\overline{T}_\sigma \simeq W$, где W — группа Вейля группы $\overline{G}$;*

(б) *если r — нечетный простой делитель числа $q - (\varepsilon 1)$, где $\varepsilon = +$, если G расщепленная и $\varepsilon = -$, если G скрученная, то $N(\overline{G}_\sigma, \overline{T}_\sigma)$ содержит силовскую r-подгруппу группы $\overline{G}_\sigma$;*

(в) *если r — простой делитель числа $q - (\varepsilon 1)$, и s — такой элемент порядка r группы G, что $C_{\overline{G}}(s)$ связен, то, с точностью до сопряжения элементом из G, элемент s содержится в $T = \overline{T}_\sigma \cap G$;*

Тор $\overline{T}$ единственный с точностью до сопряжения в $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ и $|\overline{T}_\sigma| = (q - \varepsilon 1)^n$, где n — ранг группы $\overline{G}$.

Доказательство. Поскольку для любого максимального тора T группы $\overline{G}_\sigma$ выполнено равенство $\overline{G}_\sigma = TO^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, без потери общности мы можем предполагать, что $G = \overline{G}_\sigma$. Если G расщепленная, то лемма легко доказывается. В этом случае $\overline{T}$ является таким максимальным тором, что $\overline{T}_\sigma$ —

подгруппа Картана группы $\overline{G}_\sigma$ (т. е. $\overline{T}$ является максимальным расщепленным тором) и (а) очевиден. Пункт (б) следует из [29, (10.1)]. Кроме того, из [29, (10.2)] следует, что порядок тора $\overline{T}_\sigma$ определен единственным образом и равен $(q-1)^n$, где n — ранг группы $\overline{G}$. По [27, F, §6] выполнено, что любой элемент порядка r группы $\overline{T}$ содержится в $\overline{G}_\sigma$. Далее, существует такой $g \in \overline{G}$, что $s^g \in \overline{T}$, значит, $s^g \in G$. В силу связности централизатора элемента s, элементы s и s^g сопряжены в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в G, поэтому s и s^g сопряжены в G, откуда следует (в). Информация о классах максимальных торов, данная в [27, G] и [28], влечет, что, с точностью до сопряжения элементом из G, существует единственный тор $\overline{T}$ такой, что $|\overline{T}_\sigma| = (q-1)^n$.

Предположим, что $O^{p'}(G) \simeq {}^2A_n(q^2)$. Тогда $\overline{T}$ является таким максимальным тором, что $|\overline{T}_\sigma| = (q+1)^n$. Отметим, что тор $\overline{T}_\sigma$ получается из максимального расщепленного тора скручиванием элементом $w_0\sigma$. Непосредственные вычисления, с использованием [15, предложение 3.3.6] показывают, что группа $N(\overline{G}_\sigma, \overline{T}_\sigma)/\overline{T}_\sigma$ изоморфна группе $W(\overline{G})$, которая в свою очередь изоморфна Sym_{n+1}. Единственность следует из [16, предложение 8]. Пункт (б) следует из [29, (10.1)]. Для доказательства пункта (в) покажем сначала, что любой элемент порядка r из $\overline{T}$ лежит в G. Предположим, что t — элемент порядка r в $\overline{T}$ (напомним, что в этом случае r делит $q+1$). Пусть $\overline{H}$ — σ-инвариантный максимальный расщепленный тор группы $\overline{G}$. Тор $\overline{T}_\sigma$ получен из $\overline{H}$ «скручиванием» элементом $w_0\sigma$, где $w_0 \in W(\overline{G})$ — единственный элемент, отображающий положительные корни в отрицательные и $\overline{T}_\sigma \simeq \overline{H}_{\sigma w_0}$. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — множество фундаментальных корней корневой системы A_n. Тогда t, как элемент группы $\overline{H}$, может быть записан как $h_{r_1}(\zeta_1) \cdot \ldots \cdot h_{r_n}(\zeta_n)$. Далее, для любого i, мы имеем $\sigma w_0 : h_{r_i}(\lambda) \mapsto h_{-r_i}(\lambda^q) = h_{r_i}(\lambda^{-q})$, т. е. $t^{\sigma w_0} = t^{-q}$. Поскольку r делит $q+1$, мы получаем, что $t^{q+1} = e$, т. е., $t = t^{-q}$. Значит, $t^{\sigma w_0} = t$ и $t \in \overline{T}_\sigma$. Далее, как и в нескрученном случае, существует такой элемент $g \in \overline{G}$, что $s^g \in \overline{T}$, следовательно, $s^g \in \overline{T}_\sigma$. В силу связности $C_{\overline{G}}(s)$, элементы s и s^g сопряжены в G.

Для $O^{p'}(G) = {}^2D_{2n+1}(q^2)$ мы берем $\overline{T}$ равным единственному (с точностью до сопряжения в G) максимальному тору, для которого порядок $|\overline{T}_\sigma|$ равен $(q+1)^{2n+1}$ (единственность следует из [16, предложение 10]), а для $O^{p'}(G) = {}^2E_6(q^2)$ мы берем $\overline{T}$ равным единственному (вновь с точностью до сопряжения в G) максимальному тору, для которого порядок $|\overline{T}_\sigma|$ равен $(q+1)^6$ (единственность тора следует из [17, таблица 1, стр. 128]). Как в случае $G = {}^2A_n(q^2)$ легко показать, что $\overline{T}$ удовлетворяет утверждениям (а), (б) и (в) леммы. □

Лемма 3.9. *Пусть G — конечная группа лиева типа и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \le G \le \overline{G}_\sigma$. Пусть s — регулярный полупростой элемент нечетного простого порядка r группы G. Тогда $N_G(C_{\overline{G}}(s)) \neq C_G(s)$.*

Доказательство. Ввиду [22, предложение 2.10] мы имеем, что факторгруппа $C_{\overline{G}}(s)/C_{\overline{G}}(s)^0$ изоморфна подгруппе группы $\Delta(\overline{G})$. Далее, если корневая система Φ группы $\overline{G}$ не равна либо A_n, либо E_6, то $|\Delta(\Phi)|$ является степенью 2. Поскольку $\Delta(\overline{G})$ является факторгруппой группы $\Delta(\Phi(\overline{G}))$, то лемма 3.1 влечет, что $C_{\overline{G}}(s) = C_{\overline{G}}(s)^0 = \overline{T}$ является максимальным тором и $C_G(s) = C_{\overline{G}}(s) \cap G = T$. Поскольку $N_G(T) \geq N(G,T) \neq T$, мы получаем утверждение леммы в этом случае. Таким образом, можно предполагать, что либо $\Phi = A_n$, либо $\Phi = E_6$.

Предположим сначала, что $\Phi = A_n$, т. е. $O^{p'}(G) = A_n^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$. Очевидно, что $T = C_{\overline{G}}(s)^0 \cap G$ является нормальной подгруппой группы $C_G(s)$, значит, $C_G(s) \leq N(G,T)$. Предположим, что $N_G(C_{\overline{G}}(s)) = C_G(s)$. Тогда $C_G(s) = N_{N(G,T)}(C_G(s))$ и $C_G(s)/T$ является самонормализуемой подгруппой группы $N(G,T)/T$. Как мы заметили выше, $C_G(s)/T$ изоморфна подгруппе группы $\Delta(A_n)$, т. е. является циклической. По лемме 3.1, мы также получаем, что $C_G(s)/T$ является r-группой, таким образом, $C_G(s)/T = \langle x \rangle$ для некоторого r-элемента $x \in N(G,T)/T$. Таким образом, $\langle x \rangle$ является картеровой подгруппой группы $N(G,T)/T$. Далее, ввиду [15, предложение 3.3.6], выполнено $N(G,T)/T \simeq C_{W(\overline{G})}(y)$ для некоторого $y \in W(\overline{G}) \simeq \mathrm{Sym}_{n+1}$. Ясно, что $C_{C_{W(\overline{G})}(y)}(x)$ содержит y. Таким образом, y должен быть r-элементом, в противном случае $N_{C_{W(\overline{G})}(y)}(\langle x \rangle)$ содержал бы элемент y порядка взаимно простого с r, т. е. $N_{C_{W(\overline{G})}(y)}(\langle x \rangle) \neq \langle x \rangle$. Противоречие с тем, что $\langle x \rangle$ есть картерова подгруппа группы $C_{W(\overline{G})}(y)$.

Далее пусть $y = \tau_1 \cdot \ldots$ — разложение элемента y в произведение независимых циклов и $l_1, \ldots$ — длины циклов $\tau_1, \ldots$ соответственно. Предположим сначала, что m_1 циклов имеют одинаковую длину l_1, m_2 имеют длину l_2 и т. д. Пусть $m_0 = n + 1 - (l_1 m_1 + \ldots + l_k m_k)$. Тогда

$$C_{W(\overline{G})}(y) \simeq \left(Z_{l_1} \wr \mathrm{Sym}_{m_1}\right) \times \ldots \times \left(Z_{l_k} \wr \mathrm{Sym}_{m_k}\right) \times \mathrm{Sym}_{m_0},$$

где Z_{l_i} — циклическая группа порядка l_i. Если $m_j > 1$ для некоторого $j \geqslant 0$, то существует такая нормальная подгруппа N группы $C_{W(\overline{G})}(y)$ что $C_{W(\overline{G})}(y)/N \simeq \mathrm{Sym}_{m_j} \neq \{e\}$. Ввиду таблиц [9, таблица] и [10, таблица] мы получаем, что картеровы подгруппы в группе S, удовлетворяющей условию $\mathrm{Alt}_\ell \leq S \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_\ell)$, сопряжены для всех $\ell \geqslant 5$. Таким образом, группы $C_{W(\overline{G})}(y)$, N удовлетворяют условию **(C)** и $\langle x \rangle$ — единственная, с точностью до сопряжения, картерова подгруппа в $C_{W(\overline{G})}(y)$. По лемме 2.3 мы получаем, что $\langle x \rangle$ отображается на картерову подгруппу группы $C_{W(\overline{G})}(y)/N \simeq \mathrm{Sym}_{m_j}$. Ввиду [2] только силовская 2-подгруппа группы Sym_{m_j} может быть картеровой подгруппой группы Sym_{m_j}. Противоречие с тем, что x является r-элементом и r нечетно.

Таким образом, мы можем предполагать, что $C_{W(\overline{G})}(y) \simeq (Z_{l_1} \times \ldots \times Z_{l_k})$ и $l_i \neq l_j$ если $i \neq j$. Из известного строения максимальных торов и их нормализаторов в группе $A_n^{\varepsilon}(q)$ (см., например, [16, предложения 7,8]) мы получаем строение групп T и $N(G,T)$, которое мы поясним с помощью матриц. Везде ниже группа $GL_n^{\varepsilon}(q)$ изоморфна

$GL_n(q)$, если $\varepsilon = +$ и изоморфна $GU_n(q)$, если $\varepsilon = -$. Для разложения $l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n+1$ в группе $GL^{\varepsilon}_{n+1}(q)$ рассмотрим группу L, состоящую из клеточно-диагональных матриц вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix},$$

где $A_i \in GL^{\varepsilon}_{l_i}(q)$. Тогда $L \simeq GL^{\varepsilon}_{l_1}(q) \times \ldots \times GL^{\varepsilon}_{l_k}(q)$. Обозначим для краткости $GL^{\varepsilon}_{l_i}(q)$ через G_i. В каждой из групп G_i рассмотрим цикл Зингера T_i. Хорошо известно, что $N_{G_i}(T_i)/T_i$ — циклическая группа порядка l_i и $N(G_i, T_i) = N_{G_i}(T_i)$. Существует такая подгруппа Z группы $Z(SL^{\varepsilon}_{n+1}(q))$, что $O^{p'}(G) \simeq SL^{\varepsilon}_{n+1}(q)/Z$. Тогда $T \simeq \big((T_1 \times \ldots \times T_k) \cap SL^{\varepsilon}_{n+1}(q)\big)/Z$ и $N(G,T) \simeq \big((N(G_1,T_1) \times \ldots \times N(G_k,T_k)) \cap SL^{\varepsilon}_{n+1}(q)\big)/Z$. Поскольку для любого цикла Зингера T_i группа $N(G_i,T_i)/T_i$ циклическая, мы можем предполагать, что $N(G,T) = C_G(s)$ и T является циклом Зингера, т. е. является циклической группой порядка $\frac{q^{n+1}-(\varepsilon 1)^{n+1}}{q-(\varepsilon 1)}$ и $n+1 = r^k$ для некоторого $k \geqslant 1$ (последнее равенство выполнено потому, что $N(G,T)/T$ является r-группой). Но $q^{r^k} \equiv q \pmod r$, следовательно, r делит $q-(\varepsilon 1)$. По лемме 3.8 мы получаем, что s лежит в $N(G,H)$, где H — такой максимальный тор, что факторгруппа $N(G,H)/H$ изоморфна Sym_{n+1} и $|H| = (q-\varepsilon 1)^n$. В частности, H не является циклом Зингера. Если $s \in H$, то это немедленно влечет противоречие с выбором s. Если $s \notin H$, то, поскольку порядок элемента s прост, пересечение $\langle s \rangle \cap H$ тривиально. Значит, относительно естественного гомоморфизма $N(G,H) \to N(G,H)/H \simeq \mathrm{Sym}_{n+1}$ элемент s отображается в элемент порядка r. Однако, в группе Sym_{n+1} любой элемент нечетного порядка сопряжен со своим обратным. Таким образом, существует 2-элемент z группы G, нормализующий, но нецентрализующий группу $\langle s \rangle$. Следовательно, $z \leq N_{\overline{G}}(C_{\overline{G}}(s)) \leq N_{\overline{G}}(C_{\overline{G}}(s)^0)$ и $|N(G,T)/T|$ делится на 2, что противоречит доказанному выше утверждению о том, что $N(G,T)/T$ является r-группой. Это последнее противоречие завершает разбор случая $\Phi(\overline{G}) = A_n$.

В оставшемся случае $\Phi = E_6$ легко проверить, что для любого $y \in W(E_6)$, группа $C_{W(E_6)}(y)$ не содержит картеровых подгрупп порядка 3. Действительно, если в $C_{W(E_6)}(y)$ есть картерова подгруппа порядка 3, то она порождается элементом y. Однако хорошо известно (и можно легко проверить с помощью [28, таблица 9]), что в $W(E_6)$ нет элементов порядка 3, централизатор которых также имеет порядок 3. Поскольку $|C_G(s)/T|$ делит 3 и группа $C_G(s)/T$ является картеровой подгруппой в $C_{W(E_6)}(y)$ для некоторого y, мы получаем противоречие. □

4 Полулинейные группы лиева типа

Теперь мы определим некоторые надгруппы конечных групп лиева типа. Сначала мы дадим более подробное описание отображения Фробениуса σ. Отметим, что все отображения, рассматриваемые в данном параграфе, являются автоморфизмами, если группу $\overline{G}$ рассматривать как абстрактную группу и эндоморфизмами, если ее рассматривать как алгебраическую группу. Поскольку мы используем отображения для построения связанных автоморфизмов в конечных группах и группах над алгебраически замкнутым полем, мы считаем уместным в данном параграфе называть все отображения автоморфизмами. Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа присоединенного типа над алгебраически замкнутым полем $\overline{\mathbb{F}}_p$ положительной характеристики p. Везде далее, если не оговорено противное, мы будем рассматривать группы присоединенного типа. Выберем подгруппу Бореля $\overline{B}$ группы $\overline{G}$, пусть $\overline{U} = R_u(\overline{B})$ — унипотентный радикал группы $\overline{B}$. Существует подгруппа Бореля $\overline{B}^-$, удовлетворяющая равенству $\overline{B} \cap \overline{B}^- = \overline{T}$, где $\overline{T}$ — максимальный тор группы $\overline{B}$ (значит, и группы $\overline{G}$). Пусть Φ — корневая система группы $\overline{G}$ и пусть $\{X_r \mid r \in \Phi^+\}$ — множество $\overline{T}$-инвариантных 1-мерных корневых подгрупп группы $\overline{U}$. Каждая X_r изоморфна аддитивной группе поля $\overline{\mathbb{F}}_p$, значит, любой элемент группы X_r можно записать как $x_r(t)$, где t — образ элемента $x_r(t)$ относительно этого изоморфизма. Обозначим через $\overline{U}^- = R_u(\overline{B}^-)$ унипотентный радикал группы $\overline{B}^-$. Как и выше, определим $\overline{T}$-инвариантные 1-мерные подгруппы $\{\overline{X}_r \mid r \in \Phi^-\}$ группы $\overline{U}^-$. Тогда $\overline{G} = \langle \overline{U}, \overline{U}^- \rangle$. Пусть $\bar{\varphi}$ — полевой автоморфизм группы $\overline{G}$ (как абстрактной группы) и $\bar{\gamma}$ — графовый автоморфизм группы $\overline{G}$. Известно, что $\bar{\varphi}$ можно выбрать так, что он действует по правилу $x_r(t)^{\bar{\varphi}} = x_r(t^p)$ (см., например, [12, 12.2] и [15, 1.7]). Ввиду [12, предложения 12.2.3 и 12.3.3], мы можем выбрать $\bar{\gamma}$ так, что он действует по правилу $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t)$, если Φ не содержит корней различной длины, и по правилу $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t^{\lambda_r})$ для подходящего $\lambda_r \in \{1, 2, 3\}$, если Φ содержит корни различной длины. Здесь $\bar{r}$ — это образ корня r относительно симметрии ρ (соответствующей автоморфизму $\bar{\gamma}$) корневой системы Φ. В обоих случаях мы можем записать $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t^{\lambda_r})$, где $\lambda_r \in \{1,2,3\}$. Из этих формул видно, что $\bar{\varphi} \cdot \bar{\gamma} = \bar{\gamma} \cdot \bar{\varphi}$. Пусть $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$ и $\overline{N} = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi, t \in \overline{\mathbb{F}}_p^*\rangle$. Пусть $h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$ и $\overline{H} = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi, t \in \overline{\mathbb{F}}_p^*\rangle$. Ввиду [12, главы 6 и 7], $\overline{H}$ есть максимальный тор группы $\overline{G}$, $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{H})$, и подгруппы $\overline{X}_r$ являются корневыми подгруппами относительно $\overline{H}$. Значит, мы можем заменить $\overline{T}$ на $\overline{H}$ и предполагать, что относительно нашего выбора тор $\overline{T}$ является $\bar{\varphi}$- и $\bar{\gamma}$- инвариантным. Более того, $\bar{\varphi}$ индуцирует тривиальный автоморфизм факторгруппы $\overline{N}/\overline{H}$.

Автоморфизм $\bar{\varphi}^k$, где $k \in \mathbb{N}$ называется *классическим автоморфизмом Фробениуса*. Мы будем называть автоморфизм σ *автоморфизмом Фробениуса*, если σ сопряжен относительно $\overline{G}$ с $\bar{\gamma}^\epsilon\bar{\varphi}^k, \epsilon \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}$. Из теоремы Ленга-Стейнберга [19, теорема 10.1] следует, что для любого $\bar{g} \in \overline{G}$ элементы σ и $\sigma\bar{g}$ сопряжены относительно $\overline{G}$. Таким образом, ввиду [19, 11.6], мы имеем, что отображение Фробениуса, определенное в предыдущем параграфе, совпадает с автоморфизмом Фробениуса, определенным здесь.

Далее, зафиксируем $\overline{G}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\gamma}$, и $\sigma = \bar{\gamma}^\epsilon\bar{\varphi}^k$; и предположим, что $|\bar{\gamma}| \leqslant 2$, т. е. мы не рассматриваем тройственный автоморфизм группы $\overline{G}$ с корневой системой $\Phi(\overline{G}) = D_4$. Положим $B = \overline{B}_\sigma$, $H = \overline{H}_\sigma$, и $U = \overline{U}_\sigma$. Поскольку $\overline{B}, \overline{H}$, и $\overline{U}$ являются $\bar{\varphi}$- и $\bar{\gamma}$- инвариантными, они дают нам соответственно подгруппу Бореля, подгруппу Картана и максимальную унипотентную подгруппу (силовскую p-подгруппу) группы $\overline{G}_\sigma$ (см. более подробно [15, 1.7–1.9] или [18, глава 2]).

Предположим, что $\epsilon = 0$, т. е. $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ нескручена (расщепленная). Тогда $U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$, где X_r изоморфна аддитивной группе поля $GF(p^k) = GF(q)$ и любой элемент группы X_r может быть записан в виде $x_r(t), t \in GF(q)$. Положим также $U^- = \overline{U}_\sigma^-$. Как и для U, мы можем записать $U^- = \langle X_r \mid r \in \Phi^-\rangle$ и любой элемент группы X_r может быть записан в виде $x_r(t), t \in GF(q)$. Далее мы можем определить автоморфизм φ как ограничение автоморфизма $\bar{\varphi}$ на $\overline{G}_\sigma$ и автоморфизм γ как ограничение автоморфизма $\bar{\gamma}$ на $\overline{G}_\sigma$. По определению выполнены равенства $x_r(t)^\varphi = x_r(t^p)$ и $x_r(t)^\gamma = x_{\bar r}(t^{\lambda_r})$ для всех $r \in \Phi$ (смотри определение автоморфизма $\bar\gamma$ выше). Определим автоморфизм ζ группы $\overline{G}_\sigma$ равным $\zeta = \gamma^\varepsilon\varphi^\ell$, $\varphi^\ell \neq e$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, и автоморфизм $\bar\zeta$ группы $\overline{G}$ равным $\bar\zeta = \bar\gamma^\varepsilon\cdot\bar\varphi^\ell$. Выберем ζ-инвариантную подгруппу G, удовлетворяющую условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Заметим, что если корневая система Φ группы $\overline{G}$ не равна D_{2n}, то факторгруппа $\overline{G}_\sigma/(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$ циклическая. Таким образом, для большинства групп и автоморфизмов, кроме групп типа D_{2n} над полем нечетной характеристики, любая подгруппа G группы $\overline{G}_\sigma$, удовлетворяющая $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$, является γ- и φ- инвариантной. Определим ΓG как множество подгрупп вида $\langle G, \zeta g\rangle \leq \overline{G}_\sigma \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где $g \in \overline{G}_\sigma$, $\langle\zeta g\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq G$, и $\Gamma\overline{G}$ как множество подгрупп вида $\overline{G} \leftthreetimes \langle\bar\zeta\rangle$. Следуя [18, определение 2.5.13], будем называть автоморфизм ζ *полевым*, если $\varepsilon = 0$, т. е. $\zeta = \varphi^\ell$ и *графово-полевым* в остальных случаях (напомним, что мы предполагаем $\varphi^\ell \neq e$).

Предположим теперь, что $\epsilon = 1$, т. е. $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ скручена. Тогда $U = \overline{U}_\sigma$ и $U^- = \overline{U}^-_\sigma$. Определим φ на $U^\pm$ как сужение автоморфизма $\bar\varphi$ на $U^\pm$. Поскольку $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = \langle U^+, U^-\rangle$, мы получаем автоморфизм φ группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Рассмотрим $\zeta = \varphi^\ell \neq e$, и пусть G — ζ-инвариантная группа, удовлетворяющая условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Тогда $\bar\zeta = \bar\varphi^\ell$ является автоморфизмом группы $\overline{G}$. Определим ΓG как множество подгрупп вида $\langle G, \zeta g\rangle \leq \overline{G}_\sigma \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где $g \in \overline{G}_\sigma$, $\langle\zeta g\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq G$, и $\Gamma\overline{G}$ как множество подгрупп вида $\overline{G} \leftthreetimes \langle\bar\zeta\rangle$. Следуя [18, определение 2.5.13], мы будем говорить, что автоморфизм ζ является *полевым*, если $|\zeta|$ не делится на $|\gamma|$ (это определение будет использоваться и в том случае, если $|\gamma| = 3$ и $\overline{G}_\sigma \simeq {}^3D_4(q^3)$), и что автоморфизм ζ является *графовым* в остальных случаях.

Группы из множества ΓG, определенного выше, называются *полулинейными конечными группами лиева типа* (они называются также *полулинейными каноническими конечными группами лиева типа*, если $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$), а группы из множества $\Gamma\overline{G}$ называются *полулинейными алгебраическими группами*. Заметим, что $\Gamma\overline{G}$ нельзя определить без ΓG, поскольку нам необходимо знание того, что $\varphi^\ell \neq e$. Если G записана в обозначениях из [12], т. е. $O^{p'}(G) = G = A_n(q)$ или $O^{p'}(G) = G = {}^2A_n(q^2)$

и т. д., то мы будем записывать ΓG как $\Gamma A_n(q)$, $\Gamma^2 A_n(q^2)$, и т. д.

Рассмотрим $A \in \Gamma G$ и $x \in A \setminus G$. Тогда $x = \zeta^k y$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $y \in \overline{G}_\sigma$. Определим $\bar{x}$ равным $\bar{\zeta}^k y$. Обратно, если $\bar{x} = \bar{\zeta}^k y$ для некоторого $y \in \overline{G}_\sigma$, $\zeta^k \neq e$ и $\langle \zeta^k y\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq G$, определим x равным $\zeta^k y$. Заметим, что нам не нужно предполагать, что $\bar{x} \notin \overline{G}$ поскольку $|\bar{\zeta}| = \infty$. Если $x \in G$, полагаем $\bar{x} = x$.

Лемма 4.1. *Во введенных выше обозначениях пусть X — подгруппа группы G. Тогда x нормализует X в том и только в том случае, когда $\bar{x}$ нормализует X как подгруппу группы $\overline{G}$.*

Доказательство. Поскольку ζ является ограничением автоморфизма $\bar{\zeta}$ на G наше утверждение тривиально. □

Пусть X_1 — подгруппа группы $A \in \Gamma G$. Тогда X_1 порождается нормальной подгруппой $X = X_1 \cap G$ и элементом $x = \zeta^k y$. Ввиду леммы 4.1, мы можем рассмотреть подгруппу $\overline{X}_1 = \langle \bar{x}, X\rangle$ группы $\overline{G} \leftthreetimes \langle\bar{\zeta}\rangle$. Далее, мы находим разумным объяснить, почему мы используем столь запутанные обозначения и определения. Мы имеем, что порядок элемента ζ всегда конечен, но порядок элемента $\bar{\zeta}$ всегда бесконечен. Таким образом, даже если $Z(G)$ тривиален, мы не можем рассматривать $G \leftthreetimes \langle\bar{\zeta}\rangle$ как подгруппу группы $\mathrm{Aut}(G)$. Следовательно, нам нужно определить каким-нибудь образом (один возможный способ только что дан) связь между элементами из $\mathrm{Aut}(G)$ и элементами из $\mathrm{Aut}(\overline{G})$ для того, чтобы использовать технику линейных алгебраических групп.

Пусть $\overline{R}$ — σ-инвариантный максимальный тор (соотв. редуктивная подгруппа максимального ранга, параболическая подгруппа) группы $\overline{G}$, и элемент $y \in N_{\overline{G}\leftthreetimes\langle\bar{\zeta}\rangle}(\overline{R})$, выбран так, что существует элемент $x \in \langle G, \zeta g\rangle$, удовлетворяющий равенству $y = \bar{x}$. Тогда $R_1 = \langle x, \overline{R} \cap G\rangle$ называется *максимальным тором* (соотв. *редуктивной подгруппой максимального ранга*, *параболической подгруппой*) группы $\langle G, \zeta g\rangle$.

Лемма 4.2. *Пусть $M = \langle x, X\rangle$, где $X = M \cap G \trianglelefteq M$ — такая подгруппа группы $\langle G, \zeta g\rangle$, что подгруппа $O_p(X)$ нетривиальна. Тогда существует такая σ- и $\bar{x}$- инвариантная параболическая подгруппа $\overline{P}$ группы $\overline{G}$, что $X \leq \overline{P}$ и $O_p(X) \leq R_u(\overline{P})$.*

Доказательство. Определим $U_0 = O_p(X)$, $N_0 = N_{\overline{G}}(U_0)$. Тогда $U_i = U_0R_u(N_{i-1})$ и $N_i = N_{\overline{G}}(U_i)$. Очевидно U_i, N_i являются $\bar{x}$- и σ- инвариантными для всех i. Ввиду [13, предложение 30.3], цепь подгрупп $N_0 \leq N_1 \leq \ldots \leq N_k \leq \ldots$ конечна и $\overline{P} = \cup_i N_i$ является собственной параболической подгруппой группы $\overline{G}$. Очевидно, что $\overline{P}$ является σ- и $\bar{x}$- инвариантной, $X \leq \overline{P}$ и $O_p(X) \leq R_u(\overline{P})$. □

Лемма 4.3. *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем нечетной характеристики p. Предположим, что $\overline{G}$ и σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть ψ — полевой автоморфизм нечетного порядка группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.*

Тогда ψ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G, и существует такая ψ-инвариантная подгруппа Картана H, что ψ централизует силовскую 2-подгруппу группы H. Более того, если $G \not\simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2D_{2n}(q^2)$, то существует такой ψ-инвариантный максимальный тор T группы G, что ψ централизует силовскую 2-подгруппу тора T, и факторгруппа $N(G,T)/T$ изоморфна $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму лишь для случая $G = \overline{G}_\sigma$. Предположим, что $|\psi| = k$. Пусть $GF(q)$ — базовое поле группы G. Тогда $q = p^\alpha$ и $\alpha = k \cdot m$. Далее, $|G|$ можно записать в виде $|G| = q^N(q^{m_1} + \varepsilon_1 1) \cdot \ldots \cdot (q^{m_n} + \varepsilon_n 1)$ для некоторого N, где n — это ранг группы $\overline{G}$, $\varepsilon_i = \pm$ (см. [12, теоремы 9.4.10 и 14.3.1]). Аналогично мы имеем, что $|G_\psi| = (p^m)^N((p^m)^{m_1} + \varepsilon_1 1) \cdot \ldots \cdot ((p^m)^{m_n} + \varepsilon_n 1)$. Так как k нечетно, то $((p^{km})^{m_i} + \varepsilon_i 1)_2 = ((p^m)^{m_i} + \varepsilon_i 1)_2$ для всех i, т. е. $|G|_2 = |G_\psi|_2$ и силовская 2-подгруппа группы G_ψ является силовской 2-подгруппой группы G. В силу [18, предложение 2.5.17] существует такой автоморфизм ψ_1 группы $\overline{G}$, что $\sigma = \psi_1^k$ и ψ совпадает с ограничением ψ_1 на $\overline{G}_\sigma$. Отметим, что ψ_1, вообще говоря, не совпадает с автоморфизмом $\bar{\psi}$, определенным выше. Рассмотрим максимальный расщепленный тор $\overline{H}_{\psi_1}$ группы $\overline{G}_{\psi_1}$. Тогда $H = \overline{H}_\sigma$ — ψ-инвариантная подгруппа Картана группы G. Поскольку $|H| = (q^{k_1} + \varepsilon_1 1) \cdot \ldots \cdot (q^{k_l} + \varepsilon_l 1)$, где $\varepsilon_i = \pm$, равенство $|H|_2 = |H_\psi|_2$ доказывается аналогично.

Предположим теперь, что $G \not\simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2D_{2n}(q^2)$. По лемме 3.8 существует такой максимальный тор T группы G_ψ, что $N(G_\psi,T)/T \simeq N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ и $|T_\psi| = (p^m - \varepsilon 1)^n$. Поскольку $|\psi|$ нечетен и $\overline{T}_{\psi_1}$ получен скручиванием максимального расщепленного тора $\overline{H}$ с помощью элемента w_0, то $\overline{T}_\sigma$ также получен скручиванием максимального расщепленного тора $\overline{H}$ элементом w_0 (см. доказательство леммы 3.6). Следовательно, $|\overline{T}_\sigma| = (q - \varepsilon 1)^n$, $|\overline{T}_{\psi_1}| = (p^m - \varepsilon 1)^n$, значит $|\overline{T}_\sigma|_2 = |T|_2 = |T_\psi|_2$. □

Лемма 4.4. [29, (7-2)] *Пусть $\overline{G}$ — связная простая линейная алгебраическая группа присоединенного типа над полем характеристики p, σ — отображение Фробениуса группы $\overline{G}$ и $G = \overline{G}_\sigma$ — конечная группа лиева типа. Пусть φ — полевой или графово-полевой автоморфизм группы G и φ' — такой элемент из $(G \leftthreetimes \langle\varphi\rangle) \setminus G$, что $|\varphi'| = |\varphi|$ и $G \leftthreetimes \langle\varphi\rangle = \langle G, \varphi' \rangle =$*

$G \leftthreetimes \langle\varphi'\rangle$. Тогда существует такой элемент $g \in G$, что $\langle\varphi\rangle^g = \langle\varphi'\rangle$. В частности, если $G/O^{p'}(G)$ — 2-группа и φ нечетного порядка, то g можно выбрать в $O^{p'}(G)$.

Лемма 4.5. *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем нечетной характеристики, $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$ и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть A — такая подгруппа группы $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$, что $A \cap \overline{G}_\sigma = G$. Если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$, предположим также, что A содержится в группе, порожденной внутренне-диагональными и полевыми автоморфизмами и графовым автоморфизмом порядка 2. Тогда A удовлетворяет условию* **(ESyl2)** *в том и только в том случае, если G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**.

Доказательство. Предположим, что G удовлетворяет условию **(ESyl2)**. В условиях леммы факторгруппа A/G абелева, поэтому $A/G = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$, где $\overline{A}_1$ — холлова $2'$-подгруппа группы A/G и $\overline{A}_2$ — силовская 2-подгруппа группы A/G. Обозначим через A_1 полный прообраз группы $\overline{A}_1$ в A. Если A_1 удовлетворяет условию **(ESyl2)**, то по лемме 2.9 группа A также удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Таким образом, можно считать, что порядок $|A/G|$ нечетен. Поскольку мы предполагаем, что графовый автоморфизм порядка 3 не содержится в A, то группа A/G циклическая, значит $A = \langle G, \psi g\rangle$, где ψ — полевой автоморфизм нечетного порядка, а $g \in \overline{G}_\sigma$. Поскольку $|A : G| = |\psi|$ нечетен, можно считать, что $|\psi g|$ также нечетен. В силу леммы 4.3, ψ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $\overline{G}_\sigma$, следовательно, g — элемент нечетного порядка. Далее факторгруппа $\overline{G}_\sigma/G$ абелева и может быть представлена в виде $\overline{L} \times \overline{Q}$, где $\overline{L}$ — холлова $2'$-подгруппа группы $\overline{G}_\sigma/G$ и $\overline{Q}$ — силовская 2-подгруппа группы $\overline{G}_\sigma/G$. Пусть L — полный прообраз группы $\overline{L}$ в $\overline{G}_\sigma$ относительно естественного гомоморфизма. Тогда $g \in L$. Рассмотрим группу $L \leftthreetimes \langle\psi\rangle \geq A$. По построению, индекс $|L \leftthreetimes \langle\psi\rangle : A| = |L : G|$ нечетен. В силу леммы 3.6 группа L удовлетворяет условию **(ESyl2)**. По лемме 4.3 полевой автоморфизм ψ централизует силовскую 2-подгруппу Q группы L. Таким образом,

$$N_{L\leftthreetimes\langle\psi\rangle}(Q) = N_L(Q) \times \langle\psi\rangle = QC_L(Q) \times \langle\psi\rangle = QC_{L\leftthreetimes\langle\psi\rangle}(Q),$$

т. е. группа $L\leftthreetimes\langle\psi\rangle$ удовлетворяет **(ESyl2)**. Поскольку $|L\leftthreetimes\langle\psi\rangle : A|$ нечетен, то A удовлетворяет **(ESyl2)**.

Предположим теперь что A удовлетворяет **(ESyl2)**. Если G не удовлетворяет **(ESyl2)**, то [25, теорема 1] и [26, теорема 6] влекут, что корневая система группы $\overline{G}$ либо имеет тип A_1, либо имеет тип C_n. В обоих случаях группа $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))/\overline{G}_\sigma$ циклическая и порождается полевым автоморфизмом φ. Кроме того, из [25, теорема 1] следует, что порядок базового поля (которое совпадает с полем определения в этом случае, поскольку группа G не является скрученной) равен $q = p^t$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Следовательно, t нечетно и, значит, $|\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))/\overline{G}_\sigma|$ нечетен. Поэтому $|A : G|$ нечетен, значит, G удовлетворяет **(ESyl2)**. □

Следующая лемма для классических групп известна (см., например, [30]).

Лемма 4.6. *Пусть G — конечная присоединенная расщепленная группа лиева типа, $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Предположим, что τ является графовым автоморфизмом порядка 2 группы $O^{p'}(G)$. Тогда любой полупростой элемент $s \in G$ сопряжен со своим обратным в группе $\langle O^{p'}(\overline{G}_\sigma), \tau a\rangle$, где a — произвольный элемент из $\overline{G}_\sigma$.*

Доказательство. Если $\Phi(\overline{G})$ не имеет тип A_n, D_{2n+1}, E_6, то лемма следует из [10, лемма 2.2], таким образом, нам нужно рассматривать группы типа A_n, D_{2n+1}, E_6. Обозначим через $\bar\tau$ графовый автоморфизм группы $\overline{G}$ такой, что $\bar\tau|_G = \tau$. Пусть $\overline{T}$ — такой максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$, что $\overline{T}_\sigma \cap G$ является подгруппой Картана группы G. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — фундаментальные корни корневой системы $\Phi(\overline{G})$ и ρ — симметрия, соответствующая $\bar\tau$. Обозначим r_i^ρ через $\bar r_i$. Тогда $\overline{T} = \langle h_{r_i}(t_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ t_i \neq 0\rangle$ и $h_{r_i}(t_i)^{\bar\tau} = h_{\bar r_i}(t_i)$. Обозначим через W группу Вейля группы $\overline{G}$. Пусть w_0 — единственный элемент группы W, отображающий все положительные корни в отрицательные корни, и пусть n_0 — его прообраз в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ относительно естественного гомоморфизма $N_{\overline{G}}(\overline{T}) \to N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T} \simeq W$. Поскольку σ действует тривиально на $W = N(G,T)/T$ (см. лемму 3.8), мы можем выбрать $n_0 \in G$, т. е. $n_0^\sigma = n_0$. Тогда для всех r_i и t мы получаем, что

$$h_{r_i}(t)^{n_0\bar\tau} = h_{r_i^{w_0\rho}}(t) = h_{-r_i}(t) = h_{r_i}(t^{-1}).$$

Таким образом, $x^{n_0\bar\tau} = x^{-1}$ для всех $x \in \overline{T}$.

Далее пусть s — полупростой элемент группы G. Тогда существует максимальный σ-инвариантный тор $\overline{S}$ группы $\overline{G}$, содержащий s. Поскольку все максимальные торы группы $\overline{G}$ сопряжены, мы получаем, что существует такой $g \in \overline{G}$, что $\overline{S}^g = \overline{T}$. Так как $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)\overline{T}_\sigma$, то можно считать, что $a \in \overline{T}_\sigma$. Следовательно, $s^{gn_0\bar\tau ag^{-1}} = s^{-1}$. Поскольку $n_0^\sigma = n_0$ и $\bar\tau^\sigma = \bar\tau$, мы имеем, что $(gn_0\bar\tau ag^{-1})^\sigma = g^\sigma n_0\bar\tau a(g^{-1})^\sigma$. Более того, поскольку $\overline{S}$ является σ-инвариантным, то для любого $x \in \overline{S}$ выполнено $x^{gn_0\bar\tau ag^{-1}} = x^{g^\sigma n_0\bar\tau a(g^{-1})^\sigma} = x^{-1}$, т. е. $gn_0\bar\tau ag^{-1}\overline{S} = g^\sigma n_0\bar\tau a(g^{-1})^\sigma\overline{S}$. В частности, существует такой элемент $t \in \overline{S}$, что $gn_0\bar\tau ag^{-1}t = g^\sigma n_0\bar\tau a(g^{-1})^\sigma$. Ввиду теоремы Ленга-Стейнберга [19, теорема 10.1] существует такой элемент $y \in \overline{S}$, что $t = y \cdot (y^{-1})^\sigma$. Следовательно, $gn_0\bar\tau ag^{-1}y = (gn_0\bar\tau ag^{-1}y)^\sigma$, т. е. $gn_0\tau ag^{-1}y \in \overline{G}_\sigma \leftthreetimes \langle\tau\rangle$, и $s^{gn_0\tau ag^{-1}y} = s^{-1}$. Поскольку $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)\overline{S}_\sigma = \overline{G}_\sigma$, и подгруппа $\overline{S}_\sigma$ абелева, мы можем найти такой элемент $z \in \overline{S}_\sigma$, что $gn_0\tau ag^{-1}yz \in \langle O^{p'}(\overline{G}_\sigma), \tau a\rangle$. □

Лемма 4.7. *Пусть $\langle G, \zeta g\rangle$ — конечная полулинейная группа лиева типа и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть s — регулярный полупростой элемент нечетного простого порядка группы G. Тогда $N_{\langle G,\zeta g\rangle}(C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)) \neq C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)$.*

Доказательство. Так как элемент s полупрост, существует σ-инвариантный максимальный тор $\overline{S}$ группы $\overline{G}$, содержащий s. Поскольку $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)\overline{S}_\sigma$, то можно считать, что $g \in \overline{S}_\sigma$, т. е. элементы g и s перестановочны. Если $C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)G \neq \langle G,\zeta g\rangle$, то группу $\langle G,\zeta g\rangle$ можно заменить группой $C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)G$ и доказывать лемму для этой группы. Кроме того, если $C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s) = C_G(s)$, то лемма следует из леммы 3.9, поэтому можно считать, что ζ централизует s. Если либо группа G не является скрученной, либо $|\zeta|$ нечетен, то из [18, предложение 2.5.17] следует, что существует такой $\zeta_1 \in \mathrm{Aut}(\overline{G})$, что $\sigma = \zeta_1^k$ для некоторого $k > 0$ и ζ является ограничением автоморфизма ζ_1 на G. По лемме 3.9 существует элемент из $N_{G_{\zeta g}}(C_{\overline{G}}(s))$, не лежащий в $C_{G_{\zeta g}}(s)$, откуда следует лемма.

Предположим, что группа G является скрученной и $|\zeta|$ четен. Тогда $\sigma = \bar\gamma\bar\varphi^k$, $\bar\zeta = \bar\varphi^\ell$, где ℓ делит k. Следовательно, элемент s лежит в $\overline{G}_{\bar\gamma}$. В зависимости от корневой системы $\Phi(\overline{G})$, мы получаем, что $\overline{G}_{\bar\gamma}$ изоморфна простой алгебраической группе с корневой системой равной B_m (для некоторого $m > 1$), C_m (для некоторого $m > 2$), или F_4. В силу [10, лемма 2.2] элемент s сопряжен со своим обратным относительно $O^{p'}((\overline{G}_{\bar\gamma})_{\sigma\bar\zeta g}) \leq G_{\zeta g}$, значит $N_{\langle G,\zeta g\rangle}(C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)) \neq C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)$. □

Лемма 4.8. *Пусть $\langle G,\zeta g\rangle$ — конечная полулинейная группа лиева типа над полем характеристики p (мы не исключаем случая $\langle G,\zeta g\rangle = G$) и группа G является группой присоединенного типа (напомним, что $g \in \overline{G}_\sigma$, но необязательно $g \in G$). Предположим, что $B = U \rtimes H$, где H — подгруппа Картана группы G, есть ζg-инвариантная подгруппа Бореля группы G, и $\langle B,\zeta g\rangle$ содержит картерову подгруппу K группы $\langle G,\zeta g\rangle$. Предположим, что $K \cap U \neq \{e\}$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(а) *либо $\langle G,\zeta g\rangle = \langle {}^2A_2(2^{2t}),\zeta g\rangle$, либо $\langle G,\zeta g\rangle = {}^2\widehat{A_2(2^{2t})} \rtimes \langle\zeta\rangle$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен и не делится на 3, $C_G(\zeta) \simeq {}^2\widehat{A_2(2^2)}$, подгруппа $K \cap G$ абелева и имеет порядок $2 \cdot 3$;*

(б) *либо $\langle G,\zeta g\rangle = \langle {}^2A_2(2^{2t}),\zeta g\rangle$, либо $\langle G,\zeta g\rangle = {}^2\widehat{A_2(2^{2t})} \rtimes \langle\zeta\rangle$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен, $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ является силовской 2-подгруппой группы G_ζ;*

(в) *либо $\langle G,\zeta g\rangle = \langle A_2(2^{2t}),\zeta g\rangle$, либо $\langle G,\zeta g\rangle = \widehat{A_2(2^{2t})} \rtimes \langle\zeta\rangle$, ζ — графово-полевой автоморфизм порядка $2t$, t не делится на 3, и $C_G(\zeta) \simeq {}^2\widehat{A_2(2^2)}$, подгруппа $K \cap G$ абелева и имеет порядок $2^{|\zeta_{2'}|} \cdot 3$;*

(г) *$\langle G,\zeta g\rangle = \langle A_2(2^{2t}),\zeta g\rangle$, ζ — графово-полевой автоморфизм и $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}}$;*

(д) *группа G определена над $GF(2^t)$, $\langle G,\zeta g\rangle = G \rtimes \langle\zeta g\rangle$, ζ — полевой автоморфизм порядка t группы $O^{2'}(G)$, если группа $O^{2'}(G)$ расщеп-*

ленная или графовый автоморфизм порядка t, если группа $O^{2'}(G)$ скрученная, и, с точностью до сопряжения в G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta g \rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа группы $G_{(\zeta g)_{2'}}$;

(е) *группа G определена над $GF(2^t)$, $\langle G, \zeta g \rangle = G \leftthreetimes \langle \zeta g \rangle$, ζ — произведение полевого автоморфизма нечетного порядка t группы $O^{2'}(G)$ и графового автоморфизма порядка 2, ζ и ζg сопряжены относительно $\overline{G}_\sigma$, и, с точностью до сопряжения в G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta g \rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа группы $G_{(\zeta g)_{2'}}$;*

(ж) *$G/Z(G) \simeq \mathbf{P}SL_2(3^t)$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен (в частности, $\zeta \in \langle G, \zeta g \rangle$), и K содержит силовскую 3-подгруппу группы $G_{\zeta_{3'}}$;*

(з) *$\langle G, \zeta g \rangle = {}^2G_2(3^{2n+1}) \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, $|\zeta| = 2n+1$, $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, где Q имеет порядок 2 и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$.*

Отметим, что в каждом из пунктов (а)–(з) леммы картеровы подгруппы, имеющие указанное строение, существуют. Существование картеровых подгрупп в пунктах (а) и (в) следует из существования картеровой подгруппы порядка 6 в группе $\mathbf{P}GU_3(2)$ (см. [5]). Существование картеровых подгрупп в пунктах (б), (г)–(е) следует из того, что силовская 2-подгруппа в группе лиева типа, определенной над полем порядка 2, совпадает со своим нормализатором. Существование картеровых подгрупп в пункте (ж) следует из того факта, что силовская 3-подгруппа группы $\mathbf{P}SL_2(3)$ совпадает со своим нормализатором. Существование картеровой подгруппы, удовлетворяющей пункту (з) леммы, следует из существования картеровой подгруппы K порядка 6 в (непростой) группе ${}^2G_2(3)$. Существование картеровой подгруппы K порядка 6 в группе ${}^2G_2(3)$ следует из структурных результатов, приведенных в работах [31] и [32].

Доказательство. Если G является одной из групп $A_1(q)$, $G_2(q)$, $F_4(q)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$ или ${}^2F_4(2^{2n+1})$, то лемма следует из [9, таблица] или [10, таблица]. Если $\langle G, \zeta g \rangle = G$, то лемма следует из [6], [9] и [10]. Поэтому можно предполагать, что $\langle G, \zeta g \rangle \neq G$, т. е. что ζ является нетривиальным полевым, графово-полевым или графовым автоморфизмом. Если $\Phi(\overline{G}) = C_n$, то лемма следует из теоремы 5.1 ниже, в которой не используется лемма 4.8, поэтому мы предполагаем, что $\Phi(\overline{G}) \neq C_n$. Если $\Phi(\overline{G}) = D_4$ и либо графово-полевой автоморфизм ζ раскладывается в произведение полевого автоморфизма и графового автоморфизма порядка 3, либо $G \simeq {}^3D_4(q^3)$, то лемма следует из теоремы 6.1 ниже, в которой не используется лемма 4.8, поэтому мы предполагаем, что $\langle G, \zeta g \rangle$ лежит в группе A_1, определенной в теореме 6.1, и $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$. Поскольку мы будем использовать лемму 4.8 в доказательстве теоремы 7.1, после теорем 5.1 и 6.1, мы вправе сделать такие дополнительные предположения.

Предположим, что q нечетно и $\Phi(\overline{G})$ имеет один из следующих типов: A_n $(n \geqslant 2)$, D_n $(n \geqslant 4)$, B_n $(n \geqslant 3)$, E_6, E_7 или E_8. По лемме 2.3 мы имеем, что KU/U является картеровой подгруппой группы $\langle B, \zeta g\rangle/U \simeq \langle H, \zeta g\rangle$. Так как $\overline{G}_\sigma = G\overline{H}_\sigma$, где $\overline{H}$ — максимальный расщепленный тор группы $\overline{G}$ и $\overline{H}_\sigma \cap G = H$, то можно считать, что $g \in \overline{H}_\sigma$, в частности, g централизует H. Поэтому $H_\zeta \leq Z(\langle H, \zeta g\rangle)$, и мы получаем, с точностью до сопряжения в B, что $H_\zeta \leq K$. По лемме 4.3, автоморфизм $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу Q группы H. Таким образом, любой элемент нечетного порядка группы $\langle H, \zeta g\rangle$ централизует Q и лемма 2.5 влечет, что с точностью до сопряжения в B, справедливо $Q \leq K$. Из леммы 3.3 следует, что $C_U(Q) = \{e\}$; противоречие с нетривиальностью $K \cap U$.

Предположим, что $G \simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$ и $\langle G, \zeta g\rangle = G \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ (в этом случае $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = \overline{G}_\sigma$). Вновь по лемме 2.3 KU/U является картеровой подгруппой группы $(B \leftthreetimes \langle\zeta\rangle)/U \simeq H \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$. По [10, лемма 2.2] любой полупростой элемент группы G сопряжен со своим обратным. Так как неабелевы композиционные факторы централизатора любого полупростого элемента группы G могут быть изоморфны лишь группам $A_1(q)$, из [9, Таблица] следует, что централизатор любого полупростого элемента группы G удовлетворяет условию **(C)**. Поэтому лемма 2.4 влечет, что $KU/U \cap B/U$ является 2-группой. С другой стороны, $|H|_2 = 2$ и $KU/U \geq Z(B/U) \geq H_\zeta$, откуда $|H_\zeta| = 2$ и $|\zeta| = 2n+1$. Таким образом, $K \cap G = (K \cap U) \times \langle t\rangle$, где t — инволюция. Отсюда следует, что $K \cap U = C_G(t) \cap G_{\zeta_{3'}}$. Теперь структурные результаты из [31] и [32, теорема 1] влекут справедливость пункта (з) леммы.

Предположим теперь, что $q = 2^t$. Предположим сначала, что $\Phi(\overline{G})$ имеет один из типов A_n $(n \geqslant 2)$, D_n $(n \geqslant 4)$, B_n $(n \geqslant 3)$, E_6, E_7 или E_8, G расщепленная, и ζ является полевым автоморфизмом. Как и выше мы получаем, что $H_\zeta \leq K$ и $O^{2'}(G_\zeta)$ — расщепленная группа лиева типа с полем определения $q = 2^{t/|\zeta|}$. По лемме Хартли-Шута 3.2 для любого $r \in \Phi(\overline{G})$ и для любого $s \in GF(2^{t/|\zeta|})^*$ существует такой $h(\chi) \in H_\zeta \cap O^{2'}(G_\zeta)$, что $\chi(r) = s$. Рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3.3, влекут, что при $\frac{t}{|\zeta|} \neq 1$ справедливо $K \cap U \leq C_U(H_\zeta) = \{e\}$; противоречие. Значит, $|\zeta| = t$ и $H_\zeta = \{e\}$. Поскольку g можно выбрать в $\overline{H}_\sigma$ и $\langle\zeta g\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq \langle\zeta g\rangle \cap \overline{H}_\sigma \leq H_\zeta = \{e\}$, то $\langle\zeta g\rangle \cap \overline{G}_\sigma = \{e\}$. По лемме 4.4 элементы ζg и ζ сопряжены в $\overline{G}_\sigma$, откуда следует пункт (д) леммы.

Теперь предположим, что $\Phi(\overline{G})$ имеет один из типов A_n $(n \geqslant 3)$, D_n $(n \geqslant 4)$ или E_6, и либо ζ есть графово-полевой автоморфизм и G расщепленная, либо G скрученная. Пусть ρ — симметрия корневой системы $\Phi(\overline{G})$, соответствующая автоморфизму γ (напомним, что по определению $\zeta = \gamma^\varepsilon\varphi^\ell$), и $\bar{r}$ обозначает r^ρ для $r \in \Phi(\overline{G})$. Как и выше, можно доказать, что, с точностью до сопряжения, $H_\zeta \leq K$. Если $H_\zeta \neq \{e\}$, то по лемме Хартли-Шута 3.2 мы получаем, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $H_\zeta = \{e\}$, то либо группа G является скрученной и $|\zeta| = t$ что влечет утверждение (д) леммы; либо группа G является расщепленной, $|\zeta| = 2t$, в частности число t нечетно, что влечет пункт (е) леммы.

Предположим, что $O^{2'}(G) \simeq A_2(2^t)$, ζ — графово-полевой автоморфизм и t нечетно. Если $|\zeta| \neq 2t$, то рассуждения, использующие лемму Хартли-Шута 3.2, аналогичные доказательству леммы 2.4 показывают, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $|\zeta| = 2t$, то мы получаем пункт (е) леммы.

Предположим теперь, что $O^{2'}(G) \simeq A_2(2^{2t})$ и ζ — графово-полевой автоморфизм. Вновь при $|\zeta| \neq 2t$ из леммы Хартли-Шута 3.2 следует, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $|\zeta| = 2t$, то либо $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^2)$, либо $G_\zeta \simeq {}^2\widehat{A_2(2^2)}$. Если $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^2)$, то $H_\zeta = \{e\}$ и мы получаем утверждение (г) леммы. Если $G_\zeta \simeq {}^2\widehat{A_2(2^2)}$, то $|H_\zeta| = 3$, и поэтому $KU/U \cap HU/U$ является циклической группой $\langle y \rangle$ порядка $(2^{t_3}+1)_3 = 3^k$, где $3^{k-1} = t_3$. Если $k > 1$, то лемма Хартли-Шута 3.2 влечет, что $C_U(y) = \{e\}$, что невозможно. Таким образом, t не делится на 3 и $K \cap U$ содержится в централизаторе элемента x, порождающего H_ζ. Рассмотрим гомоморфизм $GL_3(2^{2t}) \to \mathbf{P}GL_3(2^{2t})$. Тогда некоторый прообраз элемента x подобен матрице

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

где λ — порождающий элемент мультипликативной группы поля $GF(2^2)$. Прообраз группы U сопряжен с множеством верхнетреугольных матриц, на диагонали которых стоят одинаковые элементы. Непосредственные вычисления показывают, что $C_U(x)$ изоморфна аддитивной группе поля $GF(2^{2t})$. Нильпотентность группы K влечет, что $K \cap U = (C_U(x))_{\zeta_{2'}}$, откуда следует пункт (в) леммы.

Предположим теперь, что $O^{2'}(G) \simeq {}^2A_2(2^{2t})$. По лемме 2.3 KU/U является картеровой подгруппой группы $\langle B, \zeta g \rangle / U \simeq \langle H, \zeta g \rangle$ и, как и выше, можно считать, что $H_\zeta \leq K$. Если $|\zeta| = 2t$, то $G_\zeta \simeq SL_2(2)$ и $H_\zeta = \{e\}$, откуда следует пункт (д) леммы. Предположим, что число t четно и $|\zeta| \leqslant t$. Тогда либо $O^{2'}(G_\zeta) \simeq SL_2(2^{2t/|\zeta|})$ (если порядок $|\zeta|$ четен), либо $O^{2'}(G_\zeta) \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$ (если порядок $|\zeta|$ нечетен, следовательно, $|\zeta| < t$). Очевидно, что H_ζ содержит такой элемент x, что $K \cap U \leq C_U(H_\zeta) = \{e\}$, и это дает противоречие с условием $K \cap U \neq \{e\}$. Если число t нечетно и $t \neq |\zeta|$, то $O^{2'}(G_\zeta) \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$, откуда следует, что H_ζ содержит такой элемент x, что $C_U(x) = \{e\}$. Если $|\zeta| = t$ и число t нечетно, то порядок $|KU/U \cap B/U|$ может делиться только на 3 (в противном случае из леммы Хартли-Шута 3.2 вновь следует, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$). Если $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$, то $H_\zeta = \{e\}$ и мы получаем пункт (б) леммы. Если

$G_\zeta \simeq {}^2\widehat{A_2(2^{2t/|\zeta|})}$, то $KU/U \cap HU/U$ является циклической группой $\langle y\rangle$ порядка $(2^{t_3}+1)_3 = 3^k$, где $3^{k-1} = t_3$. Если $k > 1$, то лемма Хартли-Шута 3.2 влечет, что $C_U(y) = \{e\}$, что невозможно. Таким образом, t не делится на 3 и $K \cap U$ содержится в централизаторе элемента x, порождающего H_ζ. Как и в нескрученном случае выше, мы получаем, что $C_U(x)$ изоморфна аддитивной подгруппе поля $GF(2^t)$. Нильпотентность группы K влечет, что $K \cap U = (C_U(x))_{\zeta_{2'}}$, откуда следует пункт (a) леммы. $\square$

5 Картеровы подгруппы в симплектических группах

Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ таких почти простых групп A, что единственный неабелев композиционный фактор $S = F^*(A)$ является канонической простой группой лиева типа и A содержит несопряженные картеровы подгруппы. Если множество $\mathcal{A}$ непусто, обозначим через **Cmin** наименьший возможный порядок подгруппы $F^*(A)$, при $A \in \mathcal{A}$. Если множество $\mathcal{A}$ пусто, то положим, что **Cmin** $= \infty$. Мы докажем, что **Cmin** $= \infty$, т. е. что $\mathcal{A} = \varnothing$. Отметим, что если $A \in \mathcal{A}$ и $G = F^*(A)$, то существует такая подгруппа A_1 группы A, что $A_1 \in \mathcal{A}$ и $A_1 = KG$ для некоторой картеровой подгруппы K группы A. Действительно, если для любой нильпотентной подгруппы N группы A картеровы подгруппы группы NG сопряжены, то A удовлетворяет условию **(C)**, следовательно, картеровы подгруппы группы A сопряжены, что противоречит выбору A. Значит, существует такая нильпотентная подгруппа N группы A, что картеровы подгруппы группы NG несопряжены. Пусть K — некоторая картерова подгруппа группы NG. Тогда очевидно, что KG/G является картеровой подгруппой группы NG/G, т. е. совпадает с NG/G. Следовательно, картеровы подгруппы группы KG несопряжены и $KG = A_1 \in \mathcal{A}$. Поэтому условие $A = KG$ в теоремах 5.1, 6.1 и 7.1 не является ограничением и используется лишь для упрощения рассуждений.

В этом параграфе мы рассмотрим картеровы подгруппы в почти простой группе A с простым цоколем $S = F^*(A) \simeq \mathbf{P}Sp_{2n}(q)$. Мы рассматриваем такие группы в отдельном параграфе, поскольку для групп типа $\mathbf{P}Sp_{2n}(q)$ лемма 3.3 неверна и мы используем рассуждения, немного отличные от тех, которые мы используем в доказательстве теоремы 7.1.

Теорема 5.1. *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа с тривиальным центром над полем характеристики p, и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $\mathbf{P}Sp_{2n}(p^t) \simeq O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Выберем подгруппу A группы $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}Sp_{2n}(p^t))$ так, чтобы $A \cap \overline{G}_\sigma = G$. Пусть K — картерова подгруппа группы A. Предположим также, что $|\mathbf{P}Sp_{2n}(p^t)| \leqslant \mathbf{Cmin}$ и $A = KG$. Тогда выполнено в точности одно из утверждений:*

(а) *группа G определена над $GF(2^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A, $|\zeta| = t$, и, с точностью до сопряжения в G, выполнено равенство $K = Q \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа группы $G_{\zeta_{2'}}$;*

(б) *$G \simeq \mathbf{P}SL_2(3^t) \simeq \mathbf{P}Sp_2(3^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A, $|\zeta| = t$ нечетно, и, с точностью до сопряжения в G, выполнено равенство $K = Q \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где Q — силовская 3-подгруппа группы $G_{\zeta_{3'}}$;*

(в) *p не делит $|K \cap G|$ и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A.*

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены, т. е. если $A_1 \in \mathcal{A}$ и $|F^*(A_1)| = \mathbf{Cmin}$, то $F^*(A_1) \not\simeq \mathbf{P}Sp_{2n}(p^t)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и A — такой контрпример к нему, что порядок $|F^*(A)|$ минимален. Заметим, что в точности одно из утверждений теоремы может быть выполнено, поскольку если выполнено утверждение (б), то, ввиду лемм 3.7 и 4.5, для силовской 2-подгруппы Q группы A не выполнено условие $N_G(Q) = QC_G(Q)$, т. е. не выполнено утверждение (в) теоремы. Кроме того, если A_1 — почти простая группа, для которой $F^*(A_1)$ — простая группа лиева типа порядка меньшего, чем $|F^*(A)|$, то картеровы подгруппы группы A_1 сопряжены. Ввиду основной теоремы из [6] можно считать, что $A \neq G$. Кроме того, ввиду [10, теорема 3.5], можно считать, что q нечетно, т. е. $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}Sp_{2n}(q))$ не содержит графовых автоморфизмов. Таким образом, можно предполагать, что $A = \langle G, \zeta g\rangle$.

Предположим, что K является картеровой подгруппой группы $\langle G, \zeta g\rangle$ и K не удовлетворяет утверждению теоремы. Запишем $K = \langle x, K \cap G\rangle$. Если либо $p \neq 3$, либо t четно, то теорема следует из [10, теорема 3.5]. Таким образом, мы можем предполагать, что $q = 3^t$ и t нечетно. Поскольку $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 2$ и порядок $|\zeta|$ нечетен, можно считать, что порядок $|\zeta g|$ также нечетен и поэтому $\zeta \in \langle G, \zeta g\rangle$, т. е. $\langle G, \zeta g\rangle = G \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$. По [10, лемма 2.2] любой полупростой элемент нечетного порядка сопряжен со своим обратным в G. Далее, для любого полупростого элемента $t \in G$ каждый неабелев композиционный фактор централизатора $C_G(t)$ есть простая группа лиева типа (см. [23]) порядка меньшего, чем $\mathbf{Cmin}$. Следовательно, для любого неабелева композиционного фактора S группы $C_G(t)$ и любой нильпотентной подгруппы $N \leq C_G(t)$ картеровы подгруппы группы $\langle \mathrm{Aut}_N(S), S\rangle$ сопряжены. Значит, $C_G(t)$ удовлетворяет условию **(C)**. Поэтому, по лемме 2.4, $|K \cap G| = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ для некоторых $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Если $G = \widehat{\mathbf{P}Sp_{2n}(q)}$, то по [34, теорема 2] любой унипотентный элемент сопряжен со своим обратным. Поскольку 3 является хорошим простым числом для G, то [35, теоремы 1.2 и 1.4] влекут, что для любого элемента $u \in G$ порядка 3 все неабелевы композиционные факторы группы $C_G(u)$ являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**. Таким образом, $C_G(u)$ удовлетворяет условию **(C)**, значит, по лемме 2.4, мы получаем, что $K \cap G$ есть 2-группа. Ввиду лемм 4.3 и 4.4 любой элемент $x \in A \setminus G$ нечетного порядка, удовлетворяющий равенству $\langle x\rangle \cap G = \{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G. Поэтому K содержит силовскую 2-подгруппу группы G, и значит, группы A, т. е. K удовлетворяет утверждению (в) теоремы.

Таким образом, мы можем предполагать, что $G = \mathbf{P}Sp_{2n}(q)$ и $\beta \geqslant 1$, т. е. силовская 3-подгруппа $O_3(K \cap G)$ группы $K \cap G$ нетривиальна. Из леммы 4.2 следует, что $K \cap G$ содержится в некоторой K-инвариантной параболической подгруппе P группы G с фактором Леви L и, с точностью до сопряжения в P, силовская 2-подгруппа $O_2(K \cap G)$ группы $K \cap G$ содержится в L. Заметим, что все неабелевы композиционные факторы группы P являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**, поэтому P и любой ее гомоморфный образ удовлетворяют условию **(C)**. Группа $\widetilde{K} = KO_3(P)/O_3(P)$ изоморфна $K/O_3(K \cap G)$ и, по лемме 2.3, $\widetilde{K}$ является картеровой подгруппой группы $\langle \widetilde{K}, P/O_3(P)\rangle$. Далее $\widetilde{K} \cap P/O_3(P) \simeq O_2(K \cap G)$ есть 2-группа и любой элемент $x \in \langle \widetilde{K}, P/O_3(P)\rangle \setminus P/O_3(P)$ нечетного порядка, удовлетворяющий равенству $\langle x\rangle \cap P/O_3(P) = \{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $P/O_3(P) \simeq L$ (см. леммы 4.3 и 4.4). Следовательно, $O_2(K \cap G)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы L, в частности, содержит силовскую 2-подгруппу H_2 группы H. Поскольку K нильпотентна, лемма 3.4 влечет, что $O_3(K \cap G) \leq C_U(H_2) = \langle X_r \mid r$ — длинный корень из $\Phi(G)^+\rangle$. Поскольку для любых двух длинных корней r, s из $\Phi(G)^+$ выполнено $r + s \notin \Phi(G)$, коммутаторная формула Шевалле [12, теорема 5.2.2] влечет, что подгруппа $\langle X_r \mid r$ — длинный корень из $\Phi(G)^+\rangle$ абелева.

Поскольку ζ — полевой автоморфизм, он нормализует любую параболическую подгруппу группы G, содержащую ζ-инвариантную подгруппу Бореля. Таким образом, для любого подмножества J множества фундаментальных корней $\Pi = \{r_1, \ldots, r_n\}$ корневой системы $\Phi = \Phi(G)$ параболическая подгруппа P_J является ζ-инвариантной. Следовательно, можно считать, что $P = P_J$, где J — некоторое собственное подмножество множества фундаментальных корней Π корневой системы Φ. Выберем нумерацию фундаментальных корней таким образом, что r_n — длинный фундаментальный корень, а все остальные r_i — короткие корни. Если $r_n \in J$, то одна из компонент фактора Леви L, например, G_1, изоморфна группе $Sp_{2k}(q)$ для некоторого $k < n$ (отметим, что поскольку $A \neq G$, то $q \neq 3$). В силу леммы 3.5 мы получаем, что $L/C_L(G_1) = \mathrm{Aut}_L(G_1/Z(G_1)) = G_1/Z(G_1)$. По лемме 2.3, $K_1 = KC_L(G_1)O_3(P)/C_L(G_1)O_3(P)$ — картерова подгруппа группы $(P \leftthreetimes \langle\zeta\rangle)/C_L(G_1)O_3(P)$. Поскольку $|K_1 \cap P/C_L(G_1)O_3(P)|$ не делится на 3, и ζ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $G_1/Z(G_1)$ (см. лемму 4.3), то K_1 содержит силовскую 2-подгруппу группы $P/C_L(G_1)O_3(P) \simeq G_1/Z(G_1) \simeq \mathbf{P}Sp_{2k}(q)$. Кроме того, по лемме 4.3 силовская 2-подгруппа группы $(P/C_L(G_1)O_3(P))_\zeta$ является силовской 2-подгруппой группы $P/C_L(G_1)O_3(P)$. Таким образом, $K_1 \cap P/C_L(G_1)O_3(P)$ является силовской 2-подгруппой группы $(P/C_L(G_1)O_3(P))_\zeta \simeq \mathbf{P}Sp_{2k}(3)$. Но по лемме 3.7 в группе $\mathbf{P}Sp_{2k}(3)$ существует элемент x нечетного порядка, который нормализует, но не централизует силовскую 2-подгруппу; противоречие с тем, что K_1 является картеровой подгруппой группы $(P \leftthreetimes \langle\zeta\rangle)/C_L(G_1)O_3(P)$. Таким образом, можно считать, что $r_n \notin J$.

Рассмотрим множество $J_n = \Pi \setminus \{r_n\}$ и параболическую подгруппу P_{J_n}. Из предыдущих рассуждений следует, что $K \leq P_J \leftthreetimes \langle\zeta\rangle \leq P_{J_n} \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$. Далее, подгруппа $\langle X_r \mid r - \text{длинный корень из } \Phi(G)^+\rangle$ содержится в $O_3(P_{J_n})$ и $O_3(K \cap G)$ содержится в $\langle X_r \mid r - \text{длинный корень из } \Phi(G)^+\rangle$, поэтому $O_3(K \cap G) \leq O_3(P_{J_n})$ и можно считать, что $P = P_{J_n}$. По лемме 2.3, $\widetilde{K} = KO_3(P)/O_3(P)$ является картеровой подгруппой группы $(P \leftthreetimes \langle\zeta\rangle)/O_3(P)$. Заметим, что единственный неабелев композиционный фактор группы $P \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ изоморфен $A_{n-1}(q) \simeq \mathbf{P}SL_n(q)$. Ввиду [25, теорема 1] и [26, теорема 4] мы получаем, что $\widetilde{K} = R \times \langle\zeta\rangle$, где R — силовская 2-подгруппа группы P, централизуемая элементом ζ. Таким образом, $O_3(K \cap G) \leq C_P(R)$. Рассмотрим $Q = O_3(K \cap G) \cap P_\zeta$. Поскольку $O_3(K \cap G)$ нетривиальна и K нильпотентна, то группа $Q = O_3(K \cap G) \cap P_\zeta = Z(K) \cap O_3(K \cap G)$ нетривиальна. Следовательно, $N_G(Q)$ — собственная подгруппа группы G, и по лемме 4.2 $N_G(Q)$ содержится в собственной параболической подгруппе группы G. С другой стороны, $K \leq N_G(Q)$ и $P = P_{J_n}$ — максимальная собственная параболическая подгруппа группы G. Если $N_G(Q)$ не содержится в P, то $N_G(Q)$ и K содержатся в некоторой параболической подгруппе P_J, для которой $r_n \in J$. Выше было доказано, что $r_n \notin J$, значит, $N_G(Q)$ содержится в P.

Покажем, что $R \times Q$ — картерова подгруппа группы G_ζ. Действительно, предположим, что некоторый элемент $x \in G_\zeta$ нормализует $R \times Q$. Тогда x нормализует Q, поэтому x лежит в P и нормализует $O_3(P)$. С другой стороны, x нормализует R, значит, нормализует $C_P(R)$, поэтому x нормализует $C_{O_3(P)}(R)$. Кроме того, очевидно, x и ζ перестановочны. Таким образом, x нормализует $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$. Как мы отмечали выше, $K \leq (R \times C_{O_3(P)}(R)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ и группа $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ разрешима. Лемма 2.4(a) влечет, что группа $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ совпадает со своим нормализатором в $G \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, значит, $x \in R \times C_{O_3(P)}(R)$. Группа $C_{O_3(P)}(R) \leq \langle X_r \mid r - \text{является длинным корнем}\rangle$ абелева, поэтому любой элемент из $R \times C_{O_3(P)}(R)$ централизует $C_{O_3(P)}(R) \geq O_3(K \cap G)$. Следовательно, x нормализует $(R \times O_3(K \cap G)) \leftthreetimes \langle \zeta \rangle = K$, т. е. $x \in K$. По построению $R \times Q = K \cap G_\zeta$, значит, $x \in R \times Q$ и $R \times Q$ — картерова подгруппа группы G_ζ. С другой стороны, $O^{3'}(G_\zeta) \simeq \mathbf{P}Sp_{2n}(3^{t/|\zeta|})$ и по индукции группы $\mathbf{P}Sp_{2n}(3^{t/|\zeta|})$ и $\mathbf{P}\widehat{Sp_{2n}(3^{t/|\zeta|})}$ не содержат картеровых подгрупп, порядок которых делится на 3. Это последнее противоречие завершает доказательство теоремы. □

6 Картеровы подгруппы в группах с автоморфизмом тройственности

Теорема 6.1. *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем характеристики p, $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ и $O^{p'}(G)$ изоморфна $D_4(q)$ или ${}^3D_4(q^3)$. Предположим, что τ — графовый автоморфизм порядка 3 группы $O^{p'}(G)$ (напомним, что для группы $G \simeq {}^3D_4(q^3)$ автоморфизм τ — это такой автоморфизм, множество неподвижных точек которого изоморфно $G_2(q)$). Обозначим через A_1 подгруппу группы $\mathrm{Aut}(D_4(q))$, порожденную внутренне-диагональными и полевыми автоморфизмами, а также графовым автоморфизмом порядка 2. Пусть подгруппа $A \leq \mathrm{Aut}(O^{p'}(G))$ такова, что $A \not\leq A_1$ (если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$), и K — картерова подгруппа группы A. Предположим также, что $|O^{p'}(G)| \leqslant \mathbf{Cmin}$, $G = A \cap \overline{G}_\sigma$ и $A = KG$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(а) *$G \simeq {}^3D_4(q^3)$, $(|A : G|, 3) = 1$, q нечетно и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A;*

(б) *$(|A : G|, 3) = 3$, q нечетно, $\tau \in A$, и, с точностью до сопряжения элементом из G, подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_A(\tau) \in \Gamma G_2(q)$ и $\tau \in K$;*

(в) *$(|A : G|, 3) = 3$, $q = 2^t$, $|A : G| = 3t$, $A = G \leftthreetimes \langle \tau, \varphi \rangle$, где φ — полевой автоморфизм порядка t, перестановочный с τ и, с точностью до сопряжения элементом из G, подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_G(\langle \tau, \varphi \rangle_{2'}) \simeq G_2(2^{t_{2'}})$ и $\tau \in K$;*

(г) *$O^{p'}(G) \simeq D_4(p^{3t})$, p нечетно, факторгруппа A/G циклическая, $\tau \notin A$, $A = G \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, где, для некоторого натурального m, $\zeta = \tau\varphi^m$ является графово-полевым автоморфизмом, и, с точностью до сопряжения элементом из G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, где Q является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}} \simeq {}^3D_4(p^{3t/|\zeta_{2'}|})$.*

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены, т. е. если $A_2 \in \mathcal{A}$ и $|F^*(A_2)| = \mathbf{Cmin}$, то группа A_2 не удовлетворяет условиям теоремы, значит, $F^*(A_2) \not\simeq {}^3D_4(q^3)$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и A — такой контрпример к утверждению теоремы, что $|O^{p'}(G)|$ минимален. Ввиду [36, теорема 1.2(vi)] каждый элемент группы G сопряжен со своим обратным. По [23] и [35, теоремы 1.2 и 1.4] для любого элемента $t \in G$ нечетного простого порядка все неабелевы композиционные факторы централизатора $C_G(t)$ являются простыми группами лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**. Таким образом, $C_A(t)$ удовлетворяет условию **(C)** и лемма 2.4 влечет, что $K \cap G$ является 2-группой. Далее, лемма 4.4 влечет, что все циклические группы, порожденные полевыми автоморфизмами одинакового нечетного порядка группы G, сопряжены относительно G. Поскольку централизатор любого полевого автоморфизма в G является группой лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**, мы вновь применяем лемму 2.4 и получаем утверждение теоремы по индукции. Лемма 4.4 также влечет, что если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$, то все циклические группы, порожденные графово-полевыми автоморфизмами, сопряжены. Поскольку централизатор любого графово-полевого автоморфизма в G является группой лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**, мы вновь применяем лемму 2.4 и получаем утверждение (г) теоремы по индукции. Таким образом, можно считать, что A не содержит полевого или графово-полевого автоморфизма нечетного порядка. Следовательно, либо $G \simeq {}^3D_4(q^3)$ и A/G является 2-группой, либо K содержит такой элемент s порядка 3, что $\langle s\rangle \cap A_1 = \{e\}$ (для групп ${}^3D_4(q^3)$ справедливо $\langle s\rangle \cap G = \{e\}$), $G \leftthreetimes \langle s\rangle = G \leftthreetimes \langle \tau\rangle$, и $K \cap G$ является 2-группой.

В первом случае мы получаем утверждение (а) теоремы при выполнении условия $(|A : G|, 3) = 1$. Во втором случае существуют ровно две несопряженных циклических подгруппы $\langle \tau\rangle$ и $\langle x\rangle$ порядка 3 группы A такие, что $\langle \tau\rangle \cap A_1 = \langle x\rangle \cap A_1 = \{e\}$ и $G \leftthreetimes \langle x\rangle = G \leftthreetimes \langle \tau\rangle$ (см. [29, (9-1)]). Следовательно, либо $s = \tau \in K$, либо $s = x \in K$. Предположим, что $q \neq 3^t$. В первом случае из известного строения картеровых подгрупп в группе из множества $\Gamma G_2(q)$, полученного в [10], следуют утверждения (б) или (в) теоремы, во втором случае $K \le C_A(x)$. Ввиду [29, (9-1)] $C_G(x) \simeq \mathbf{P}GL_3^{\varepsilon}(q)$, где $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 3$, $\varepsilon = \pm$ и $\mathbf{P}GL_3^{+}(q) = \mathbf{P}GL_3(q)$, $\mathbf{P}GL_3^{-}(q) = \mathbf{P}GU_3(q)$. Тогда $K = (K \cap G) \times \langle y, \varphi\rangle$, где φ — полевой автоморфизм группы $O^{p'}(G)$, порядок которого есть степень 2, и y — графовый автоморфизм, порядок которого есть степень 3, и $x \in \langle y\rangle$. В силу нильпотентности K мы получаем, что $y\varphi = \varphi y$, откуда $C_{C_G(\varphi)}(x) = C_{C_G(x)}(\varphi)$. Теперь мы имеем, что

$$O^{p'}(C_G(\varphi)) = \begin{cases} D_4(q^{1/|\varphi|}), & \text{если } O^{p'}(G) \simeq D_4(q), \\ {}^3D_4(q^{3/|\varphi|}), & \text{если } G \simeq {}^3D_4(q^3). \end{cases}$$

Значит, $C_{C_G(x)}(\varphi) = C_{C_G(\varphi)}(x) \simeq \mathbf{P}GL_3^{\mu}(q^{1/|\varphi|})$, причем $q^{1/|\varphi|} \equiv \mu 1 \pmod 3$, где $\mu = \pm$ (заметим, что ε и μ могут быть различны). Как мы отмечали выше, $K \cap G$ является 2-группой. С другой стороны, в силу [26, теорема 4], существует элемент z порядка 3, централизующий силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x) = \mathbf{P}GL_3^{\varepsilon}(q)$ и лежащий в $C_{C_G(x)}(\varphi) \simeq \mathbf{P}GL_3^{\mu}(q^{1/|\varphi|})$. Таким образом, элемент z централизует K, следовательно, лежит в K. Но $K \cap G$ не содержит элементов нечетного порядка, следовательно, этот второй случай невозможен.

Предположим теперь, что $q = 3^t$. Тогда $C_G(\tau) \simeq G_2(q)$ и мы получаем теорему. Во втором случае $C_G(x) \simeq SL_2(q) \leftthreetimes U$, где U является 3-группой и $Z(C_G(x)) \cap U \neq \{e\}$; противоречие с леммой 2.4. $\square$

7 Картеровы подгруппы в полулинейных группах лиева типа

Теорема 7.1. *Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа (G не обязательно простая) над полем характеристики p и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Предположим также, что $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$. Выберем подгруппу A группы $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$, для которой выполнено равенство $A \cap \overline{G}_\sigma = G$, и, если $O^{p'}(G) = D_4(q)$, предположим, что A содержится в подгруппе A_1, определенной в формулировке теоремы 6.1. Пусть K — картерова подгруппа группы A и $A = KG$.*

Тогда выполнено в точности одно из следующих утверждений:

(а) *G определена над полем характеристики 2, $A = \langle G, \zeta g, t\rangle$, где t — 2-элемент, K содержится в нормализаторе некоторой t-инвариантной подгруппы Бореля группы G и $K \cap \langle G, \zeta g\rangle$ удовлетворяет одному из утверждений (а)–(е) леммы 4.8;*

(б) *$G \simeq \mathbf{P}SL_2(3^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A, $|\zeta| = t$ нечетно, и, с точностью до сопряжения в G, выполнено равенство $K = Q \rtimes \langle\zeta\rangle$, где Q является силовской 3-подгруппой группы $G_{\zeta_{3'}}$;*

(в) *$A = {}^2G_2(3^{2n+1}) \rtimes \langle\zeta\rangle$, $|\zeta| = 2n+1$ и с точностью до сопряжения в G выполнено равенство $K = (K \cap G) \rtimes \langle\zeta\rangle$ и $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, где Q порядка 2 и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$;*

(г) *p не делит $|K \cap G|$ и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A, ввиду леммы 4.5 группа A удовлетворяет* **(ESyl2)** *тогда и только тогда, когда G удовлетворяет* **(ESyl2)**.

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены.

Замечание. Существует некоторая дихотомия для картеровых подгрупп в группах автоморфизмов конечных групп лиева типа, несодержащих графовый или полево-графовый автоморфизм порядка 3. Они либо содержатся в нормализаторе некоторой подгруппы Бореля, либо характеристика нечетна и картерова подгруппа содержит силовскую 2-подгруппу всей группы.

Предположим, что утверждение теоремы неверно и A — контрпример к утверждению теоремы, для которого $|F^*(A)|$ минимален. Среди контрпримеров с минимальным $|F^*(A)|$ выберем тот, для которого $|A|$ минимален. В этом случае для любой почти простой группы A_1, для которой $|F^*(A_1)| < |F^*(A)|$, $F^*(A_1)$ — простая группа лиева типа и A_1 удовлетворяет условиям теоремы 7.1, картеровы подгруппы сопряжены. Действительно, заметим, что лишь одно утверждение теоремы может быть выполнено, поскольку при выполнении утверждений (б) или (в) условие $N_A(Q) = QC_A(Q)$ для силовской 2-подгруппы Q группы A не выполнено, т. е. не выполнено условие (г) теоремы (то, что никакие другие два утверждения не могут быть выполнены одновременно, очевидно). Таким образом, картеровы подгруппы группы A_1 сопряжены. Отметим также, что отсюда следует неравенство $|F^*(A)| \leqslant \mathbf{Cmin}$. Действительно, если $A_2 \in \mathcal{A}$ и $F^*(A_2) = \mathbf{Cmin}$, то либо A_2 удовлетворяет условиям теоремы 6.1, либо A_2 удовлетворяет условиям теоремы 7.1. Как мы отмечали в теореме 6.1, первый случай невозможен. Второй случай, как мы только что заметили, возможен лишь в том случае, если $|F^*(A)| \leqslant |F^*(A_2)| = \mathbf{Cmin}$ (поскольку A — контрпример к утверждению теоремы для которого $|F^*(A)|$ минимален).

Мы докажем теорему следующим образом. Если $F^*(A) \simeq \mathbf{P}Sp_{2n}(q)$, то теорема следует из теоремы 5.1. Если $A = G$, то теорема следует из [3], [5], [6] и [10]. Таким образом, можно считать, что $A/(A \cap G)$ нетривиальна. Пусть K — картерова подгруппа группы A. Мы покажем сначала, что если p делит $|K \cap G|$, то выполнено одно из утверждений (а)–(в) теоремы. Затем мы покажем, что если p не делит $|K \cap G|$, то K содержит силовскую 2-подгруппу группы A. Поскольку оба этих шага достаточно запутанные, мы разделили их на два параграфа. Заметим, что по [23] для любого полупростого элемента $t \in G$, все неабелевы композиционные факторы группы $C_G(t)$, значит, группы $C_A(t)$, являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем $|F^*(A)|$, а значит, меньшего, чем $\mathbf{Cmin}$. Поэтому $C_A(t)$ удовлетворяет условию **(C)**. Для того, чтобы применять леммы 2.3 и 2.4, мы будем использовать этот факт без дальнейших ссылок.

8 Картеровы подгруппы порядка, делящегося на характеристику

Обозначим $K\cap G$ через K_G. Для любой группы A, удовлетворяющей условиям теоремы 7.1 факторгруппа A/G является абелевой и, для некоторого натурального t, изоморфна подгруппе группы $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_t$, где $\mathbb{Z}_t$ обозначает циклическую группу порядка t. Если факторгруппа A/G не является циклической, то группа $O^{p'}(G)$ является расщепленной и A содержит элемент τa, где τ — графовый автоморфизм группы $O^{p'}(G)$ и $a\in\overline{G}_\sigma$. Тогда любой полупростой элемент нечетного порядка сопряжен со своим обратным в A (см. лемму 4.6). По лемме 2.4 мы получаем, что $|K_G|$ делится только на 2 и p. Если $p=2$, то K_G является 2-группой, она содержится в собственной K-инвариантной параболической подгруппе P группы G и по лемме 2.3 $KO_2(P)/O_2(P)$ является картеровой подгруппой группы $KP/O_2(P)$. Поскольку $K_G\leq O_2(P)$, то $(KO_2(P)/O_2(P))\cap(P/O_2(P))=\{e\}$. Значит, P является подгруппой Бореля группы G, в противном случае мы бы имели $C_{P/O_2(P)}(KO_2(P)/O_2(P))\neq\{e\}$; противоречие с тем, что $KO_2(P)/O_2(P)$ является картеровой подгруппой группы $KP/O_2(P)$. Таким образом, P является подгруппой Бореля, и теорема следует из леммы 4.8. Далее, если $p\neq 2$, то вновь K_G содержится в собственной параболической подгруппе P группы G такой, что $O_p(K_G)\leq O_p(P)$ и $O_2(K_G)\leq L$. Тогда леммы 4.3 и 4.4 влекут, $H_2\leq O_2(K\cap G)\leq K$. Далее, лемма 3.3 влечет, что $O_p(K_G)\leq C_U(H_2)=\{e\}$. Следовательно, $K\cap G$ является 2-группой. По леммам 4.3 и 4.4 любой элемент $x\in A\setminus G$ нечетного порядка такой, что $\langle x\rangle\cap G=\{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G. Значит, K содержит силовскую 2-подгруппу группы A, т. е. K удовлетворяет утверждению (д) теоремы. Поэтому факторгруппа A/G является циклической, и мы можем предполагать, что $A=\langle G,\zeta g\rangle\in\Gamma G$.

Напомним, что мы находимся в условиях теоремы 7.1, $A=\langle G,\zeta g\rangle$ предполагается контрпримером к утверждению теоремы, для которого $|O^{p'}(G)|$ и $|A|$ минимальны, и K является такой картеровой подгруппой группы $\langle G,\zeta g\rangle$, что p делит $|K_G|$. Мы имеем, что $K=\langle\zeta^k g,K_G\rangle$. Поскольку $|O^{p'}(G)| \leqslant \mathbf{Cmin}$, лемма 2.3 влечет, что KG/G является картеровой подгруппой группы A/G. Следовательно, $|\zeta^k| = |\zeta|$, и мы можем предполагать, что $k = 1$ и $K = \langle K_G, \zeta g\rangle$.

Ввиду леммы 4.2 существует такая собственная σ- и $\bar{\zeta}g$- инвариантная параболическая подгруппа $\overline{P}$ группы $\overline{G}$, что $O_p(K_G) \leq R_u(\overline{P})$ и $K_G \leq \overline{P}$. В частности, $\overline{P}$ и $\overline{P}^{\bar{\zeta}}$ сопряжены в $\overline{G}$. Пусть Φ — корневая система группы $\overline{G}$ и Π — множество фундаментальных корней корневой системы Φ. Ввиду [12, предложение 8.3.1], $\overline{P}$ сопряжена с некоторой $\overline{P}_J = \overline{B}\cdot\overline{N}_J\cdot\overline{B}$, где J является подмножеством множества Π и $\overline{N}_J$ — полный прообраз подгруппы W_J в $\overline{N}$ относительно естественного гомоморфизма $\overline{N}/\overline{T} \to W$. Далее, $\overline{P}_J$ является $\bar{\varphi}$-инвариантной, значит, $\overline{P}_J^{\bar{\zeta}} = \overline{P}_J^{\bar{\gamma}^{\varepsilon}}$ (напомним, что $\bar{\zeta} = \bar{\gamma}^{\varepsilon}\bar{\varphi}^k$ по определению). Рассмотрим симметрию ρ диаграммы Дынкина корневой системы Φ, соответствующую $\bar{\gamma}$. Пусть $\overline{J}$ — образ множества J относительно ρ. Ясно, что $\overline{P}_J^{\bar{\gamma}} = \overline{P}_{\overline{J}}$. Поскольку $\overline{P}$ и $\overline{P}^{\bar{\zeta}}$ сопряжены в $\overline{G}$, мы получаем, что $\overline{P}_J$ и $\overline{P}_J^{\bar{\zeta}}$ сопряжены в $\overline{G}$. Из [12, теорема 8.3.3] следует, что либо $\varepsilon = 0$, либо $J = \overline{J}$; т. е. $\overline{P}_J$ является $\bar{\zeta}$-инвариантной.

Далее, мы имеем, что $\overline{P}^{\bar{y}} = \overline{P}_J$ для некоторого $\bar{y} \in \overline{G}$. Значит, $\langle\bar{\zeta}g, \overline{P}\rangle^{\bar{y}} = \langle(\bar{\zeta}g)^{\bar{y}}, \overline{P}_J\rangle$ и $\overline{P}_J^{(\bar{\zeta}g)^{\bar{y}}} = \overline{P}_J$. Отсюда следует, что

$$(\bar{\zeta}g)^{\bar{y}} = \bar{y}^{-1}\bar{\zeta}g\bar{y} = \bar{\zeta}\left(\bar{\zeta}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{\zeta}g\bar{y}\right) = \bar{\zeta}\cdot h,$$

где $h = \left(\bar{\zeta}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{\zeta}g\bar{y}\right) \in \overline{G}$. Поскольку $\overline{P}_J^{\bar{\zeta}} = \overline{P}_J = \overline{P}_J^{h^{-1}}$, получаем, что $h \in N_{\overline{G}}(\overline{P}_J)$. По [12, теорема 8.3.3], $N_{\overline{G}}(\overline{P}_J) = \overline{P}_J$, таким образом, $\langle\bar{\zeta}g, \overline{P}\rangle^{y} = \langle\bar{\zeta}, \overline{P}_J\rangle$. Далее обе группы $\overline{P}$ и $\overline{P}_J$ являются σ-инвариантными. Значит, $\bar{y}\sigma(\bar{y}^{-1}) \in N_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{P}$. Следовательно, по теореме Ленга-Стейнберга [19, теорема 10.1], можно предполагать, что $\bar{y} = \sigma(\bar{y})$, т. е. $\bar{y} \in \overline{G}_\sigma$. Поскольку $\overline{G}_\sigma = \overline{T}_\sigma \cdot O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ и $\overline{T} \leq \overline{P}_J$, то мы можем предполагать, что $\bar{y} \in O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Таким образом, с точностью до сопряжения в G, можно предполагать, что $\overline{K} \leq \langle\bar{\zeta}, \overline{P}_J\rangle = \overline{P}_J \leftthreetimes \langle\bar{\zeta}\rangle$ и

$$K \leq \langle(\overline{P}_J \cap G), \zeta g\rangle = \langle P_J, \zeta g\rangle,$$

в частности, $g \in (\overline{P}_J)_\sigma$. Более того, если $\overline{L}_J = \langle\overline{T}, \overline{X}_r \mid r \in J \cup -J\rangle$, то $\overline{L}_J$ есть σ- и $\bar{\zeta}$- инвариантный фактор Леви группы $\overline{P}_J$ и $L_J = \overline{L}_J \cap G$

есть ζ-инвариантный фактор Леви группы P_J. Тогда L_J^g является ζg-инвариантным фактором Леви группы P_J. Поскольку все факторы Леви сопряжены относительно $O_p(P_J)$, можно считать, что L_J является ζg-инвариантным фактором Леви. Лемма 2.3 влечет, что

$$KO_p(P_J)/O_p(P_J) = X$$

является картеровой подгруппой группы $\langle P_J, \zeta g\rangle/O_p(P_J)$ и

$$KZ(L_J)O_p(P_J)/Z(L_J)O_p(P_J) = \widetilde{X}$$

является картеровой подгруппой группы $\langle P_J, \zeta g\rangle/Z(L_J)O_p(P_J)$. Напомним, что $K = \langle \zeta g, K_G\rangle$, значит, если v и $\tilde{v}$ — образы элемента g относительно естественных гомоморфизмов

$$\omega : \langle P_J, \zeta g\rangle \to \langle L_J, \zeta v\rangle \simeq \langle P_J, \zeta g\rangle/O_p(P_J),$$

$$\tilde{\omega} : \langle P_J, \zeta g\rangle \to \langle P_J, \zeta g\rangle/Z(L_J)O_p(P_J) \simeq \langle L_J, \zeta v\rangle/Z(L_J),$$

то $X = \langle \zeta v, K_G^{\omega}\rangle$ и $\widetilde{X} = \langle \zeta\tilde{v}, K_G^{\tilde{\omega}}\rangle$. Заметим, что $O_p(P)$ и $Z(L_J)$ — характеристические подгруппы групп P и L_J соответственно, значит, мы можем рассматривать ζ как автоморфизм факторгрупп $L_J \simeq P/O_p(P)$ и $\widetilde{L} = L_J/Z(L_J)$. Заметим также, что все неабелевы композиционные факторы группы P являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**, значит, $\langle P, \zeta g\rangle$ удовлетворяет **(C)**. Таким образом, мы можем применять лемму 2.3 к $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle$, $\langle L_J, \zeta v\rangle$ и $\langle P, \zeta g\rangle$.

Если P_J — подгруппа Бореля группы G, то утверждение теоремы следует из леммы 4.8. Поэтому мы можем предполагать, что $L_J \neq Z(L_J)$, т. е. что P_J не является подгруппой Бореля группы G. Тогда $L_J = H(G_1 * \ldots * G_k)$, где G_i — подсистемные подгруппы группы G, $k \geqslant 1$, и H — подгруппа Картана группы G. Пусть $\zeta g = (\zeta_2 g_2)\cdot(\zeta_{2'} g_{2'})$ — разложение в произведение 2- и $2'$- частей элемента ζg (причем $g_2, g_{2'} \in (\overline{P}_J)_\sigma$). Далее, $\zeta_{2'} = \varphi^k$, для некоторого k, является полевым автоморфизмом (напомним, что мы не рассматриваем тройственный автоморфизм) и он нормализует каждую G_i, поскольку φ нормализует каждую G_i. Более того, ввиду леммы 4.3, мы имеем, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы H.

В частности, он централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(L_J) \leq H$. Следовательно, любой элемент нечетного порядка группы $\langle L_J, \zeta_{2'} v_{2'} \rangle$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(L_J)$ (здесь $v_{2'}$ — образ элемента $g_{2'}$ относительно ω).

Далее, $\widetilde{L} = (\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_k)\widetilde{H}$, где $\widetilde{H} = H^{\tilde{\omega}}$ и $\mathbf{P}G_1, \ldots, \mathbf{P}G_k$ — канонические конечные группы лиева типа с тривиальным центром. Положим $M_i = C_{\widetilde{L}}(\mathbf{P}G_i)$, очевидно, что $M_i = (\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_{i-1} \times \mathbf{P}G_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{P}G_k) C_{\widetilde{H}}(\mathbf{P}G_i)$; обозначим через L_i факторгруппу $\widetilde{L}/M_i$ и через π_i соответствующий естественный гомоморфизм. Тогда L_i — конечная группа лиева типа и $\mathbf{P}G_i \leq L_i \leq \widehat{\mathbf{P}G}_i$.

Положим $M_{i,j} = C_{\widetilde{L}}(\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$, тогда

$$M_{i,j} = (\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_{i-1} \times \mathbf{P}G_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{P}G_{j-1} \times \mathbf{P}G_{j+1} \times \ldots \times \mathbf{P}G_k) C_{\widetilde{H}}(\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j);$$

обозначим через $\pi_{i,j}$ соответствующий естественный гомоморфизм $\widetilde{L} \to \widetilde{L}/M_{i,j}$. Если M_i (соотв. $M_{i,j}$) является ζ-инвариантной, то M_i (соотв. $M_{i,j}$) нормальна в $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v} \rangle$ и мы обозначим через π_i (соотв. $\pi_{i,j}$) естественный гомоморфизм $\pi_i : \langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v} \rangle \to \langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v} \rangle / M_i$ ($\pi_{i,j} : \langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v} \rangle \to \langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v} \rangle / M_{i,j}$).

Теперь рассмотрим ζ. Поскольку ζ^2 — полевой автоморфизм, могут выполняться два случая: либо ζ нормализует $\mathbf{P}G_i$, либо ζ^2 нормализует $\mathbf{P}G_i$ и $\mathbf{P}G_i^{\zeta} = \mathbf{P}G_j$ для некоторого $j \neq i$. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

Пусть ζ нормализует $\mathbf{P}G_i$. Тогда ζ нормализует M_i, и лемма 2.3 влечет, что $\widetilde{X}^{\pi_i} = K_i$ есть картерова подгруппа группы $\langle L_i, (\zeta\tilde{v})^{\pi_i} \rangle$. Поскольку $\langle L_i, (\zeta\tilde{v})^{\pi_i} \rangle$ — полулинейная группа лиева типа, удовлетворяющая условиям теоремы 7.1 (по построению ζ^2 является полевым автоморфизмом и потому мы не попадаем в условия теоремы 6.1), $|L_i| < |G|$, и p не делит $|K_i|$, мы имеем, что K_i содержит силовскую 2-подгруппу Q_i группы $\langle L_i, (\zeta\tilde{v})^{\pi_i} \rangle$ (в частности, $p \neq 2$) и по лемме 2.5 группа $\langle L_i, (\zeta\tilde{v})^{\pi_i} \rangle$ удовлетворяет **(ESyl2)**.

Пусть ζ^2 нормализует $\mathbf{P}G_i$ и $\mathbf{P}G_i^{\zeta} = \mathbf{P}G_j$. Тогда подгруппа $M_{i,j}$ нормальна в $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v} \rangle$. Мы хотим показать, что $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}$ удовлетворяет

(ESyl2). Поскольку $M_{i,j}$ является нормальной подгруппой группы $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle$, то по лемме 2.3 $(\widetilde{X})^{\pi_{i,j}}$ является картеровой подгруппой группы $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$. Рассмотрим подгруппу

$$\langle (\mathbf{P}G_i)^{\pi_{i,j}} \times (\mathbf{P}G_j)^{\pi_{i,j}}, \widetilde{X}^{\pi_{i,j}}\rangle$$

группы $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$ (отметим, что $(\mathbf{P}G_i)^{\pi_{i,j}} \simeq \mathbf{P}G_i$ и $(\mathbf{P}G_j)^{\pi_{i,j}} \simeq \mathbf{P}G_j$, и до конца данного абзаца для сокращения обозначений мы будем отождествлять эти группы). Далее мы находимся в условиях леммы 2.8, а именно, мы имеем конечную группу $\widetilde{G} = (\widetilde{X})^{\pi_{i,j}}(\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$, где $\mathbf{P}G_i \simeq \mathbf{P}G_j$ имеет тривиальный центр. Тогда $\mathrm{Aut}_{(\widetilde{X})^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) \simeq \mathrm{Aut}_{\widetilde{X}}(\mathbf{P}G_i)$ является картеровой подгруппой группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$. Далее, $\mathbf{P}G_i$ — каноническая конечная группа лиева типа и

$$\mathbf{P}G_i \leq \mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i) \leq \mathrm{Aut}(\mathbf{P}G_i),$$

т. е. $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1 (по построению ζ^2 является полевым автоморфизмом и потому мы не попадаем в условия теоремы 6.1) и $(\widetilde{X})^{\pi_{i,j}} \cap (\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$ не делится на характеристику. По индукции, $\mathrm{Aut}_{(\widetilde{X})^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ (в частности, $p \neq 2$). Такие же рассуждения показывают, что $\mathrm{Aut}_{\widetilde{X}}(\mathbf{P}G_j)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_j)$. Следовательно, $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_j)$ удовлетворяют условию **(ESyl2)**. Поскольку $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i) \leq \mathrm{Aut}_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_j) \leq \mathrm{Aut}_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$, леммы 3.6 и 4.5 влекут, что группы индуцированных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\mathrm{Aut}_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$ удовлетворяют условию **(ESyl2)**. Рассмотрим $N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$. Поскольку

$$|\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}} : N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)| = |\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}} : N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)| = 2,$$

нетрудно убедиться, что для любого элемента h из $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$ справедливо равенство смежных классов $hN_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) = hN_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$, откуда следует, что $N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) = N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$. По построению $C_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) \cap C_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j) = \{e\}$, поэтому лемма 2.7 (с $C_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $C_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$ в качестве нормальных подгрупп) влечет, что нормализатор $N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**.

Далее, $|\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}} : N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_1)| = 2$, таким образом лемма 2.9 влечет, что $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**.

Теперь мы покажем, что группа $\langle L_J, \zeta v\rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $\widetilde{L} \neq \{e\}$, то, как мы заметили выше, $p \neq 2$. Пусть Q — силовская 2-подгруппа группы $\langle L_J, \zeta v\rangle$. Рассмотрим элемент $x \in N_{\langle L_J, \zeta v\rangle}(Q)$ нечетного порядка. Нам нужно доказать, что x централизует Q. Как мы заметили выше, любой элемент нечетного порядка группы $\langle L_J, \zeta v\rangle$ централизует $Q \cap Z(L_J)$, значит, если $\tilde{x} = x^{\tilde{\omega}}$ централизует $\widetilde{Q} = Q^{\tilde{\omega}} \simeq Q/(Q \cap Z(L_J))$, то x централизует Q. Далее, либо M_i нормальна в $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle$, либо $M_{i,j}$ нормальна в $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle$ и $(\cap_i M_i) \bigcap (\cap_{i,j} M_{i,j}) = \{e\}$. Более того, как мы доказали выше, $\tilde{x}^{\pi_i}$ централизует $\widetilde{Q}M_i/M_i$, и $\tilde{x}^{\pi_{i,j}}$ централизует $\widetilde{Q}M_{i,j}/M_{i,j}$. По лемме 2.7 (с нормальными подгруппами M_i и $M_{i,j}$) мы получаем, что $\tilde{x}$ централизует $\widetilde{Q}$.

Таким образом, $\langle L, \zeta v\rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и по лемме 2.5 существует картерова подгруппа F группы $\langle L, \zeta v\rangle$, содержащая Q. Поскольку $\langle L, \zeta v\rangle$ удовлетворяет условию **(C)**, теорема 1.2 влечет, что $X = K^{\omega}$ и F сопряжены, т. е. X содержит силовскую 2-подгруппу группы $\langle L, \zeta v\rangle$ и, с точностью до сопряжения в $\langle P_J, \zeta g\rangle$, K содержит силовскую 2-подгруппу группы $\langle P_J, \zeta v\rangle$. В частности, силовская 2-подгруппа Q_1 подгруппы Картана H лежит в K и Q_1 централизует $K \cap O_p(P_J) \neq \{e\}$; противоречие с леммой 3.3.

9 Картеровы подгруппы, порядок которых не делится на характеристику

Мы вновь находимся в условиях теоремы 7.1. Как мы отмечали в предыдущем параграфе, для любой группы A, удовлетворяющей условиям теоремы 7.1, факторгруппа A/G является абелевой и, для некоторого натурального t, изоморфна подгруппе группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_t$. Если факторгруппа A/G не является циклической, то группа $O^{p'}(G)$ является расщепленной и A содержит элемент τa, где τ — графовый автоморфизм группы $O^{p'}(G)$ и $a \in \overline{G}_{\sigma}$. Таким образом, если группа A/G не является циклической, или

$\Phi(\overline{G}) \neq A_n, D_{2n+1}, E_6$, то по лемме 4.6 и [10, лемма 2.2] любой полупростой элемент группы G сопряжен со своим обратным. По лемме 2.4 мы имеем, что $K_G = K \cap G$ является 2-группой. В условиях теоремы 7.1 группа A/G абелева и, если $\overline{A}_1$ — холлова $2'$-подгруппа группы A/G, то $\overline{A}_1$ — циклическая группа. Пусть x — прообраз порождающего элемента группы $\overline{A}_1$, взятый в K. Тогда $\langle x\rangle \cap G \leq \langle x\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq K \cap \overline{G}_\sigma = K \cap (A \cap \overline{G}_\sigma) = K \cap G$. Как мы заметили выше, $K \cap G$ является 2-группой, следовательно $\langle x\rangle \cap \overline{G}_\sigma = \{e\}$. По лемме 4.4 элемент x относительно группы $\overline{G}_\sigma$ сопряжен с некоторым полевым автоморфизмом нечетного порядка и по лемме 4.3 элемент x централизует силовскую 2-подгруппу группы G. Значит, K_G является силовской 2-подгруппой группы G (в частности, $p \neq 2$) и, так как A/G абелева, лемма 2.7 влечет, что K содержит силовскую 2-подгруппу группы A. Таким образом, в этом случае выполняется теорема 7.1. Поэтому мы можем предполагать, что $A = \langle \zeta g, G\rangle$ — полулинейная группа лиева типа, $K = \langle \zeta^k g, K_G\rangle$ — картерова подгруппа группы A, и $\Phi(\overline{G}) \in \{A_n, D_{2n+1}, E_6\}$. Как и в предыдущем параграфе, мы можем предполагать, что $k = 1$. Поскольку G_ζ нетривиальна, то централизатор $C_G(\zeta g)$ нетривиален, следовательно, подгруппа K_G также нетривиальна. Поэтому, $Z(K) \cap K_G \neq \{e\}$. Рассмотрим элемент $x \in Z(K) \cap K_G$ простого порядка. Тогда $K \in C_A(x) = \langle \zeta g, C_G(x)\rangle$. Далее, $C_{\overline{G}}(x)^0 = \overline{C}$ является связной σ-инвариантной редуктивной подгруппой максимального ранга группы $\overline{G}$. Более того, $\overline{C}$ является характеристической подгруппой группы $C_{\overline{G}}(x)$ и $C_{\overline{G}}(x)/\overline{C}$ изоморфна подгруппе группы Δ (см. [22, предложение 2.10]). Таким образом, K содержится в $\langle K, C\rangle$, где $C = \overline{C} \cap G$. Более того, по лемме 4.1 подгруппа $C = \overline{C} \cap G = T(G_1 * \ldots * G_m)$ нормальна в $C_A(x)$ и $K_G C/C$ изоморфна подгруппе группы Δ. Предположим, что $|K_G|$ не делится на 2.

Если $m = 0$, то $C = T = Z(C)$ — максимальный тор. Тогда тор $\overline{T}$ является $\bar{\zeta}g$-инвариантным. Ввиду леммы 4.7 получаем, что $N_A(C_A(x)) \neq C_A(x)$. Поскольку $C_A(x)$ в этом случае является разрешимой группой это дает противоречие с леммой 2.4.

Если $m \geqslant 1$, то $Z(C)$ и $G_1 * \ldots * G_m$ — нормальные подгруппы группы $\langle K, C\rangle$. Значит, мы можем рассмотреть $\widetilde{G} = \langle K, G_1 * \ldots * G_m * Z(C)\rangle / Z(C) \leq$

$\langle K, C\rangle/Z(C)$. Тогда $\widetilde{G} = \widetilde{K}(\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m)$, где $\widetilde{K} = KZ(C)/Z(C)$ — картерова подгруппа группы $\widetilde{G}$ (см. лемму 2.3) и $Z(\mathbf{P}G_i)$ тривиален. Далее, $\widetilde{K}$ действует сопряжениями на $\{\mathbf{P}G_1, \ldots, \mathbf{P}G_m\}$ и без ограничения общности можно предполагать, что $\{\mathbf{P}G_1, \ldots, \mathbf{P}G_m\}$ является $\widetilde{K}$-орбитой. Таким образом, мы находимся в условиях леммы 2.8, и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ — картерова подгруппа группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$. Более того $|\widetilde{K} \cap \mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m|$ не делится на характеристику. По индукции либо $\mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$, либо $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.1 и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_1) \cap \mathbf{P}G_1$ — нетривиальная 2-группа, в частности характеристика p нечетна. В любом случае $|K \cap G|$ делится на 2, что противоречит нашему предположению. Следовательно, порядок $|K_G|$ четен и можно считать, что $x \in Z(K) \cap K_G$ является инволюцией.

Запишем $\zeta g = \zeta_2 g_1 \cdot \zeta_{2'} g_2$, где $\zeta_2 g_1$ является 2-частью и $\zeta_{2'} g_2$ является $2'$-частью элемента ζg. По лемме 4.3 элемент $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу Q_G группы G, поэтому можно считать, что порядок элемента g_2 нечетен. С точностью до сопряжения в группе G можно считать, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы K_G. В частности, $\zeta_{2'}$ централизует x. Пусть Q — некоторая силовская 2-подгруппа группы $C_G(x)$. Тогда существует $y \in G$ такой, что $Q^y \leq Q_G$. Заменяя подгруппу K на сопряженную подгруппу K^y, можно считать, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$. Так как $\zeta_{2'} g_2$ централизует x, мы получаем, что $g_2 \in C_{\overline{G}_\sigma}(x)$. Более того, по лемме 3.1 следует, что $g_2 \in C_{\overline{G}}(x)^0$. В частности, g_2 нормализует каждую из G_i и централизует $Z(C)$ и $Z(C_G(x))$.

Заметим, что $\zeta_{2'}$ нормализует каждую из G_i и централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(C_G(x))$ (напомним, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$). Действительно, $\zeta_{2'}$ нормализует C, значит, нормализует характеристические подгруппы $O^{p'}(C) = G_1 * \ldots * G_m$ и $Z(C)$ группы C. Поэтому можно рассмотреть индуцированный автоморфизм $\zeta_{2'}$ группы

$$O^{p'}(C)/(Z(C) \cap O^{p'}(C) = \mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m.$$

Поскольку каждая группа $\mathbf{P}G_i$ имеет тривиальный центр и неразложима в прямое произведение собственных подгрупп, следствие из теоремы Крулля-Ремака-Шмидта [37, 3.3.10] влечет, что $\zeta_{2'}$ переставляет различные $\mathbf{P}G_i$. Поскольку $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$ и $C \trianglelefteq C_G(x)$, то $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы C, значит, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу $Q_1 \times \ldots \times Q_m$ группы $\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m$, где Q_i — силовская 2-подгруппа группы $\mathbf{P}G_i$. Если бы $\zeta_{2'}$ индуцировал нетривиальную подстановку на множестве $\{\mathbf{P}G_1, \ldots, \mathbf{P}G_m\}$, то он бы индуцировал нетривиальную подстановку на множестве $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Поскольку каждая группа Q_i нетривиальна, это невозможно. Таким образом, любой элемент нечетного порядка группы $\langle K, C\rangle$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(C)$ и нормализует каждую из G_i.

Если $\Phi(\overline{G}) = E_6$, то по лемме 3.1 централизатор любой инволюции группы G в группе $\overline{G}$ связен. По лемме 3.8 любая инволюция группы G содержится в таком максимальном торе T, что $N(G,T)/T \simeq W$, где W — группа Вейля группы $\overline{G}$. Хорошо известно, что $\overline{C}$ порождается тором $\overline{T}$ и $\overline{T}$-корневыми подгруппами. Запишем $\overline{C} = \overline{T}(\overline{G}_1 * \ldots * \overline{G}_k)$. Поскольку $\overline{T}_\sigma$ либо получен из максимального расщепленного тора $\overline{H}$ скручиванием элементом w_0 порядка 2, либо совпадает с $\overline{H}_\sigma$ и любой полевой автоморфизм действует тривиально на факторгруппе $N_{\overline{G}}(\overline{H})/\overline{H}$, то $\bar{\zeta}_{2'}$ нормализует каждую подгруппу $\overline{G}_i$. Значит, если $\Phi(\overline{G}_i) = D_4$, то $\bar{\zeta}_{2'}$ индуцирует полевой (а не графовый или графово-полевой) автоморфизм группы $\overline{G}_i$. Более того, поскольку σ действует тривиально на факторгруппе $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ (см. лемму 4.3), то [23, предложение 6] влечет, что σ нормализует каждую подгруппу $\overline{G}_i$. Следовательно, никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Если $\Phi(\overline{G})$ совпадает с A_n или D_n, то [15, предложения 7, 8, 10] влекут, что никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Следовательно, в любом случае никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Кроме того, лемма 3.1 влечет, что $|K_G : (K_G \cap C)|$ делит $|C_{\overline{G}}(x)/C_{\overline{G}}(x)^0|$ и $C_{\overline{G}}(x)/C_{\overline{G}}(x)^0$ является 2-группой. В [16] доказано, что если корневая система Φ имеет тип D_n и Ψ — ее подсистема типа D_4, то никакой элемент из $N_{W(\Phi)}(W(\Psi))$ не индуцирует симметрию порядка 3 диаграммы Дынкина корневой системы Ψ. Поскольку ζ^2 — полевой автоморфизм, отсутствие симметрии порядка 3 вместе с [23, предложение 6] влечет, что для каждой из G_i автоморфизм $\zeta_{2'}$ является полевым (а не графовым или графово-полевым). Следовательно, группа индуцированных автоморфизмов $\langle \mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_i), \mathbf{P}G_i\rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1 для всех i.

Далее рассмотрим $\widetilde{G} = \widetilde{K}(\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m) \leq \langle K, C\rangle/Z(C)$ (возможно, $m = 0$), где $\widetilde{K} = KZ(C)/Z(C)$ является картеровой подгруппой группы $\widetilde{G}$ (см. лемму 2.3) и, для всех i, группа $\mathbf{P}G_i$ неразложима в прямое произведение собственных подгрупп и $Z(\mathbf{P}G_i) = \{e\}$. По лемме 2.8 мы имеем, что $\mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ является картеровой подгруппой группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$. Поскольку $\mathbf{P}G_1$ является конечной группой лиева типа, и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1, по индукции мы получаем, что $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Аналогично мы имеем, что $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** для всех i. Поскольку

$$\mathrm{Aut}_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_i) \geq \mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i),$$

леммы 3.6 и 4.5 влекут, что $\mathrm{Aut}_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $C_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m) = \{e\}$, лемма 2.7 с нормальными подгруппами $C_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1) \cap N_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1), \ldots, C_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_m) \cap N_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1)$ влечет, что $N_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Далее,

$$|\langle K, C\rangle/Z(C) : N_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1)| = 2^t$$

и любой элемент нечетного порядка группы $\langle K, C\rangle/Z(C)$ нормализует $\mathbf{P}G_1$, таким образом, по лемме 2.9, мы получаем, что факторгруппа $\langle K, C\rangle/Z(C)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и по лемме 2.7 $\langle K, C\rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $|\mathbf{P}G_i| < \mathbf{Cmin}$ для всех i, то $\langle K, C\rangle$ удовлетворяет условию **(C)**. По лемме 2.5 мы получаем, что существует картерова подгруппа F группы $\langle K, C\rangle$, содержащая силовскую 2-подгруппу группы $\langle K, C\rangle$. По теореме 1.2 подгруппы F и K сопряжены в $\langle K, C\rangle$, таким образом, K содержит силовскую 2-подгруппу Q группы $\langle K, C\rangle$. Поскольку $|C_G(x) : C|$ является степенью двойки и $\langle K, C\rangle$ нормализует централизатор $C_G(x)$, мы получаем, что $|\langle K, C_G(x)\rangle : \langle K, C\rangle|$ есть степень двойки. Кроме того, по построению любой элемент нечетного порядка группы $\langle K, C_G(x)\rangle$ лежит в $\langle K, C\rangle$. Таким образом, по лемме 2.9 $\langle K, C_G(x)\rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и K содержит силовскую 2-подгруппу Q группы $\langle K, C_G(x)\rangle$.

Пусть ΓQ — силовская 2-подгруппа группы $\langle G, \zeta g\rangle$, содержащая Q, и $t \in Z(\Gamma Q) \cap G$. Тогда $t \in C_G(x)$, значит, $t \in Z(Q)$, поэтому $t \in Z(K)$. Таким образом, мы можем заменить x на t в предыдущих рассуждениях и получить, что $Q = \Gamma Q$, т. е. K содержит силовскую 2-подгруппу группы $\langle G, \zeta g\rangle$, что завершает доказательство теоремы 7.1.

10 Доказательство основной теоремы

До формулировки основной теоремы, отметим следствие из теоремы 7.1.

Следствие 10.1. $\mathbf{Cmin} = \infty$, *т. е.* $\mathcal{A} = \varnothing$.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{A} \neq \varnothing$ и $A \in \mathcal{A}$ такова, что $|F^*(A)| = \mathbf{Cmin}$. Поскольку $F^*(A) = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ для некоторой присоединенной простой связной линейной алгебраической группы $\overline{G}$ и некоторого отображения Фробениуса σ, обозначим пересечение $A \cap \overline{G}_\sigma$ через G. Как мы отмечали в начале параграфа 5, можно считать, что $A = KF^*(A) = KG$. Следовательно, группа A либо удовлетворяет условиям теоремы 6.1, либо удовлетворяет условиям теоремы 7.1. В обоих случаях мы доказали, что картеровы подгруппы группы A сопряжены, что противоречит выбору группы A. ◻

Для того, чтобы сформулировать основную теорему без использования классификации конечных простых групп, мы дадим следующее определение. Говорят, что конечная группа является *K-группой*, если все ее неабелевы композиционные факторы являются известными простыми группами.

Теорема 10.2. (Основная теорема) *Пусть G — конечная K-группа. Тогда картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

Доказательство. По [6, теорема 1.1], [9, таблица] и [10, теоремы 3.3–3.5]; и теоремам 5.1, 6.1, и 7.1 из настоящей работы мы получаем, что для любой известной простой группы S и любой нильпотентной подгруппы N

из группы ее автоморфизмов, картеровы подгруппы группы $\langle N, S\rangle$ сопряжены. Таким образом, группа G удовлетворяет условию **(C)**. Значит, по теореме 1.2, картеровы подгруппы группы G сопряжены. $\square$

Из леммы 2.3 и основной теоремы 10.2 следует, что гомоморфный образ картеровой подгруппы является картеровой подгруппой.

Теорема 10.3. *Пусть G — конечная K-группа, H — картерова подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа группы G. Тогда HN/N является картеровой подгруппой группы G/N.*

Автор выражает искреннюю благодарность профессору М.К. Тамбурини за исключительно полезное обсуждение статьи, позволившее существенно улучшить первоначальный вариант. Автор также благодарит А.В. Васильева, М.А. Гречкосееву, А.В. Заварницина и В.Д. Мазурова за указанные ошибки и неточности.

Список литературы

[1] *R. W. Carter*, Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups, Math. Z., **75** (1961), 136–139.

[2] *L. Di Martino and M.C. Tamburini*, I sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti di S_n e di A_n, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, **110** (1976), 235–241.

[3] *L. Di Martino and M. C. Tamburini*, Carter subgroups of projective linear groups, Boll. Un. Mat. Ital. B, **7** (1987), 905–915.

[4] *Н. А. Вавилов*, Нильпотентные самонормализуемые подгруппы общих линейных групп над конечным полем, ЛОМИ, **86** (1979), 34–39.

[5] *L. Di Martino, M. C. Tamburini and A. E. Zalesskii*, Carter subgroups in classical groups, J. London Math. Soc. (2), **55** (1997), 264–276.

[6] *A. Previtali, M. C. Tamburini, E. P. Vdovin*, The Carter subgroups of some classical groups, Bull. London Math. Soc., **36**, N 1 (2004), 145–155.

[7] *A. D'aniello*, Sull' esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in alcuni gruppi semplici, II, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **74** (1983), 1–6.

[8] *F. Dalla Volta, A. Lucchini, and M. C. Tamburini*, On the conjugacy problem for Carter subgroups, Comm. Algebra, **26**, N 2 (1998), 395–401.

[9] *Е. П. Вдовин*, О проблеме сопряженности картеровых подгрупп, СМЖ, **47**, N 4 (2006), 725–730.

[10] *M. C. Tamburini, E. P. Vdovin*, Carter subgroups of finite groups, J.Algebra, **255**, N 1 (2002), 148–163.

[11] *W. Feit, J. Thompson*, Solvability of groups of odd order, Pacif. J. Math., **13**, N 3 (1963), 775-1029.

[12] *R. W. Carter*, Simple groups of Lie type, John Wiley and Sons, 1972.

[13] *Дж. Хамфри*, Линейные алгебраические группы. Москва, «Наука», 1980.

[14] *R. Steinberg*, Automorphisms of finite linear groups, Canad.J.Math., **12**, N 4 (1960), 606–615.

[15] *R. W. Carter*, Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters, John Wiley and Sons, 1985.

[16] *R. W. Carter*, Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups, Proc. London Math. Soc. (3), **42**, N 1 (1981), 1–41.

[17] *D. Deriziotis*, Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematic der Universität Essen, **11** 1984.

[18] *D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon*, The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple K-groups. Mathematical Surveys and Monographs, **40**, N 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[19] *R. Steinberg*, Endomorphisms of algebraic groups, Mem.AMS, **80**, 1968.

[20] *A. Borel and J. de Siebental*, Les-sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, Comment.Math.Helv., **23** (1949), 200-221.

[21] *Е.Б.Дынкин*, Полупростые подалгебры полупростых алгбер Ли, Математический сборник, **30**, N 2 (1952), 349–462.

[22] *J. E. Humphreys*, Conjugacy classes in semisimple algebraic groups, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Mathematical Survey and Monographs, **43**, 1995.

[23] *R. W. Carter*, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Proc. London Math. Soc. (3), **37**, N 3 (1978), 491-507.

[24] *B. Hartley, G. Shute*, Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type, Quart.J.Math.Oxford Ser. (2), **35**, N 137 (1984), 49–71.

[25] *А. С. Кондратьев*, Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых групп, Мат. заметки, **78**, N 3 (2005), 368–376.

[26] *А. С. Кондратьев, В. Д. Мазуров*, 2-сигнализаторы конечных простых групп, Алгебра и логика, **42**, N 5 (2003), 594–623.

[27] *А. Борель, Р. Картер, К.В. Кэртис, Н. Ивахори, Т.А. Спрингер, Р. Стейнберг*, Семинар по алгебраическим группам, Москва, «Мир», 1973.

[28] *R. W. Carter*, Conjugacy classes in the Weyl group, Compositio Mathematica, **25**, N 1 (1972), 1-59.

[29] *D. Gorenstein, R. Lyons*, The local structure of finite groups of characteristic 2 type, Mem. AMS, **42** (1983), ISSN 0065-9266.

[30] *W. Feit and G. Zukerman*, Reality properties of conjugacy classes in spin groups and symplectic groups, Algebraists' homage:papers in ring theory and related topics, New Haven, 1981, 239–253.

[31] *H. N. Ward*, On Ree's series of simple groups, Trans. Amer. Math. Soc., **121**, N 1 (1966), 62–80.

[32] *В. М. Левчук, Я. Н. Нужин*, О строении групп Ри, Алгебра и логика, **24**, N 1 (1985), 26–41.

[33] *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson*, Atlas of finite groups, Clarendon Press, Oxford (1985).

[34] *M. J. Wonenburger*, Transformations which are products of involutions, J.Math.Mech., **16**, N 1 (1966), 32–38.

[35] *G. M. Seitz*, Unipotent elements, tilting modules, and saturation, Inv. Math, **141**, N 3 (2000), 467–503.

[36] *P. H. Tiep, A. E. Zalesski*, Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type, J.Group Theory, **8**, N 3 (2005), 291–315.

[37] *D. J. S. Robinson*, A Course in the Theory of Groups, Springer, 1996.

Вдовин Евгений Петрович

Институт математики им. Соболева СО РАН

пр. Академика Коптюга, 4

Новосибирск 630090

vdovin@math.nsc.ru