Сибирское отделение Российской Академии наук

Институт Математики им. С. Л. Соболева СО РАН

На правах рукописи

УДК 512.542

Вдовин Евгений Петрович

КАРТЕРОВЫ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел)

Д и с с е р т а ц и я
на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант
профессор д.ф.-м.н.
чл.-корр. РАН
В. Д. Мазуров

Новосибирск 2007

Оглавление

Глава 1. Введение

В настоящей главе мы кратко охарактеризуем общие результаты работы, а также напомним основные определения и теоремы, используемые в дальнейшем.

§1 Общая характеристика результатов работы

Напомним, что подгруппа конечной группы называется *картеровой подгруппой*, если она нильпотентна и самонормализуема. Ввиду хорошо известного результата Р. Картера, любая конечная разрешимая группа содержит в точности один сопряжённый класс картеровых подгрупп (см. [10]). Если не предполагать, что группа конечна, то картеровы подгруппы могут быть даже неизоморфными. Действительно, если N_1, N_2 — две неизоморфные нильпотентные группы, то они являются картеровыми подгруппами в своём свободном произведении. С другой стороны, конечная неразрешимая группа может не содержать картеровых подгрупп минимальным примером является знакопеременная группа степени 5. Однако, до сих пор неизвестно ни одной конечной группы, содержащей несопряжённые картеровы подгруппы и известна восходящая к Р. Картеру проблема.

Проблема. Сопряжены ли картеровы подгруппы конечных групп?

Изучению данной проблемы для различных классов конечных групп близких простым посвящено много работ различных авторов. В симметрических и знакопеременных группах картеровы подгруппы классифицировали Л. Ди Мартино и М. К. Тамбурини (см. [22]). В любой такой группе G, что $\mathrm{SL}_n(q) \leq G \leq \mathrm{GL}_n(q)$, картеровы подгруппы классифицировали Л. Ди Мартино и М. К. Тамбурини, и, в случае $G = \mathrm{GL}_n(q)$, Н. А. Вавилов (см. [23] и [2] соответственно). Для симплектических групп $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, полных унитарных групп $\mathrm{GU}_n(q)$ и, когда q нечётно, полных ортогональных групп $\mathrm{GO}_n^{\pm}(q)$ классификация картеровых подгрупп была получена Л. Ди Мартино, А. Е. Залесским

и М. К. Тамбурини (см. [24]). Для некоторых спорадических простых групп картеровы подгруппы найдены в [18]. В перечисленных выше неразрешимых группах картеровы подгруппы совпадают с нормализаторами силовских 2-подгрупп и потому сопряжены.

Назовём конечную группу G *минимальным контрпримером к проблеме сопряжённости* или просто *минимальным контрпримером*, если группа G содержит несопряжённые картеровы подгруппы, и в любой группе H, удовлетворяющей неравенству $|H| < |G|$, картеровы подгруппы сопряжены. В работе [19] Ф. Далла Вольта, А. Луккини и М. К. Тамбурини доказали, что минимальный контрпример должен быть почти простым. Этот результат позволяет надеяться на решение проблемы сопряжённости с помощью классификации конечных простых групп.

Заметим, что использование результата Ф. Далла Вольты, А. Луккини и М. К. Тамбурини для классификации картеровых подгрупп в почти простых группах существенно зависит от классификации конечных простых групп. Действительно, чтобы использовать индукционное утверждение о том, что картеровы подгруппы в любой собственной подгруппе минимального контрпримера сопряжены, необходимо знать, что изучены все почти простые группы порядка меньшего, чем порядок минимального контрпримера. Чтобы избежать использования классификации конечных простых групп, мы усиливаем результат Ф. Далла Вольты, А. Луккини и М. К. Тамбурини, доказывая, что если картеровы подгруппы в группах индуцированных автоморфизмов любого неабелева композиционного фактора сопряжены, то они сопряжены и во всей группе.

Для индукционного описания картеровых подгрупп в почти простых группах необходима информация о том, как ведут себя картеровы подгруппы при гомоморфизмах и при пересечении с нормальными подгруппами, т. е. ответы на следующие проблемы.

Проблема. Будет ли гомоморфный образ картеровой подгруппы вновь картеровой подгруппой?

Проблема. Будет ли пересечение картеровой подгруппы с нормальной подгруппой вновь картеровой подгруппой (нормальной подгруппы)?

Первая проблема тесно связана с проблемой сопряжённости, а именно, в случае положительного ответа на проблему сопряжённости, ответ на первую проблему также будет положительным. Поэтому, изучая картеровы подгруппы в почти простых группах, мы будем решать обе эти проблемы вместе. Легко понять, что ответ на вторую проблему отрицательный. Действительно,

рассмотрим разрешимую группу Sym_3 и её нормальную подгруппу индекса 2 — Alt_3. Тогда картерова подгруппа группы Sym_3 совпадает с её силовской 2-подгруппой, в то время как картерова подгруппа группы Alt_3 совпадает с её силовской 3-подгруппой. Всвязи с этим в работе мы исследуем ряд свойств, которые связывают картеровы подгруппы в группе и некоторых её нормальных подгруппах.

Настоящая работа разбита на 7 глав, включая введение. Во введении мы приводим общие результаты работы, а также необходимые определения и результаты, используемые далее.

Во второй главе мы доказываем, что картеровы подгруппы конечной группы сопряжены, если они сопряжены в индуцированной группе автоморфизмов любого её неабелева композиционного фактора, тем самым усиливая результаты Ф. Далла Вольты, А. Луккини и М. К. Тамбурини. Кроме того, во второй главе получен ряд свойств картеровых подгрупп. Результаты данной главы опубликованы в работах [48] и [51]; докладывались на международных конференциях в Екатеринбурге (Международная конференция, посвященная 100-летию П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, 29 августа–3 сентября, 2005), в Новосибирске («Мальцевские чтения», 15–17 ноября, 2005), в Нальчике (Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина, 10–15 июля, 2006), в Падуе (Италия) («Teoria dei gruppi ed applicazioni» 27–29 сентября, 2006), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске и семинаре «Теория групп» МГУ.

В третьей главе мы изучаем проблему сопряжённости элементов простого порядка в конечных группах лиева типа. В конце третьей главы, с помощью результатов о сопряжённости, мы получаем классификацию картеровых подгрупп в широком классе почти простых групп. Результаты данной главы получены в неразрывном соавторстве с итальянским математиком М. К. Тамбурини и опубликованы в работе [46]. Они докладывались на международных конференциях в Брешии (Италия) («Teoria dei gruppi ed applicazioni», 24–26 октября, 2001) и в Новосибирске («Мальцевские чтения», 17–19 ноября, 2003), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске и на семинаре кафедры алгебры в университете г. Падуя (Италия).

В чётвертой главе, используя каноническое представление классических групп, мы классифицируем картеровы подгруппы в произвольной группе G, удовлетворяющей неравенствам $O^{p'}(S) \leq G \leq S$, где S — произвольная полная классическая группа. Результаты данной главы получены в неразрывном соавторстве с итальянскими математиками А. Превитали и М. К. Тамбурини и опубликованы в [47]. Они докладывались на международных конфе-

ренциях в Санкт-Петербурге (Международная алгебраическая конференция памяти З.И.Боревича, 17–23 сентября, 2002), на Иские (Италия) («Teoria dei gruppi ed applicazioni», 22–25 октября, 2002), в Новосибирске («Мальцевские чтения», 17–19 ноября, 2003) и в Иркутске (Международная алгебраическая конференция, посвященная 75-летию А.И.Кокорина, 25–28 августа, 2004), и на семинаре кафедры алгебры в университете г. Падуя (Италия).

В пятой главе мы вводим полулинейные группы лиева типа и соответствующие им полулинейные алгебраические группы и переносим на эти группы результаты о нормализаторах p-подгрупп и централизаторах полупростых элементов в группах лиева типа. Кроме того, мы получаем ряд дополнительных результатов о сопряжённости элементов простого порядка в этих группах. Данные результаты опубликованы в работах [49] и [51], докладывались на международных конференциях в Екатеринбурге (Международная конференция, посвященная 100-летию П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, 29 августа–3 сентября, 2005), в Новосибирске («Мальцевские чтения», 15–17 ноября, 2005), в Нальчике (Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина, 10–15 июля, 2006), в Падуе («Teoria dei gruppi ed applicazioni», 27–29 сентября, 2006), в Иркутске (Объединенный российско-китайский семинар по алгебре и логике, 6–11 августа, 2007), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске, и на семинаре «Теория групп» МГУ.

В шестой главе мы завершаем классификацию картеровых подгрупп в почти простых группах и доказываем, что картеровы подгруппы в почти простых группах сопряжены. В качестве следствия мы получаем положительное решение проблемы сопряжённости и доказываем, что гомоморфный образ картеровой подгруппы вновь является картеровой подгруппой. Данные результаты опубликованы в работах [49] и [51]; докладывались на международных конференциях в Екатеринбурге (Международная конференция, посвященная 100-летию П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина, 29 августа–3 сентября, 2005), Новосибирске («Мальцевские чтения», 15–17 ноября, 2005), в Новосибирске Новосибирске («Мальцевские чтения», 15–17 ноября, 2005), в Нальчике (Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина, 10–15 июля, 2006), в Падуе («Teoria dei gruppi ed applicazioni», 27–29 сентября, 2006), в Иркутске (Объединенный российско-китайский семинар по алгебре и логике, 6–11 августа, 2007), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске, и на семинаре «Теория групп» МГУ.

В седьмой главе мы изучаем вопрос о существовании картеровой подгруп-

пы в конечной группе, приводим критерий существования и строим пример, показывающий, что свойство содержать картерову подгруппу не наследуется при расширениях. Кроме того, в последнем параграфе седьмой главы мы приводим таблицы с классификацией картеровых подгрупп в почти простых группах. Данные результаты опубликованы в работе [50]; докладывались на международной конференции в Нальчике (Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 75-летию А.И.Старостина, 10–15 июля, 2006), в Падуе («Teoria dei gruppi ed applicazioni» 27–29 сентября, 2006), в Новосибирске («Мальцевские чтения», 14–16 ноября, 2006), в Иркутске (Объединенный российско-китайский семинар по алгебре и логике, 6–11 августа, 2007), на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске, и на семинаре «Теория групп» МГУ.

Я благодарен своему научному консультанту чл.-корр. РАН В. Д. Мазурову. Его вклад в моё развитие как математика, а также постоянная поддержка неоценимы. Я также искренне благодарю профессора М. К. Тамбурини, инициировавшую мою работу над данной проблематикой, а также оказавшую помощь в работе. Я особо признателен д.ф.-м.н. А. В. Васильеву, к.ф.-м.н. М. А. Гречкосеевой, к.ф.-м.н. А. В. Заварницину и к.ф.-м.н. Д. О.Ревину за полезное обсуждение работы, позволившее упростить ряд доказательств и исправить неточности и ошибки. Я также благодарен профессору А. С. Кондратьеву за ряд ценных замечаний, улучшивших окончательный текст работы. Я признателен и хотел бы почтить светлую память профессора Ю. И. Мерзлякова, пробудившего во мне интерес к алгебре и теории групп. Я также признателен всем сотрудникам лаборатории теории групп Института математики СО РАН и кафедры алгебры и математической логики Новосибирского госуниверситета. Присущая этим коллективам творческая и благожелательная атмосфера располагает к плодотворной научной деятельности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00550, 01–01–06184, 02–01–00495, 02–01–06226 и 05–01–00797), грантов Президента РФ для молодых учёных кандидатов наук (МК–1455.2005.1 и МК–3036.2007.1), СО РАН (грант № 29 для молодых ученых и Интеграционный проект 2006.1.2) и программы «Университеты России» (код проекта УР.04.01.202). Часть работы была выполнена во время моей стажировки в университете г. Падуя (Италия) и я благодарен этому университету, всем сотрудникам кафедры алгебры этого университета, и, особенно, профессору Ф. Менегаццо за поддержку.

§2 Обозначения и результаты из теории групп

Обозначения, используемые в настоящей работе, стандартны. Если G — группа, то записи $H \leq G$ и $H \trianglelefteq G$ означают соответственно, что H является подгруппой и нормальной подгруппой группы G. Через $|G : H|$ обозначен индекс подгруппы H в группе G, $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G. Если подгруппа H нормальна в G, то через G/H обозначается факторгруппа группы G по H. Если M — подмножество группы G, то символом $\langle M \rangle$ обозначается подгруппа, порождённая множеством M, символом $|M|$ — мощность множества M (или порядок элемента, если вместо множества стоит один элемент). Через $C_G(M)$ обозначается централизатор множества M в группе G, через $Z(G)$ — центр группы G. Сопряжение элемента x с помощью элемента y в группе G записывается как $x^y = y^{-1}xy$ (${}^y x = yxy^{-1}$), через $[x, y] = x^{-1}x^y$ обозначен коммутатор элементов x, y. Символ $[A, B]$ означает взаимный коммутант подгрупп A и B группы G. Для групп A и B выражения $A \times B$, $A * B$ и $A \leftthreetimes B$ обозначают соответственно прямое, центральное и полупрямое произведения групп A и B с нормальной подгруппой B. Если A и B такие подгруппы группы G, что $A \trianglelefteq B$, то факторгруппа B/A называется *секцией* группы G. Подгруппа Фиттинга группы G обозначена через $F(G)$, обобщённая подгруппа Фиттинга — через $F^*(G)$. Через $\Phi(G)$ обозначена подгруппа Фраттини группы G.

Множество силовских p-подгрупп конечной группы G будем обозначать $Syl_p(G)$. Если φ — гомоморфизм группы G, g — элемент группы G, то G^φ, g^φ — образы группы G и элемента g относительно гомоморфизма φ соответственно. Символом G_φ обозначено множество неподвижных точек группы G относительно эндоморфизма φ. Через $\mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Out}(G)$ и $\mathrm{Inn}(G)$ обозначены группы всех автоморфизмов, внешних автоморфизмов и внутренних автоморфизмов группы G соответственно. Если G — группа, мы обозначим через $\mathbf{P}G$ факторгруппу $G/Z(G)$. Хорошо известен изоморфизм $\mathbf{P}G \simeq \mathrm{Inn}(G)$, в частности, если $Z(G)$ тривиален, то $G \simeq \mathrm{Inn}(G)$ и мы можем предполагать, что $G \leq \mathrm{Aut}(G)$. Говорят, что конечная группа G *почти простая*, если существует простая группа S, удовлетворяющая $S \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$, т. е., $F^*(G) = S$ — простая группа. Для любого натурального t через $\mathbb{Z}_t$ обозначена циклическая группа порядка t.

Если π — множество простых чисел, то мы обозначим через π' его дополнение в множестве всех простых чисел. Для любого числа n через $\pi(n)$ обозначено множество простых делителей числа n, а через n_π — такой максимальный делитель числа n, что $\pi(n_\pi) \subseteq \pi$. Как обычно, мы обозначаем через

$O_\pi(G)$ максимальную нормальную π-подгруппу группы G и мы обозначаем через $O^{\pi'}(G)$ подгруппу, порождённую всеми π-элементами группы G. Если $\pi = \{2\}'$ — множество всех нечётных простых чисел, то $O_\pi(G) = O_{2'}(G)$ обозначается через $O(G)$. Если $g \in G$, то мы обозначим через g_π π-часть элемента g, т. е., $g_\pi = g^{|g|_{\pi'}}$.

Пусть G — группа, A, B, H — подгруппы группы G и B нормальна в A. Тогда $N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$. Если $x \in N_H(A/B)$, то x индуцирует автоморфизм $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ группы A/B. Таким образом, существует гомоморфизм группы $N_H(A/B)$ в $\mathrm{Aut}(A/B)$. Образ этого гомоморфизма обозначается через $\mathrm{Aut}_H(A/B)$ и называется *группой индуцированных автоморфизмов* подгруппы H на секции A/B. В частности, если $S = A/B$ — композиционный фактор группы G, то для любой подгруппы $H \leq G$ определена группа $\mathrm{Aut}_H(S) = \mathrm{Aut}_H(A/B)$. Отметим, что строение группы $\mathrm{Aut}_H(S)$ зависит от того, какой выбран композиционный ряд. Если A, H — подгруппы группы G, то $\mathrm{Aut}_H(A) = \mathrm{Aut}_H(A/\{e\})$ по определению.

§3 Линейные алгебраические группы

Необходимую информацию о строении и свойствах линейных алгебраических групп можно найти в [8]. Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться лишь линейные алгебраические группы, слово линейные, для краткости, будем опускать.

Если $\overline{G}$ — алгебраическая группа, то через $\overline{G}^0$ обозначена компонента единицы группы $\overline{G}$. Алгебраическая группа называется *полупростой*, если её радикал $R(\overline{G})$ тривиален, и алгебраическая группа называется *редуктивной*, если её унипотентный радикал $R_u(\overline{G})$ тривиален (в обоих случаях предполагается, что алгебраическая группа связна). Хорошо известно (см., например [8, теорема 27.5]), что связная полупростая алгебраическая группа — это центральное произведение связных простых алгебраических групп, а связная редуктивная алгебраическая группа $\overline{G}$ — это произведение тора $\overline{S}$ и полупростой группы $\overline{M}$, причём $\overline{S} = Z(\overline{G})^0$, $\overline{M} = \left[\overline{G}, \overline{G}\right]$, и группа $\overline{S} \cap \overline{M}$ конечна.

Если $\overline{G}$ — связная редуктивная алгебраическая группа, то пусть $\overline{T}$ — её максимальный тор (под *тором* всегда понимается связная диагонализируемая (d-) группа). *Рангом* связной алгебраической группы называется размерность её максимального тора. Через $\Phi(\overline{G})$ обозначена корневая система группы $\overline{G}$ относительно максимального тора $\overline{T}$ (она не зависит от выбора максимального тора) и $W(\overline{G}) \simeq N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ — *группа Вейля* группы G. Если

$\overline{G}$ — редуктивная группа ранга n, то размерность централизатора любого её элемента не меньше, чем n. Элементы, размерность централизатора которых равна n, называются *регулярными.* В частности, полупростой элемент s является регулярным, если $C_{\overline{G}}(s)^0$ — максимальный тор группы $\overline{G}$.

Напомним, что для любой корневой системы Φ существует такой набор корней $r_1, \ldots, r_n$, что каждый корень из Φ единственным образом представим в виде $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i$, где все коэффициенты α_i целочисленны и либо все неотрицательны, либо все неположительны. Такой набор корней называется *фундаментальной системой* корневой системы Φ, а элементы, входящие в фундаментальную систему, — *фундаментальными корнями.* При этом фундаментальная система является базисом пространства $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Размерность пространства $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ назовём *рангом* корневой системы Φ. Отметим, что ранги группы $\overline{G}$ и её корневой системы $\Phi(\overline{G})$ совпадают. Далее будем считать, что все фундаментальные корни положительны. Тогда корень r *положителен* в том и только в том случае, когда он представим в виде линейной комбинации фундаментальных корней с неотрицательными коэффициентами. Для корневой системы Φ через Φ^+ (Φ^-) обозначено множество положительных (отрицательных) корней. *Высотой* корня $r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i$ называется число $h(r) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. В любой неприводимой корневой системе Φ существует единственный корень максимальной высоты, который в дальнейшем будет обозначаться r_0. Заметим, что группа Вейля $W(\Phi)$ корневой системы Φ порождается отражениями в фундаментальных корнях — *фундаментальными отражениями.* Если через $l(w)$ обозначить минимальное количество множителей в разложении элемента w в произведение фундаментальных отражений (*длину*), то существует единственный элемент максимальной длины, обозначаемый в дальнейшем w_0, который является единственным элементом группы Вейля, переводящим все положительные корни в отрицательные. В общем случае $l(w)$ равно $|\Phi^- \cap (\Phi^+)^w|$, т. е. количеству положительных корней, которые элемент w переводит в отрицательные.

Пусть $\overline{G}$ — связная простая алгебраическая группа, π — её некоторое точное рациональное представление, Γ_π — решётка, порождённая весами представления π. Через Γ_{ad} обозначается решётка, порождённая корнями системы Φ, через Γ_{sc} — решётка, порождённая фундаментальными весами. Решётки Γ_{sc}, Γ_π и Γ_{ad} не зависят от конкретного представления группы $\overline{G}$, и справедливы следующие включения $\Gamma_{ad} \leq \Gamma_\pi \leq \Gamma_{sc}$ (см. [8, 31.1]). Известно, что для корневой системы данного типа существует несколько различных простых алгебраических групп, которые называются *изогениями.* Они различаются строением группы Γ_π и порядком конечного центра. В том случае, когда ре-

шётка Γ_π совпадает с Γ_{sc}, говорят, что группа $\overline{G}$ односвязна, и она обозначается через $\overline{G}_{sc}$. Если решётка Γ_π совпадает с Γ_{ad}, то говорят, что группа $\overline{G}$ имеет присоединённый тип, и она обозначается через $\overline{G}_{ad}$. Любая линейная алгебраическая группа с корневой системой Φ получается как факторгруппа группы $\overline{G}_{sc}$ по подгруппе из её центра. Центр группы $\overline{G}_{ad}$ тривиален, и она проста как абстрактная группа. Факторгруппа Γ_{sc}/Γ_π обозначается $\Delta(\overline{G})$ и называется *фундаментальной группой* группы $\overline{G}$. Факторгруппа Γ_{sc}/Γ_{ad} зависит лишь от корневой системы Φ и обозначается через $\Delta(\Phi)$. Хорошо известно, что $\Delta(\Phi)$ является циклической, за исключением корневой системы $\Phi = D_{2n}$, когда $\Delta(D_{2n}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ является элементарной абелевой группой порядка 4.

Пусть $\overline{B}$ — подгруппа Бореля, $\overline{T} \leq \overline{B}$ — максимальный тор и $\overline{U} = R_u(\overline{B})$ — максимальная связная унипотентная подгруппа группы $\overline{G}$. Существует единственная подгруппа Бореля $\overline{B}^-$ такая, что $\overline{B} \cap \overline{B}^- = \overline{T}$, обозначим через $\overline{U}^- = R_u(\overline{B}^-)$. Если мы зафиксируем произвольный порядок на $\Phi(\overline{G})$, то любой $u \in \overline{U}$ (соответственно $u \in \overline{U}^-$) можно единственным образом записать в виде

$$u = \prod_{r\in\Phi^+} x_r(t_r) \tag{1.1}$$

(соответственно $u = \prod_{r\in\Phi^-} x_r(t_r)$), где корни берутся в заданном порядке, элементы t_r лежат в поле определения группы $\overline{G}$ и $\{X_r, r \in \Phi\}$ — множество *одномерных* $\overline{T}$*-инвариантных подгрупп* (множество *корневых подгрупп*). Умножение элементов различных корневых подгрупп определяется *коммутаторной формулой Шевалле.*

Лемма 1.3.1. [11, 5.2.2] *Пусть $x_r(t)$, $x_s(u)$ — элементы, принадлежащие корневым подгруппам X_r и X_s соответственно и $r \neq -s$. Тогда*

$$[x_r(t), x_s(u)] = \prod_{ir+js\in\Phi; i,j>0} x_{ir+js}(C_{ijrs}(-t)^i u^j),$$

где константы C_{ijrs} не зависят от t и u.

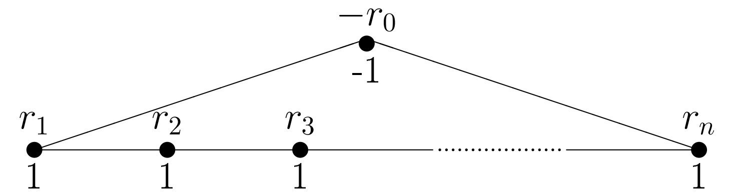
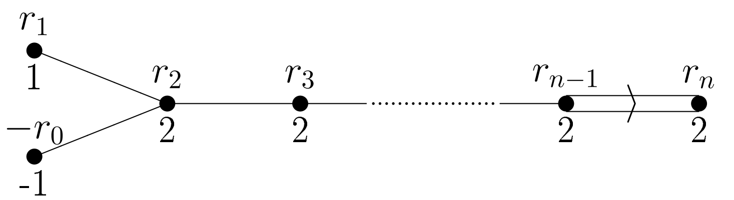
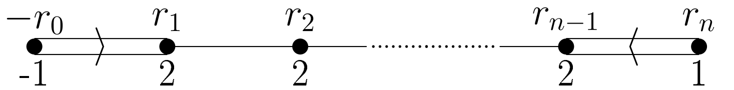
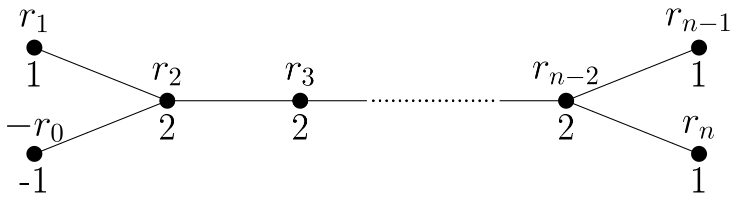
Содержательно, данная формула означает, что взаимный коммутант подгрупп X_r и X_s лежит в группе, порождённой корневыми подгруппами X_{ir+js}, где $i, j > 0$ и $ir + js \in \Phi$.

Пусть c_i — коэффициент, с которым фундаментальный корень r_i входит в разложение корня r_0. Простые числа, делящие коэффициенты c_i, называются *плохими* простыми числами. *Расширенной диаграммой Дынкина* называется

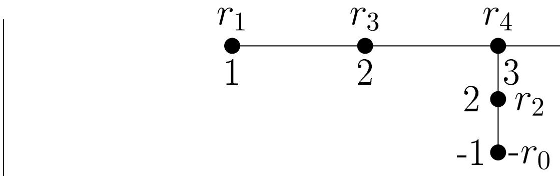
диаграмма, получаемая из обычной диаграммы Дынкина добавлением корня $-r_0$ и соединением его с фундаментальными корнями по обыкновенному правилу. Пусть $\overline{R}$ — (связная) редуктивная подгруппа максимального ранга связной простой алгебраической группы $\overline{G}$. Как мы уже отмечали, в этом случае $\overline{R} = \overline{G}_1 * \ldots * \overline{G}_k * Z(\overline{R})^0$, где $\overline{G}_i$ — связные простые алгебраические группы ранга меньшего, чем ранг группы $\overline{G}$. Более того, если $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ — корневые системы групп $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_k$ соответственно, то $\Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_k$ — подсистема корневой системы Φ. Существует простой алгоритм, принадлежащий Борелю и де Зибенталю [9] и, независимо, Дынкину [3], определения подсистем корневой системы. Нужно расширить диаграмму Дынкина до расширенной диаграммы Дынкина и выбросить из неё несколько вершин, затем повторить процедуру для получившихся связных компонент. Диаграммы, получаемые таким образом, являются диаграммами подсистем и любая диаграмма подсистемы может быть получена таким способом.

Для дальнейшего использования приведём в таблице 1.3.2 расширенные диаграммы Дынкина для всех неприводимых корневых систем и коэффициенты, с которыми фундаментальные корни входят в разложение корня r_0. Нумерация в таблице 1.3.2 выбрана в соответствии с [20].

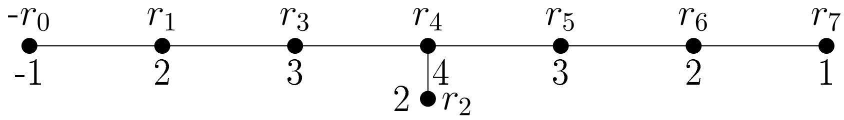
Таблица 1.3.2. Корневые системы и расширенные диаграммы Дынкина

Тип Ф	Расширенная диаграмма Дынкина
A_n	
B_n	
C_n	
D_n	

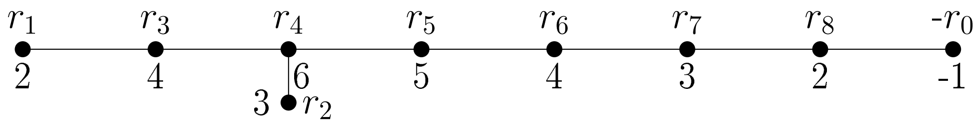
E_6



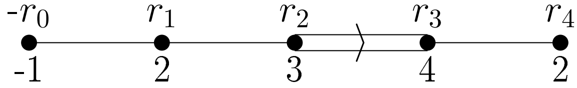
E_7



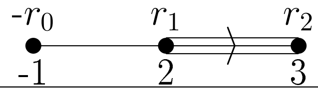
E_8



F_4



G_2



Хорошо известно, что для любого полупростого элемента $s \in G$, где G — связная редуктивная группа, компонента единицы $C_G(s)^0$ является редуктивной подгруппой максимального ранга и $C_G(s)/C_G(s)^0 \simeq D \leq \Delta(G)$ (см. лемму 1.5.2 ниже).

§4 Строение конечных групп лиева типа

Наши обозначения и определения конечных групп лиева типа в основном согласуются с [11] (кроме, собственно, определения конечных групп лиева типа, об этом чуть ниже). Если G — конечная группа лиева типа с тривиальным центром (мы не исключаем непростые группы лиева типа, такие как $A_1(2)$, все исключения даны в [11, теоремы 11.1.2 и 14.4.1] и приведены в таблице 1.4.1 ниже), то $\widehat{G}$ обозначает группу внутренне-диагональных автоморфизмов группы G. В виду [40, 3.2] мы имеем, что $\mathrm{Aut}(G)$ порождается внутренне-диагональными, полевыми и графовыми автоморфизмами. Отметим, что определение полевого и графового автоморфизмов, используемое в настоящей работе, несколько отличается от определений работы [40], точные определения даны в § 1 главы 5. Поскольку мы предполагаем, что $Z(G)$ тривиален, то G изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов и, значит, можно предполагать, что $G \leq \widehat{G} \leq \mathrm{Aut}(G)$.

Таблица 1.4.1. Группы лиева типа, не являющиеся простыми

Группа	Свойства
$A_1(2)$	Группа разрешима
$A_1(3)$	Группа разрешима
$B_2(2)$	$B_2(2) \simeq \mathrm{Sym}_6$
$G_2(2)$	$[G_2(2), G_2(2)] \simeq {}^2A_2(3)$
${}^2A_2(2)$	Группа разрешима
${}^2B_2(2)$	Группа разрешима
${}^2G_2(3)$	$[{}^2G_2(3), {}^2G_2(3)] \simeq A_1(8)$
${}^2F_4(2)$	$[{}^2F_4(2), {}^2F_4(2)]$ — простая группа Титса

Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ конечного поля положительной характеристики p. Здесь $Z(\overline{G})$ может быть нетривиальным. Эндоморфизм σ группы $\overline{G}$ называется *отображением Фробениуса*, если группа $\overline{G}_\sigma$ конечна. Группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ называются *каноническими конечными группами лиева типа*, и любая группа G, удовлетворяющая неравенствам $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$, называется *конечной группой лиева типа*. Если $\overline{G}$ является простой алгебраической группой присоединённого типа, то будем говорить, что G также имеет *присоединённый тип*. Заметим, что в [11] только группы $O^{p'}(\overline{G})$ называются группами лиева типа. Но позже в [15] Р. Картер говорит, что любая группа $\overline{G}_\sigma$ является конечной группой лиева типа для произвольной связной редуктивной группы $\overline{G}$. Более того, в [14] и [20] без каких-либо пояснений любая группа G, удовлетворяющая условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$, называется конечной группой лиева типа. Таким образом, приводя определение конечных групп лиева типа и канонических конечных групп лиева типа, мы намерены прояснить ситуацию здесь. Например, $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3)$ является канонической конечной группой лиева типа и $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(3)$ является конечной группой лиева типа. Заметим, что элемент порядка 3 не сопряжён со своим обратным в $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3)$ и сопряжён со своим обратным в $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(3)$. Поскольку такая информация о сопряжении важна во многих случаях (и очень важна и полезна в данной работе), мы находим разумным использовать такие обозначения.

В общем случае для данной конечной группы лиева типа G (если мы рассматриваем её как абстрактную группу) соответствующая алгебраическая группа определена неединственным образом. Например, если $G = \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(5) \simeq \mathrm{SL}_2(4)$, то G можно получить либо как $(\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{F}}_2))_\sigma$, либо как $O^{5'}((\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_5))_\sigma)$ (для подходящих σ). Значит, для любой конечной группы лиева типа G, мы фиксируем (некоторым способом) соответствующую алгебраическую группу

$\overline{G}$ и отображение Фробениуса σ такие, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$.

Мы говорим, что группы ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^2E_6(q^2)$ определены над $GF(q^2)$, группы ${}^3D_4(q^3)$ определены над $GF(q^3)$ и остальные группы определены над $GF(q)$. Поле $GF(q)$ во всех случаях называется *базовым полем*. В виду [28, лемма 2.5.8], если $\overline{G}$ — группа присоединённого типа, то $\overline{G}_\sigma$ — группа внутренне-диагональных автоморфизмов группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Если $\overline{G}$ односвязна, то $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ (см. [41, 12.4]). В любом случае, ввиду [28, теорема 2.2.6(g)] $\overline{G}_\sigma = \overline{T}_\sigma O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ для любого σ-инвариантного максимального тора $\overline{T}$ группы $\overline{G}$. Пусть $U \leq \langle X_r | r \in \Phi^+\rangle = \overline{U}$ — максимальная унипотентная подгруппа группы G (при этом $\overline{U}$ — максимальная связная σ-инвариантная унипотентная подгруппа группы $\overline{G}$). Тогда любой $u \in U$ единственным образом записывается в виде (1.1) где элементы t_r лежат в поле определения группы G. Если $O^{p'}(G)$ совпадает с одной из групп ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2E_6(q^2)$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, или ${}^2F_4(2^{2n+1})$, то будем говорить, что группа G является *скрученной*, в остальных случаях группа G называется *расщеплённой*. Если $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ — скрученная группа лиева типа и $r \in \Phi(\overline{G})$, то через $\bar{r}$ всегда обозначен образ корня r относительно симметрии корневой системы, соответствующей графовому автоморфизму, используемому при построении группы G. Иногда мы используем обозначение $\Phi^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$, и $\Phi^+(q) = \Phi(q)$ является расщеплённой группой лиева типа с базовым полем $GF(q)$, $\Phi^-(q) = {}^2\Phi(q^2)$ является скрученной группой лиева типа, определённой над полем $GF(q^2)$ (с базовым полем $GF(q)$).

Пусть $\overline{R}$ — замкнутая σ-инвариантная подгруппа группы $\overline{G}$. Тогда мы можем рассмотреть $R = G \cap \overline{R}$ и $N(G,R) = G \cap N_{\overline{G}}(\overline{R})$. Заметим, что $N(G,R) \neq N_G(R)$ в общем случае и мы называем группу $N(G,R)$ *алгебраическим нормализатором* группы R. Например, если мы рассмотрим $G = SL_n(2)$, то подгруппа диагональных матриц H группы G тривиальна, значит, $N_G(H) = G$. Но $G = (SL_n(\overline{\mathbb{F}}_2))_\sigma$, где σ — отображение Фробениуса $\sigma : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^2)$. Тогда $H = \overline{H}_\sigma$, где $\overline{H}$ является подгруппой диагональных матриц в $SL_n(\overline{\mathbb{F}}_2)$. Таким образом, $N(G,H)$ является группой мономиальных матриц в G. Мы используем термин «алгебраический нормализатор» для того, чтобы избегать подобных трудностей и чтобы сделать наши доказательства универсальными. Группа R называется *тором* (соотв. *редуктивной подгруппой*, *параболической подгруппой*, *максимальным тором*, *редуктивной подгруппой максимального ранга*) если $\overline{R}$ — тор (соотв. редуктивная подгруппа, параболическая подгруппа, максимальный тор, редуктивная подгруппа максимального ранга) группы $\overline{G}$. Максимальный σ-инвариантный тор $\overline{T}$ группы $\overline{G}$, для которого $\overline{T}_\sigma$ является подгруппой Картана группы $\overline{G}_\sigma$ называется *максимальным*

расщеплённым тором группы $\overline{G}$.

Предположим, что редуктивная подгруппа $\overline{R}$ является σ-инвариантной. Ввиду [41, 10.10] существует σ-инвариантный максимальный тор $\overline{T}$ группы $\overline{R}$. Пусть $\overline{G}_{i_1},\dots,\overline{G}_{i_{j_i}}$ — σ-орбита группы $\overline{G}_{i_1}$. Рассмотрим индуцированное действие отображения σ на факторгруппе

$$(\overline{G}_{i_1}*\ldots*\overline{G}_{i_{j_i}})/Z(\overline{G}_{i_1}*\ldots*\overline{G}_{i_{j_i}})\simeq \mathbf{P}\overline{G}_{i_1}\times\ldots\times\mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}.$$

Поскольку $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}\simeq\ldots\simeq\mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}$ являются простыми (как абстрактные группы), то σ индуцирует циклическую подстановку множества $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1},\dots,\mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}$, и можно считать, что нумерация выбрана так, что $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}^{\sigma}=\mathbf{P}\overline{G}_{i_2}$, …, $\mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}^{\sigma}=\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$. Таким образом, справедливо равенство

$$(\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}\times\ldots\times\mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma=\\ \{x\mid x=g\cdot g^\sigma\cdot\ldots\cdot g^{\sigma^{j_i-1}}\text{ для некоторого } g\in\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}\}_\sigma\simeq(\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}.$$

Ввиду [41, 10.15] группа $\mathbf{P}\overline{G}_{\sigma^{j_i}}$ конечна, значит, $O^{p'}((\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}})$ является канонической конечной группой лиева типа, возможно, с бóльшим базовым полем, чем базовое поле группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.

Пусть $\overline{B}_{i_1}$ — прообраз σ^{j_i}-инвариантной подгруппы Бореля группы $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$ в группе $\overline{G}_{i_1}$ относительно естественного эпиморфизма, и $\overline{T}_{i_1}$ — σ^{j_i}-инвариантный максимальный тор группы $\overline{G}_{i_1}$, лежащий в $\overline{B}_{i_1}$ (их существование следует из [41, 10.10]). Тогда, как следует из замечания в начале параграфа 11 из [41], подгруппы $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$, порождённые $\overline{T}_{i_1}$-инвариантными корневыми подгруппами, взятыми по всем положительным и отрицательным корням соответственно, также являются σ^{j_i}-инвариантными. Поскольку $\overline{G}_{i_1}$ — простая алгебраическая группа, то $\overline{G}_{i_1}$ порождается подгруппами $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$. Далее, $Z(\overline{G}_{i_1}*\ldots*\overline{G}_{i_{j_i}})$ состоит из полупростых элементов, поэтому ограничение естественного эпиморфизма $\overline{G}_{i_1}\to\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$ на $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$ есть изоморфизм. Следовательно, для любого k подгруппы $(\overline{U}_{i_1})^{\sigma^k}$ и $(\overline{U}_{i_1}^-)^{\sigma^k}$ являются максимальными σ^{j_i}-инвариантными связными унипотентными подгруппами группы $\overline{G}_{i_k}$ и порождают группу $\overline{G}_{i_k}$.

Таким образом, $\overline{U}_{i_1}\times(\overline{U}_{i_1})^\sigma\times\ldots\times(\overline{U}_{i_1})^{\sigma^{j_i-1}}$ и $\overline{U}_{i_1}^-\times(\overline{U}_{i_1}^-)^\sigma\times\ldots\times(\overline{U}_{i_1}^-)^{\sigma^{j_i-1}}$ являются максимальными σ-инвариантными связными унипотентными подгруппами группы $\overline{G}_{i_1}*\ldots*\overline{G}_{i_{j_i}}$ и порождают группу $\overline{G}_{i_1}*\ldots*\overline{G}_{i_{j_i}}$. В си-

лу [41, следствие 12.3(a)], мы имеем

$$O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma) = \\ \langle(\overline{U}_{i_1} \times (\overline{U}_{i_1})^\sigma \times \ldots \times (\overline{U}_{i_1})^{\sigma^{j_i-1}})_\sigma, (\overline{U}^-_{i_1} \times (\overline{U}^-_{i_1})^\sigma \times \ldots \times (\overline{U}^-_{i_1})^{\sigma^{j_i-1}})_\sigma\rangle \simeq \\ \langle(\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}^-_{i_1})_{\sigma^{j_i}}\rangle = O^{p'}((\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}).$$

В силу [41, 11.6 и следствие 12.3], группа $\langle(\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}^-_{i_1})_{\sigma^{j_i}}\rangle$ является канонической конечной группой лиева типа. Более того, из приведённых выше рассуждений следует, что группы $\langle(\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}^-_{i_1})_{\sigma^{j_i}}\rangle/Z(\langle(\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}^-_{i_1})_{\sigma^{j_i}}\rangle)$ и $O^{p'}((\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}})$ изоморфны. Обозначая $O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma)$ через G_i, мы получаем, что G_i является канонической конечной группой лиева типа для всех i. Подгруппы G_i группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, возникающие таким образом, называются *подсистемными подгруппами* группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.

Поскольку $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{j_i}$ является σ-инвариантной подгруппой, то $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{j_i} \cap \overline{T}$ является σ-инвариантным максимальным тором группы $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{j_i}$. Следовательно, мы можем предполагать, что для любой σ-орбиты $\{\overline{G}_{i_1}, \ldots, \overline{G}_{i_{j_i}}\}$, пересечение $\overline{T} \cap \overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}}$ является максимальным σ-инвариантным тором группы $\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}}$. Тогда $\overline{R}_\sigma = \overline{T}_\sigma(G_1 * \ldots * G_m)$ и $\overline{T}_\sigma$ нормализует каждую из групп G_i.

Для σ-орбиты $\{\overline{G}_{i_1}, \ldots, \overline{G}_{i_{j_i}}\}$ группы $\overline{G}_{i_1}$, где $G_i = O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \ldots * \overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma)$, рассмотрим $\mathrm{Aut}_{\overline{R}_\sigma}(G_i)$. Поскольку $G_1 * \ldots * G_{i-1} * G_{i+1} * \ldots * G_k * \overline{Z}_\sigma \leq C_{\overline{R}_\sigma}(G_i)$, мы имеем, что $\mathrm{Aut}_{\overline{R}_\sigma}(G_i) \simeq \left(\overline{T}_\sigma G_i\right)/Z\left(\overline{T}_\sigma G_i\right)$. Из [28, предложение 2.6.2] следует, что автоморфизмы, индуцируемые тором $\overline{T}_\sigma$ на G_i, являются диагональными. Следовательно, справедливы включения $\mathbf{P}G_i \leq \mathrm{Aut}_{\overline{R}_\sigma}(G_i) \leq \widehat{\mathbf{P}G_i}$, в частности $\mathrm{Aut}_{\overline{R}_\sigma}(G_i)$ является конечной группой лиева типа.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\overline{L} \trianglelefteq \overline{H} \leq \overline{G}$, где L и H σ-инвариантны и замкнуты. Очевидно, что σ индуцирует действие на H/L и, если L связна, то теорема Ленга-Стейнберга (лемма 1.5.3) влечёт $(H/L)_\sigma = H_\sigma/L_\sigma$. Пусть $\overline{R}$ — σ-инвариантная связная редуктивная подгруппа максимального ранга (в частности, $\overline{R}$ может быть максимальным тором) группы G. Поскольку группы $N_{\overline{G}}(\overline{R})/\overline{R}$ и $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ изоморфны, где W — группа Вейля группы $\overline{G}$, $W_{\overline{R}}$ — группа Вейля группы $\overline{R}$ (и она является подгруппой группы W), мы получаем индуцированное действие автоморфизма σ на $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ и мы говорим, что $w_1 \equiv w_2$, для $w_1, w_2 \in N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ если существует элемент $w \in N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$, удовлетворяющий равенству $w_1 = w^{-1}w_2w^\sigma$. Пусть $Cl(\overline{G}_\sigma, \overline{R})$ — множество $\overline{G}_\sigma$-сопряжённых классов σ-инвариантных подгрупп $\overline{R}^g$, где $g \in \overline{G}$. Тогда $Cl(\overline{G}_\sigma, \overline{R})$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством σ-сопряжённых классов $Cl(N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}, \sigma)$. Если w —

элемент группы $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$, и $(\overline{R}^g)_\sigma$ соответствует σ-сопряженному классу элемента w, то говорят, что $(\overline{R}^g)_\sigma$ получена «скручиванием» группы $\overline{R}$ элементом $w\sigma$. При этом $(\overline{R}^g)_\sigma \simeq \overline{R}_{\sigma w}$. Конструкция «скручивания» хорошо известна и вместе с необходимыми результатами приведена, например, в работе [13]. Когда $\overline{H} = \overline{T}$ является σ-инвариантным максимальным тором и $W = N_G(T)/T$, то по [15, предложение 3.3.6]

$$\left(\frac{N_G(T_w)}{T_w}\right)_\sigma = \frac{(N_G(T_w))_\sigma}{(T_w)_\sigma} \simeq C_{W,\sigma}(w) = \{x \in W \mid \sigma(x)wx^{-1} = w\}. \qquad (1.2)$$

Предположим теперь, что группа $\overline{R}$ является σ-инвариантной параболической подгруппой группы $\overline{G}$ и $\overline{U}$ — её унипотентный радикал. Тогда она содержит такую связную редуктивную подгруппу $\overline{L}$, что $\overline{R}/\overline{U} \simeq \overline{L}$. Подгруппа $\overline{L}$ называется *фактором Леви* группы $\overline{R}$. Более того, если $\overline{Z} = Z(\overline{L})^0$, то $\overline{L} = C_{\overline{G}}(\overline{Z})$ (см. [8, 30.2]). Пусть $Rad(\overline{R})$ — радикал группы $\overline{R}$. Тогда он является σ-инвариантной связной разрешимой подгруппой, значит, по [41, 10.10], он содержит σ-инвариантный максимальный тор $\overline{Z}$. Далее, $C_{\overline{G}}(\overline{Z}) = C_{\overline{R}}(\overline{Z})$ есть σ-инвариантный фактор Леви группы $\overline{R}$. Таким образом, любая σ-инвариантная параболическая подгруппа группы $\overline{G}$ содержит σ-инвариантный фактор Леви $\overline{L}$ и $\overline{L}$ является связной редуктивной подгруппой максимального ранга группы $\overline{G}$.

§5 Известные результаты

В данном параграфе мы напомним ряд структурных результатов, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

Лемма 1.5.1. [31, теорема 2.2] *Пусть $\overline{G}$ — связная редуктивная алгебраическая группа, $s \in \overline{G}$ — полупростой элемент группы $\overline{G}$ и $\overline{T}$ — максимальный тор группы $\overline{G}$, содержащий элемент s.*

Тогда $C_{\overline{G}}(s)$ — редуктивная подгруппа группы $\overline{G}$ максимального ранга (хотя и не обязательно связная). Она порождается тором $\overline{T}$, теми $\overline{T}$-корневыми подгруппами X_r, для которых $s^r = e$ и представителями n_w элементов $w \in W$, которые коммутируют с s. При этом $C_{\overline{G}}(s)^0$ порождается тором $\overline{T}$, теми $\overline{T}$-корневыми подгруппами X_r, для которых $s^r = e$ и любой унипотентный элемент, централизующий s, лежит в $C_{\overline{G}}(s)^0$.

Лемма 1.5.2. [31, предложение 2.10] *Пусть $\overline{G}$ — простая алгебраическая группа и s — её полупростой элемент конечного порядка.*

Тогда факторгруппа $C_{\overline{G}}(s)/C_{\overline{G}}(s)^0$ изоморфна подгруппе фундаментальной группы $\Delta(\overline{G})$. В частности, если группа $\overline{G}$ односвязна, то $C_{\overline{G}}(s)$ связен.

Лемма 1.5.3. [41, теорема 10.1] *Пусть $\overline{G}$ — связная алгебраическая группа и σ — отображение Фробениуса. Тогда отображение $x \mapsto x^{-1}x^{\sigma}$ сюръективно.*

Следующая лемма хорошо известна как теорема Бореля-Титса.

Лемма 1.5.4. *Пусть X — такая подгруппа конечной группы лиева типа G, что подгруппа $O_p(X)$ нетривиальна. Тогда существует такая σ-инвариантная параболическая подгруппа $\overline{P}$ группы $\overline{G}$, что $X \leq \overline{P}$ и $O_p(X) \leq R_u(\overline{P})$.*

Доказательство. Определим $U_0 = O_p(X)$, $N_0 = N_{\overline{G}}(U_0)$. Тогда $U_i = U \cdot R_u(N_{i-1})$ и $N_i = N_{\overline{G}}(U_i)$. Очевидно U_i, N_i являются σ-инвариантными для всех i. Ввиду [8, предложение 30.3], цепь подгрупп $N_0 \leq N_1 \leq \ldots \leq N_k \leq \ldots$ конечна и $\overline{P} = \cup_i N_i$ является собственной параболической подгруппой. Очевидно, что $\overline{P}$ является σ-инвариантной. □

Лемма 1.5.5. (Лемма Хартли-Шута [30, лемма 2.2]) *Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_{\sigma})$ — конечная каноническая присоединённая группа лиева типа с полем определения $GF(q)$. Пусть H — подгруппа Картана группы G и $s \in GF(q)$. Если $r = \bar{r}$ и группа G скрученная, то предположим также, что s лежит в базовом поле группы G. Тогда существует такой элемент $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = s$, за исключением следующих случаев, в которых $h(\chi)$ может быть выбран так, чтобы $\chi(r)$ имел указанные значения:*

(а) *$G = A_1(q)$, $\chi(r) = s^2$;*

(б) *$G = C_n(q)$, r — длинный корень, $\chi(r) = s^2$;*

(в) *$G = {}^2A_2(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^3$;*

(г) *$G = {}^2A_3(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^2$;*

(д) *$G = {}^2D_n(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^2$;*

(е) *$G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, $r = a$ или $r = 3a + b$, где a — короткий, b — длинный фундаментальные корни, $\chi(r) = s^2$.*

Глава 2. Критерий сопряжённости картеровых подгрупп

§1 Краткий обзор результатов главы

Определение 2.1.1. Конечная группа G удовлетворяет условию **(C)**, если для любого неабелева композиционного фактора S любого композиционного ряда группы G и любой нильпотентной подгруппы N группы G картеровы подгруппы группы индуцированных автоморфизмов $\langle \operatorname{Aut}_N(S), S \rangle$ сопряжены (в частности, они могут не существовать).

Лемма 2.1.2. *Пусть G — конечная группа, H — нормальная подгруппа группы G, $S = (A/H)/(B/H)$ — композиционный фактор группы G/H и L — подгруппа группы G. Тогда $\operatorname{Aut}_L(A/B) \simeq \operatorname{Aut}_{LH/H}((A/H)/(B/H))$.*

Доказательство. Поскольку $H \leq B$, то $H \leq C_G(A/B)$, следовательно, можно считать, что $L = LH$. Кроме того, можно предполагать, что $L \leq N_G(A) \cap N_G(B)$ и $G = LA$. Тогда действие, задаваемое на A/B по правилу $x : Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ совпадает с действием на $(A/H)/(B/H)$, задаваемом по правилу $xH : BaH \mapsto Bx^{-1}axH$, откуда следует лемма. □

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.1.3. *Пусть G — конечная группа, H — нормальная подгруппа группы G и $\overline{N}$ — нильпотентная подгруппа группы $\overline{G} = G/H$. Тогда существует такая нильпотентная подгруппа N группы G, что $NH/H = \overline{N}$.*

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $G/H = \overline{N}$. Существует такая подгруппа U группы G, что $UH = G$. Выберем среди таких подгрупп подгруппу минимального порядка. Тогда $U \cap H \leq \Phi(U)$, где $\Phi(U)$ — подгруппа Фраттини группы U. Действительно, если существует максимальная подгруппа M группы U, несодержащая $U \cap H$, то, очевидно, $MH = G$, что противоречит минимальности группы U. Таким образом, группа $U/\Phi(U)$ нильпотентна, следовательно, группа U нильпотентна и $N = U$. □

Из лемм 2.1.2 и 2.1.3 следует, что если конечная группа G удовлетворяет условию **(C)**, то для любой её нормальной подгруппы N и разрешимой подгруппы H, группы G/N и HN удовлетворяют **(C)**.

В данной главе мы докажем, что если группа G удовлетворяет условию **(C)**, то её картеровы подгруппы сопряжены. Более точно, будет доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.4. *Если конечная группа G удовлетворяет условию* **(C)**, *то картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

Далее в §§ 1, 2 мы предполагаем, что X — это контрпример к теореме 2.1.4 минимального порядка, т. е. что X является конечной группой, удовлетворяющей условию **(C)**, и X содержит несопряжённые картеровы подгруппы, но картеровы подгруппы в любой группе M порядка меньшего, чем $|X|$, удовлетворяющей условию **(C)**, сопряжены.

§2 Предварительные результаты

Напомним, что X — это контрпример к теореме 2.1.4 минимального порядка.

Лемма 2.2.1. *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условию* **(C)**, *и $|G| \leqslant |X|$. Пусть H — картерова подгруппа группы G. Если N — нормальная подгруппа группы G, то HN/N является картеровой подгруппой факторгруппы G/N.*

Доказательство. Поскольку HN/N нильпотентна, нам нужно лишь доказать, что она самонормализуема в G/N. Ясно, что это верно, если $G = HN$. Значит, предположим, что $M = HN < G$. Ввиду минимальности группы X равенство $M^x = M$, $x \in G$, влечёт $H^x = H^m$ для некоторого $m \in M$. Отсюда $xm^{-1} \in N_G(H) = H$ и $x \in M$. Это доказывает, что HN/N является нильпотентной и самонормализуемой в G/N. □

Лемма 2.2.2. *Пусть B — минимальная нормальная подгруппа группы X, и H, K — несопряжённые картеровы подгруппы группы X.*

(1) *B неразрешима.*

(2) *$X = BH = BK$.*

(3) *B является единственной минимальной нормальной подгруппой группы X.*

Доказательство. (1) Мы дадим доказательство от противного. Предположим, что B разрешима, и пусть $\pi : X \to X/B$ — канонический гомоморфизм. По лемме 2.2.1, H^π и K^π являются картеровыми подгруппами группы X/B. Ввиду минимальности группы X, существует такой $\bar{x} = Bx$, что $(K^\pi)^{\bar{x}} = H^\pi$. Отсюда $K^x \leq BH$. Поскольку BH разрешима, K^x сопряжена с H в BH, следовательно K сопряжена с H в X; противоречие.

(2) Предположим, что $BH < X$. По лемме 2.2.1 ввиду минимальности группы X подгруппы BH/B и BK/B сопряжены в X/B. Значит, существует $x \in X$ такой, что $K^x \leq BH$. Из минимальности группы X следует, что K^x сопряжена с H в BH, тем самым K сопряжена с H в X; противоречие.

(3) Предположим, что M является минимальной нормальной подгруппой группы X, отличной от B. По (1) M неразрешима. С другой стороны, $MB/B \simeq M$ является подгруппой нильпотентной группы $X/B \simeq H/H \cap B$; противоречие. □

Лемма 2.2.3. *Пусть K — картерова подгруппа конечной группы G. Предположим, что существует нормальная подгруппа $B = T_1 \times \ldots \times T_k$ группы G такая, что $G = KB$, $Z(T_i) = \{e\}$ и T_i не разложима в прямое произведение собственных подгрупп для всех i. Тогда $\mathrm{Aut}_K(T_i)$ является картеровой подгруппой группы $\langle \mathrm{Aut}_K(T_i), T_i \rangle$.*

Доказательство. Предположим, что наше утверждение ложно и G является контрпримером с минимальным k, тогда $k > 1$. Поскольку каждая группа T_i имеет тривиальный центр и неразложима в прямое произведение собственных подгрупп, следствие из теоремы Крулля-Ремака-Шмидта [37, 3.3.10] влечёт, что действие сопряжением группы G на множестве $\{T_1, \ldots, T_k\}$ индуцирует подстановки этого множества. Ясно, что G действует транзитивно сопряжением на множестве $\Omega := \{T_1, \ldots, T_k\}$. Мы можем предполагать, что группы T_j заиндексированы так, что G действует примитивно на множестве $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_p\}$, $p > 1$, где для каждого i

$$\Delta_i := \{T_{1+(i-1)l}, \ldots, T_{il}\}, \quad k = pl.$$

Обозначим через $\varphi : G \to \mathrm{Sym}_p$ индуцированное подстановочное представление. Очевидно, $B \leq \ker \varphi$, так что $G^\varphi = (BK)^\varphi = K^\varphi$ — примитивная нильпотентная подгруппа группы Sym_p. Следовательно, p является простым и G^φ — циклическая группа порядка p. В частности, $Y := \ker \varphi$ совпадает со стабилизатором любого Δ_i, так что φ подстановочно эквивалентно представлению группы G на правых смежных классах по Y. Для любого $i = 1, \ldots, p$

пусть $S_i = T_{1+(i-1)l} \times \cdots \times T_{il}$. Тогда $Y = N_G(S_i)$ и $B = S_1 \times \cdots \times S_p$. Рассмотрим $\xi : Y \to \mathrm{Aut}_Y(S_1)$, пусть $A = Y^\xi$, $S = S_1^\xi$. Очевидно, S является нормальной подгруппой группы A; более того, S изоморфна S_1, поскольку S_1 имеет тривиальный центр. С другой стороны, $S_i \leq \ker \xi$ для каждого $i \neq 1$, поскольку S_i централизует S_1.

Обозначим через $A \wr C_p$ сплетение группы A и циклической группы C_p, и пусть $\{x_1 = e, \ldots, x_p\}$ — представители правых смежных классов по подгруппе Y. Тогда отображение $\eta : G \to A \wr C_p$ такое, что для каждого $x \in G$

$$x \mapsto \big((x_1 x x_{1^{x^\varphi}}^{-1})^\xi, \ldots, (x_p x x_{p^{x^\varphi}}^{-1})^\xi\big) x^\varphi$$

является гомоморфизмом. Очевидно, Y^η — подпрямое произведение базовой подгруппы A^p и

$$S_1^\eta = \{(s, 1, \ldots, 1) \mid s \in S\}, \quad B^\eta = \{(s_1, \ldots, s_p) \mid s_i \in S\} \leq Y^\eta.$$

Более того, $\ker \eta = C_G(B) = \{e\}$, поэтому мы можем отождествить G с G^η. Выберем $h \in K \setminus Y$. Тогда

$$G = \langle Y, h\rangle,\ h^p \in Y, \quad K = (Y \cap K)\langle h\rangle$$

и мы можем предполагать, что

$$h = (a_1, a_2, \ldots, a_p)\pi,\ a_i \in A, \quad \pi = (1, 2, \ldots, p) \in C_p$$

Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, пусть $\psi_i : A^p \to A$ — каноническая проекция, и пусть $K_i := (K \cap Y)^{\psi_i}$. Ясно, что $Y^{\psi_i} = A$. Более того, $K_i = K_1^{h^{i-1}} = K_1^{a_1 \ldots a_{i-1}}$ для любого $i \geqslant 2$, поскольку h нормализует $Y \cap K$. Пусть

$$N := (K_1 \times \cdots \times K_p) \cap Y.$$

N нормализуется группой K, так как $K = (N \cap K)\langle h\rangle$ и $K_i^h = K_{i+1 \pmod p}$. Мы утверждаем, что K_1 является картеровой подгруппой группы A. Предположим, что $n_1 \in N_A(K_1) \setminus H_1$. Из $Y = (Y \cap K)B$ следует равенство $n_1 = h_1 s$, $h_1 \in K_1$, $s \in N_S(K_1) \setminus K_1$. Пусть

$$b := (s, s^{a_1}, \ldots, s^{a_1 \ldots a_{p-1}}) \in B.$$

Тогда b нормализует N, поскольку

$$K_i^b = K_i^{s^{a_1 \ldots a_{i-1}}} = K_1^{a_1 \ldots a_{i-1} s^{a_1 \ldots a_{i-1}}} = K_1^{s a_1 \ldots a_{i-1}} = K_1^{a_1 \ldots a_{i-1}} = K_i.$$

Теперь $[b, h^{-1}] := b^{-1} h b h^{-1} \in Y$ таков, что

$$[b, h^{-1}]^{\psi_i} = 1,\ \text{если } i \neq p, \quad [b, h^{-1}]^{\psi_p} = [s, (a_1 \cdot \cdots \cdot a_p)^{-1}]^{a_1 \cdot \cdots \cdot a_{p-1}},$$

где $a_1 \cdot \dots \cdot a_p = (h^p)^{\psi_1} \in K_1$. Поскольку $s \in N_S(K_1)$, отсюда следует, что

$$[s, (a_1 \cdot \dots \cdot a_p)^{-1}] \in K_1, \quad [s, (a_1 \cdot \dots \cdot a_p)^{-1}]^{a_1 \cdot \dots \cdot a_{p-1}} \in K_p.$$

Поэтому $[b, h^{-1}] \in N$ и $b \in N_G(N\langle h\rangle)$. Но $K \leq N\langle h\rangle$ влечёт $N_G(N\langle h\rangle) = N\langle h\rangle$. Действительно, если $g \in N_G(N\langle h\rangle)$, то K^g является картеровой подгруппой группы $N\langle h\rangle$. Но $N\langle h\rangle$ разрешима, значит, существует $y \in N\langle h\rangle$, для которого $K^g = K^y$. Далее, K является картеровой подгруппой группы G, таким образом, $gy^{-1} \in K$ и $g \in N\langle h\rangle$. Следовательно, $b \in N$, $s \in K_1$, т. е. $n_1 \in K_1$; противоречие.

Теперь $A = K_1(T_1 \times \dots \times T_l)$ и $l < k$. По индукции имеем, что $\mathrm{Aut}_{K_1}(T_1)$ является картеровой подгруппой группы $\langle \mathrm{Aut}_{K_1}(T_1), T_1\rangle$. Ввиду нашего построения

$$\mathrm{Aut}_K(T_1) = \mathrm{Aut}_{K_1}(T_1),$$

откуда следует лемма. □

§3 Доказательство теоремы 2.1.4

Напомним, что $B = T_1 \times \dots \times T_k$, где $T_i \simeq T$ — неабелева простая группа. Осталось доказать, что $k = 1$. В обозначениях из доказательства леммы 2.2.3 мы показали, что H_1 является картеровой подгруппой группы A. Если $k > 1$, то $|A| < |X|$ и A удовлетворяет условию **(C)**. Поэтому каждая H_i сопряжена с H_1 в A и $N_A(H_i) = H_i$, $i = 1, \dots, p$. Отсюда легко следует, что N является картеровой подгруппой группы Y. Пусть $y := (y_1, \dots, y_p) \in N_Y(N)$. Из $N^{\psi_i} = H_i$ имеем $y_i \in N_A(H_i) = H_i$ для всех i, значит, $y \in N$.

Мы установили, что каждой картеровой подгруппе H группы X можно сопоставить такую картерову подгруппу $N = N_H$ группы Y, что H нормализует N_H. Очевидно, $N_H \neq \{e\}$, в противном случае X имела бы порядок p. Поэтому пусть K — картерова подгруппа группы X, несопряжённая с H, и пусть N_K — картерова подгруппа группы Y, соответствующая K. Если $k > 1$, то Y является собственной подгруппой группы X и Y удовлетворяет **(C)**. В силу минимальности группы X мы получаем, что N_H и N_K сопряжены в Y и можно считать, что $N_H = N_K$. Тогда $HN_H = KN_H$ разрешима, следовательно, подгруппы H и K сопряжены. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.1.4.

§4 Некоторые свойства картеровых подгрупп

Здесь мы докажем несколько лемм, которые полезны при изучении картеровых подгрупп в конечных группах, в частности в почти простых группах.

Лемма 2.4.1. *Пусть G — конечная группа, K — картерова подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что KN удовлетворяет* **(С)** *(это условие автоматически выполнено, если G удовлетворяет* **(С)** *или N разрешима) или $KN = G$. Тогда KN/N является картеровой подгруппой группы G/N.*

Доказательство. Если $KN = G$, то утверждение очевидно. Предположим, что $KN \neq G$, т. е. KN удовлетворяет **(С)**. Рассмотрим $x \in G$ и предположим, что $xN \leq N_{G/N}(KN/N)$. Следовательно, $x \in N_G(KN)$. Имеем, что K^x есть картерова подгруппа группы KN. Поскольку KN удовлетворяет **(С)**, мы получаем, что её картеровы подгруппы сопряжены. Таким образом, существует такой $y \in KN$, что $K^y = K^x$. Поскольку K является картеровой подгруппой группы G, отсюда следует, что $xy^{-1} \in N_G(K) = K$ и $x \in KN$. □

Лемма 2.4.2. *Предположим, что G — конечная группа. Пусть K — картерова подгруппа группы G с центром $Z(K)$. Предположим также, что $e \neq z \in Z(K)$ и $C_G(z)$ удовлетворяет условию* **(С)**.

(1) *Любая подгруппа Y, содержащая K и удовлетворяющая условию* **(С)**, *самонормализуема в G.*

(2) *Никакой элемент, сопряжённый с z в G, кроме z, не лежит в $Z(G)$.*

(3) *Если H — картерова подгруппа группы G, несопряжённая с K, то z не сопряжён ни с каким элементом из центра группы H.*

В частности, централизатор $C_G(z)$ самонормализуем в G, и z не сопряжён ни с какой степенью $z^k \neq z$.

Доказательство. (1) Возьмем $x \in N_G(Y)$. Тогда K^x является картеровой подгруппой в Y. По теореме 2.1.4 картеровы подгруппы группы Y сопряжены. Следовательно, существует $y \in Y$, для которого $K^x = K^y$. Значит,

$$xy^{-1} \in N_G(K) = K \leq Y \text{ и } x \in Y.$$

(2) Предположим, что $z^{x^{-1}} \in Z(K)$ для некоторого $x \in G$. Тогда z принадлежит центру группы $\langle K, K^x \rangle \leq C_G(z)$. Поскольку $C_G(z)$ удовлетворяет

условию **(C)**, существует такой $y \in C_G(z)$, что $K^x = K^y$. Из $xy^{-1} \in C_G(z)$ получаем $z^{xy^{-1}} = z$, значит,

$$z^x = z^y = z.$$

Заключаем, что $z^{x^{-1}} = z$.

(3) Если наше утверждение ложно, то, заменяя H некоторой сопряжённой подгруппой H^x (если необходимо), мы можем предполагать $z \in Z(K) \cap Z(H)$, т. е. $z \in Z(\langle K, H\rangle) \leq C_G(z)$. Вновь, поскольку $C_G(z)$ удовлетворяет условию **(C)**, существует такой $y \in C_G(z)$, что $H = K^y$; противоречие. □

Заметим, что для любой известной конечной простой группы G (и, значит, почти простой, поскольку группа внешних автоморфизмов любой простой группы разрешима) и для всех элементов $z \in G$ простого порядка композиционные факторы $C_G(z)$ являются известными простыми группами. Действительно, для спорадических групп это утверждение можно проверить, используя [17]. Композиционные факторы группы $C_{A_n}(z)$ являются знакопеременными группами. Если G — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p и $(|z|, p) = 1$, то z полупрост и композиционные факторы группы $C_G(z)$ являются конечными группами лиева типа. Если $|z| = p$ и p является хорошим простым для G, то согласно теоремам 1.2 и 1.4 из [39] все композиционные факторы группы $C_G(z)$ являются конечными группами лиева типа. Из работ различных авторов следует, что и в том случае, когда p является плохим простым для конечной присоединённой группы лиева типа G, все композиционные факторы централизатора элемента порядка p являются известными конечными простыми группами. Следовательно, если мы классифицируем картеровы подгруппы почти простой конечной группы A, то по индукции можем предполагать, что $C_A(z)$ удовлетворяет условию **(C)** для всех элементов $z \in A$ простого порядка.

Лемма 2.4.3. *Пусть G — конечная группа и Q — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда G содержит картерову подгруппу K, удовлетворяющую неравенству $Q \leq K$, в том и только в том случае, если $N_G(Q) = QC_G(Q)$.*

Доказательство. Предположим, что G содержит картерову подгруппу K, удовлетворяющую неравенству $Q \leq K$. Поскольку K нильпотентна, отсюда следует, что Q нормальна в K и $K \leq QC_G(Q) \trianglelefteq N_G(Q)$. По теореме Фейта-Томпсона (см. [26]), мы получаем, что $N_G(Q)$ разрешим. Таким образом, мы имеем, что $QC_G(Q)$ самонормализуема в $N_G(Q)$, значит, по лемме 2.4.2(1), $N_G(Q) = QC_G(Q)$.

Предположим теперь, что $N_G(Q) = QC_G(Q)$, т. е., $N_G(Q) = Q \times O(C_G(Q))$. Поскольку $O(C_G(S))$ — группа нечётного порядка, она разрешима. Следовательно, она содержит картерову подгруппу K_1. Рассмотрим нильпотентную подгруппу $K = Q \times K_1$ группы G. Предположим, что $x \in N_G(K)$, тогда $x \in N_G(Q)$. Но K есть картерова подгруппа группы $N_G(Q)$, значит, $x \in K$ и K есть картерова подгруппа группы G. $\square$

Определение 2.4.4. Будем говорить, что конечная группа G удовлетворяет условию **(ESyl2)**, если для её силовской 2-подгруппы Q выполнено равенство $N_G(Q) = QC_G(Q)$. Иными словами, группа G удовлетворяет **(ESyl2)**, если любой элемент нечётного порядка, нормализующий силовскую 2-подгруппу Q группы G, централизует Q.

Лемма 2.4.5. *Пусть G — конечная группа, Q — силовская 2-подгруппа группы G и x — элемент нечётного порядка из $N_G(Q)$. Предположим, что существуют такие нормальные подгруппы $G_1, \ldots, G_k$ группы G, что $G_1 \cap \ldots \cap G_k \cap Q \leq Z(N_G(Q))$ и x централизует Q по модулю G_i для всех i.*

Тогда x централизует Q. В частности, если G/G_i удовлетворяет условию **(ESyl2)** *для всех i, то G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**.

Доказательство. Рассмотрим нормальный ряд $Q \trianglerighteq Q_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq Q_k \trianglerighteq Q_{k+1} = \{e\}$, где $Q_i = Q \cap (G_1 \cap \ldots \cap G_i)$. Условия леммы влекут, что x централизует каждый фактор Q_{i-1}/Q_i. Поскольку x — элемент нечётного порядка, это влечёт, что x централизует Q. $\square$

Лемма 2.4.6. *Пусть H — такая подгруппа конечной группы G, что $|G : H| = 2^t$, H удовлетворяет условию* **(ESyl2)**, *и любой элемент нечётного порядка группы G лежит в H (это условие, очевидно, эквивалентно субнормальности подгруппы H). Тогда G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**.

Доказательство. Пусть Q — такая силовская 2-подгруппа группы G, что $Q \cap H$ — силовская 2-подгруппа группы H. Рассмотрим элемент $x \in N_G(Q)$ нечётного порядка. Поскольку $x \in H$, то $x \in N_H(Q) \leq N_H(Q \cap H) = (Q \cap H) \times O(N_H(Q \cap H))$, т. е. $x \in O(N_H(Q \cap H))$. Таким образом, множество элементов нечётного порядка из $N_G(Q)$ образует подгруппу $R = O(N_H(Q \cap H)) \cap N_G(Q)$ группы $N_G(Q)$. Ясно, что R нормальна в $N_G(Q)$, следовательно, $R = O(N_G(Q))$. С другой стороны, Q нормальна в $N_G(Q)$ по определению и $Q \cap R = \{e\}$, откуда $N_G(Q) = Q \times O(N_G(Q))$. $\square$

Используя результаты данной главы, мы уточним определение минимального контрпримера.

Определение 2.4.7. Конечная почти простая группа A называется *минимальным контрпримером*, если она содержит несопряжённые картеровы подгруппы, но в любой почти простой группе порядка меньшего, чем $|A|$, простой цоколь которой является *известной* простой группой, картеровы подгруппы сопряжены.

Глава 3. Сопряжённость в конечных простых группах

§1 Краткий обзор результатов главы

Напомним, что ввиду леммы 2.4.2 никакой элемент из центра картеровой подгруппы не может быть сопряжён со своей нетривиальной степенью (если его централизатор удовлетворяет **(C)**). Таким образом, если мы сумеем доказать, что любой элемент простого порядка r группы G сопряжён со своей нетривиальной степенью и при этом его централизатор удовлетворяет **(C)**, то можно утверждать, что порядок картеровой подгруппы (если она существует) не делится на r.

В данной главе мы получим информацию о сопряжённости элементов простого порядка в конечных простых группах и, используя её, получим описание картеровых подгрупп в широком классе почти простых групп. На самом деле, в простых группах, отличных от $A_n^{\varepsilon}(q)$ $(\varepsilon = \pm)$, картеровы подгруппы должны быть 2-группами, как будет ясно из дальнейшего изложения. Результаты можно сформулировать в виде списка почти простых групп A, которые не могут быть минимальным контрпримером (см. теорему 3.3.5). Данный список приведён в таблице 3.1.1, где $\mathrm{Field}(S)$ обозначает группу, порождённую полевыми и внутренне-диагональными автоморфизмами конечной простой группы лиева типа S.

Таблица 3.1.1. Конечные простые группы, не являющиеся минимальным контрпримером.

$\mathrm{Soc}(A)= G$	Условия для A
знакопеременные, спорадические; $A_1(p^t)$, $B_\ell(p^t)$, $C_\ell(p^t)$, t чётно если $p=3$; ${}^2B_2(2^{2n+1})$,$G_2(p^t)$, $F_4(p^t)$, ${}^2F_4(2^{2n+1})$; $E_7(p^t)$, $p\neq 3$; $E_8(p^t)$, $p \neq 3,5$ ${}^3D_4(p^{3t})$, $D_{2\ell}(p^t)$, ${}^2D_{2\ell}(p^{2t})$, t чётно если $p=3$ в последних 2 случаях и,	никаких

если $G = D_4(p^t)$, $\lvert(\mathrm{Field}(G) \cap A) : (\widehat{G} \cap A)\rvert_{2'} > 1$	
$B_\ell(3^t)$, $C_\ell(3^t)$, $D_{2\ell}(3^t)$, ${}^3D_4(3^{3t})$, ${}^2D_{2\ell}(3^{2t})$, $D_{2\ell+1}(r^t)$, ${}^2D_{2\ell+1}(r^{2t})$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, $E_6(p^t)$, ${}^2E_6(p^{2t})$, $E_7(3^t)$, $E_8(3^t)$, $E_8(5^t)$	$A = G$

В частности, группа A не может быть простой, за исключением, возможно, случаев, когда $A = A_\ell^\varepsilon(q)$.

§2 Предварительные результаты

Лемма 3.2.1. *Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над полем характеристики p, t — элемент порядка r группы $\overline{G}$, не делящегося на p. Тогда $C_{\overline{G}}(t)/C_{\overline{G}}(t)^0$ является $\pi(r)$-группой.*

Доказательство. Поскольку p не делит r, то t полупрост. По лемме 1.5.1, $C_{\overline{G}}(t)^0$ есть связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\overline{G}$ и любой p-элемент группы $C_{\overline{G}}(t)$ содержится в $C_{\overline{G}}(t)^0$. Предположим, что некоторое простое число $s \notin \pi(r)$ делит порядок $|C_{\overline{G}}(t)/(C_{\overline{G}}(t)^0)|$. Тогда $s \neq p$ и $C_{\overline{G}}(t)$ содержит такой элемент x порядка s^k, что $x \notin C_{\overline{G}}(t)^0$. Поскольку x, t коммутируют, мы имеем, что $x \cdot t$ — полупростой элемент группы $\overline{G}$. Следовательно, существует максимальный тор $\overline{T}$ группы $\overline{G}$, содержащий $x \cdot t$. Тогда $(xt)^r = x^r \in \overline{T}$. Поскольку $(s, r) = 1$, существует такое m, что $rm \equiv 1 \pmod{s^k}$, таким образом, $(x^r)^m = x \in \overline{T}$. Так как $xt, x \in \overline{T}$, то $t \in \overline{T}$, поэтому $\overline{T} \leq C_{\overline{G}}(t)^0$, значит, $x \in C_{\overline{G}}(t)^0$; противоречие. □

Лемма 3.2.2. *Пусть $s \in \overline{G}$ — такой полупростой элемент порядка r, что $(r, \Delta(\overline{G})) = 1$. Тогда $C_{\overline{G}}(s)$ связен. В частности, отсюда следует, что для любого автоморфизма Фробениуса σ группы $\overline{G}$, два полупростых элемента $s, s' \in \overline{G}_\sigma$ сопряжены в $\overline{G}_\sigma$ в том и только в том случае, если они сопряжены в $\overline{G}$.*

Доказательство. Следует из и лемм 1.5.2 и 3.2.1. □

Следующая лемма играет важную роль, так как показывает, что полупростой элемент нечётного простого порядка, как правило сопряжён, со своим обратным.

Лемма 3.2.3. *Пусть $G = O^{r'}(\overline{G}_\sigma)$, $\overline{G}$ имеет присоединённый тип и корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип отличный от A_ℓ $(\ell > 1)$, $D_{2\ell+1}$, E_6. Тогда любой полупростой элемент нечётного порядка $s \in \widehat{G}$ сопряжён со своим обратным некоторым элементом из G.*

Доказательство. Существует σ-инвариантный максимальный тор $\overline{T}$ группы $\overline{G}$, для которого $s \in \overline{T}$. Тор $\overline{T}$ порождён множеством $\{h_\alpha(\lambda) \mid \alpha \in \Phi, \lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^*\}$ и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ изоморфна группе Вейля W группы $\overline{G}$. Если $w \in W$ и n_w — прообраз элемента w относительно естественного гомоморфизма $N_{\overline{G}}(\overline{T}) \to W$, то $h_\alpha(\lambda)^{n_w} = h_{\alpha^w}(\lambda)$. Далее пусть w_0 — единственная инволюция группы W, такая что $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$ и пусть n_0 — прообраз элемента w_0. Поскольку мы предполагаем $\Phi \neq A_\ell$ $(\ell > 1)$, $D_{2\ell+1}$ и E_6, мы имеем $\alpha^{w_0} = -\alpha$ для всех $\alpha \in \Phi$, значит, $h_\alpha(\lambda)^{n_0} = h_{-\alpha}(\lambda) = h_\alpha(\lambda)^{-1}$. Заключаем, что $s^{n_0} = s^{-1}$, т. е. что s сопряжён с s^{-1} в $\overline{G}$. Таким образом, по предыдущей лемме, s и s^{-1} сопряжены в $\overline{G}_\sigma$. Наконец, из равенства $\overline{G}_\sigma = \overline{T}_\sigma G$, мы делаем вывод, что s и s^{-1} сопряжены в G. □

Лемма 3.2.4. *Пусть $\overline{C}$ — связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\overline{G}$. Обозначим через W и $W_{\overline{C}}$ группы Вейля групп $\overline{G}$ и $\overline{C}$ соответственно, через $W_{\overline{C}}^{\perp}$ подгруппу группы W, порождённую отражениями в корнях, ортогональных корням из $\Phi(\overline{C})$ и через $\Delta_{\overline{C}}$ диаграмму Дынкина группы $\overline{C}$. Тогда:*

(а) $N_W(W_{\overline{C}})/(W_{\overline{C}} \times W_{\overline{C}}^{\perp}) \simeq \mathrm{Aut}_W(\Delta_{\overline{C}})$;

(б) $N_{\overline{G}}(\overline{C})/\overline{C} \simeq N_W(W_{\overline{C}})/W_{\overline{C}}$.

Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ либо расщеплённая, либо совпадает с одной из групп ${}^2A_\ell(p^{2t})$, ${}^2D_{2\ell+1}(p^{2t})$, ${}^2E_6(p^{2t})$. Если $s \in G$ — такой полупростой элемент, что $C_{\overline{G}}(s)$ связен и $N_G(C_{\overline{G}}(s)) > C_{\overline{G}}(s)$, то $N_G(C_G(s)) > C_G(s)$.

Доказательство. Пункт (а) приведён в [13, предложение 4]. Для доказательства (б), предположим, что $\overline{T}$ — максимальный тор группы $\overline{G}$, содержащийся в $\overline{C}$, так что мы можем предполагать $W = N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ и $W_{\overline{C}} = N_{\overline{C}}(\overline{T})/\overline{T}$. Все максимальные торы группы $\overline{C}$ сопряжены в $\overline{C}$, поскольку $\overline{C}$ связна. Отсюда легко следует, что $N_{\overline{G}}(\overline{C}) = \overline{C}N_{N_{\overline{G}}(\overline{T})}(\overline{C})$. Более того, в [13, предложение 5] доказано, что $N_{N_{\overline{G}}(\overline{T})}(\overline{C}) = N_{N_{\overline{G}}(\overline{T})}(N_{\overline{C}}(\overline{T}))$. Следовательно,

$$\frac{N_{\overline{G}}(\overline{C})}{\overline{C}} = \frac{\overline{C}N_{N_{\overline{G}}(\overline{T})}(N_{\overline{C}}(\overline{T}))}{\overline{C}} \simeq \frac{N_{N_{\overline{G}}(\overline{T})(N_{\overline{C}}(\overline{T}))}}{N_{\overline{C}}(\overline{T})} \simeq \frac{N_W(W_{\overline{C}})}{W_{\overline{C}}}. \tag{3.1}$$

Далее, пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ удовлетворяет условиям леммы, и положим $\overline{C} = C_{\overline{G}}(s)$. Запишем $\sigma = \tau\varphi$, где τ — графовый автоморфизм группы $\overline{G}$, индуцированный симметрией ρ диаграммы Дынкина корневой системы

$\Phi = \Phi(\overline{G})$ и φ — полевой автоморфизм. Обозначим также через τ изометрию, продолжающую ρ на евклидово пространство $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\Phi$. Если $\overline{T}_1$ — σ-инвариантный максимальный расщеплённой тор группы $\overline{G}$, то для любого $x \in N_{\overline{G}}(\overline{T}_1)/\overline{T}_1$, мы имеем $x^\sigma = {}^\tau x$ (рассматривая $N_{\overline{G}}(\overline{T}_1)/\overline{T}_1 = W_1$ как группу изометрий пространства $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\Phi$). Таким образом, если G расщеплённая, т. е. $\rho = \tau = e$, то σ действует тривиально на W_1. Если G является скрученной, следовательно, типа A_ℓ, $D_{2\ell+1}$ или E_6, можно показать непосредственно, что $-\tau \in W_1$. Таким образом, мы можем «скрутить» тор $\overline{T}_1$ элементом $-\tau$, получив σ-инвариантный тор $(\overline{T}_1)_{-\tau}$. Из равенства (1.2):

$$\frac{(N_{\overline{G}}((\overline{T}_1)_{-\tau})))_\sigma}{((\overline{T}_1)_{-\tau}))_\sigma} \simeq C_{W_1,\sigma}(-\tau) = \{x \in W_1 \mid {}^\tau x(-\tau)x^{-1} = -\tau\} = W_1.$$

Пусть $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ — множество $\overline{T}_1$-корневых подгрупп и положим $\overline{C}_1 = \langle \overline{T}_1, X_\alpha \mid \alpha \in \Phi(\overline{C}) \rangle$. Поскольку $\Phi(\overline{C})$ является σ-инвариантной, отсюда следует, что $\overline{C}_1$ также σ-инвариантна. Более того, поскольку $\tau(\Phi(\overline{C})) = \Phi(\overline{C})$, мы получаем, что $-\tau \in N_{W_1}(W_{\overline{C}_1})$. Из [13, предложения 1 и 2], следует, что существует подгруппа $(\overline{C}_1)_{-\tau}$, полученная из $\overline{C}_1$ скручиванием элементом $-\tau$. С точностью до сопряжения в G можно предполагать, что $(\overline{T}_1)_{-\tau} \leq (\overline{C}_1)_{-\tau}$. Определим $\overline{T}_0 = \overline{T}_1$ и $\overline{C}_0 = \overline{C}_1$ если G расщеплёная, и $\overline{T}_0 = (\overline{T}_1)_{-\tau}$ и $\overline{C}_0 = (\overline{C}_1)_{-\tau}$ если G скручена.

Поскольку $\Phi(\overline{C}) = \Phi(\overline{C}_0)$, существует такой $g \in \overline{G}$, что ${}^g\overline{C}_0 = C$ и ${}^g\overline{T}_0 = \overline{T}$. Следовательно, $\dot{w} = g^{-1}\sigma(g) \in N_{\overline{G}}(\overline{C}_0) \cap N_{\overline{G}}(\overline{T}_0)$. Значит, образ w элемента $\dot{w}$ в $W_0 = N_{\overline{G}}(\overline{T}_0)/\overline{T}_0$ принадлежит $N_{W_0}(W_{C_0})$.

Из $\overline{G}_\sigma = \overline{T}_\sigma G$ следует $(N_{\overline{G}}(\overline{C}))_\sigma = N_{\overline{G}_\sigma}(\overline{C}) = \overline{T}_\sigma N_G(\overline{C})$. Значит, мы завершим доказательство, если сможем показать, что следующая группа нетривиальна $\frac{(N_{\overline{G}}(\overline{C}))_\sigma}{\overline{C}_\sigma} = \frac{\overline{T}_\sigma N_G(\overline{C})}{\overline{T}_\sigma C_G(s)} \simeq \frac{N_G(\overline{C})}{C_G(s)}$, которая является подгруппой группы $\frac{N_G(C_G(s))}{C_G(s)}$.

Используя равенство (3.1) мы получаем, что

$$\frac{(N_{\overline{G}}(\overline{C}))_\sigma}{\overline{C}_\sigma} \simeq \frac{(N_{N_{\overline{G}}(\overline{T})}(N_{\overline{C}}(\overline{T}))/\overline{T})_\sigma}{(N_{\overline{C}}(\overline{T})/\overline{T})_\sigma} \simeq \frac{N_{N_{\overline{G}}(\overline{T})}(N_{\overline{C}}(\overline{T}))/\overline{T} \cap (N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T})_\sigma}{N_{\overline{C}}(\overline{T})/\overline{T} \cap (N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T})_\sigma}.$$

Ввиду нашего выбора тора $\overline{T}_0$ мы имеем $\frac{N_{\overline{G}}(\overline{T}_0)}{\overline{T}_0} = \left(\frac{N_{\overline{G}}(\overline{T}_0)}{\overline{T}_0}\right)_\sigma$, т. е. σ действует тривиально на конечной группе $\frac{N_{\overline{G}}(\overline{T}_0)}{\overline{T}_0}$. Далее, если $w \in W_{\overline{C}_0}$, по [13, предложение 1] можно предполагать $w = e$, $\overline{T} = \overline{T}_0$, $\overline{C} = \overline{C}_0$. Следовательно, $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T} = (N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T})_\sigma$, значит,

$$\frac{(N_{\overline{G}}(\overline{C}))_\sigma}{\overline{C}_\sigma} \simeq \frac{N_W(W_{\overline{C}})}{W_{\overline{C}}} \simeq \frac{N_{\overline{G}}(\overline{C})}{\overline{C}}$$

которая нетривиальна по предположению. Наконец, предположим, что $w \notin W_{\overline{C}_0}$, т. е. $\dot{w} = g^{-1}\sigma(g) \notin \overline{C}_0$. Следовательно, ${}^g\dot{w} = \sigma(g)g^{-1} \notin \overline{C}$, т. е. ${}^g\dot{w}\overline{T} \notin N_{\overline{C}}(\overline{T})/\overline{T}$. С другой стороны, ${}^g\dot{w} \in N_{\overline{G}}(\overline{C}) \cap N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Более того, поскольку σ действует тривиально на $N_{\overline{G}}(\overline{T}_0)/\overline{T}_0$, мы получаем, что $\sigma(\dot{w}\overline{T}_0) = \dot{w}\overline{T}_0$, т. е. $\sigma(g)^{-1}g\sigma(g)^{-1}\sigma^2(g) = t_0 \in \overline{T}_0$. Значит, ${}^gt_0 = t \in \overline{T}$ и ${}^{\sigma(g)g^{-1}}t = ({}^g\dot{w})^{-1}\sigma({}^g\dot{w}) \in \overline{T}$. Отсюда следует, что $\sigma({}^g\dot{w}\overline{T}) = {}^g\dot{w}\overline{T}$. Значит, если $w \notin W_{\overline{C}_0}$, мы заключаем, что ${}^g\dot{w}\overline{T}$ отображается на нетривиальный элемент группы $\frac{N_{N_{\overline{G}}(\overline{T})}(N_{\overline{C}}(\overline{T}))/\overline{T}\cap(N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T})_\sigma}{N_{\overline{C}}(\overline{T})/\overline{T}\cap(N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T})_\sigma}$. □

Остаток данного параграфа будет посвящён изучению унипотентных элементов в группах лиева типа.

Лемма 3.2.5. *Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — конечная группа лиева типа с базовым полем $GF(p^t)$, причём p нечётно. Если $p = 3$, предположим, что t чётно. Предположим также, что $\Phi(\overline{G}) \neq G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ если $p = 3$, и $\Phi(\overline{G}) \neq E_8$ если $p = 5$. Тогда любой унипотентный элемент u порядка p сопряжён в G с некоторой степенью $u^k \neq u$.*

Доказательство. При наших предположениях p является хорошим простым числом. По пункту (i) из [39, теорема 1.4], существует такая замкнутая σ-инвариантная подгруппа $A_1(\overline{\mathbb{F}}_p)$ группы $\overline{G}$, что $u \in A_1(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Очевидно, $O^{p'}((A_1(\overline{\mathbb{F}}_p))_\sigma)$ изоморфна либо $\mathrm{SL}_2(p^{tm})$, либо $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(p^{tm})$, для некоторого натурального $m > 0$. С точностью до сопряжения в $A_1(\overline{\mathbb{F}}_p)$, можно предполагать, что $u = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (или проективному образу этой матрицы) для некоторого $\zeta \in GF(p^{tm})$. При наших предположениях существует такой $\eta \in GF(p^t)$, что $1 \neq \eta^2 = k \in GF(p)$. Пусть x — матрица $\begin{pmatrix} \eta^{-1} & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$ или её проективный образ. Тогда $x \in G$, и u, $u^x = \begin{pmatrix} 1 & k\zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u^k$ сопряжены в G. □

Лемма 3.2.6. *Пусть $u \in G = G_2(3^t)$ — элемент порядка 3. Тогда u сопряжён с u^{-1} в G.*

Доказательство. Ввиду [25, предложение 6.4] существует 9 сопряжённых классов унипотентных элементов в G. Все они приведены в таблице 3.2.7, где α, β обозначают соответственно короткий и длинный фундаментальные корни корневой системы G_2, ζ — такой элемент поля $GF(3^t)$, что многочлен $x^3 - x + \zeta$ неприводим в $GF(3^t)[x]$ и η — неквадрат в $GF(3^t)$. Поскольку $|x_1| = 9$ и x_2, x_3 сопряжены с x_1 в $G_2(\overline{\mathbb{F}}_3)$, нам нужно проверить лишь,

что x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 сопряжены со своими обратными. Используя формулу $x_\beta(u)^{h_\alpha(t)} = x_\beta(t^{\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}}u)$ для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ (см. [11, предложение 6.4.1]), мы получаем: $x_6^{h_\alpha(-1)} = x_6^{-1}$, $x_8^{h_\beta(-1)} = x_8^{-1}$, $x_4^{h_\beta(-1)} = x_4^{-1}$ и $x_5^{h_\beta(-1)} = x_5^{-1}$. Наконец, $|C_K(x_7)| \neq |C_K(x_i)|$ для всех $i \neq 7$: таким образом, x_7 также сопряжён со своим обратным. □

Таблица 3.2.7. Классы унипотентных элементов в $G_2(q),\ q = 3^t$.

представитель x	$\lvert C_K(x)\rvert$
$x_0 = 1,$	$q^6(q^2-1)(q^6-1),$
$x_1 = x_\alpha(1)x_\beta(1),$	$3q^2,$
$x_2 = x_\alpha(1)x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(\zeta),$	$3q^2,$
$x_3 = x_\alpha(1)x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(-\zeta),$	$3q^2,$
$x_4 = x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1),$	$2q^4,$
$x_5 = x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(\eta),$	$2q^4,$
$x_6 = x_{2\alpha+\beta}(1),$	$q^6(q^2-1),$
$x_7 = x_{2\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+2\beta}(1),$	$q^6,$
$x_8 = x_{3\alpha+2\beta}(1),$	$q^6(q^2-1).$

Лемма 3.2.8. *Пусть $u \in G = F_4(3^t)$ — элемент порядка 3. Тогда u сопряжён с u^{-1} в G.*

Доказательство. Ввиду [38, таблица 6], существует 28 классов сопряжённости унипотентных элементов группы G. Все они приведены в таблице 3.2.9. Напомним, что в четырёхмерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, все корни корневой системы F_4 можно записать в виде $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \pm\varepsilon_i, \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\}$. В таблице 3.2.9 символы $\pm i \pm j$, $\pm i$, и $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4$ обозначают корни $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\pm\varepsilon_i$, и $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$ соответственно, η — фиксированный неквадрат поля $GF(3^t)$, ξ — такой фиксированный элемент поля $GF(3^t)$, что $x^2+\xi x+\eta$ — неприводимый многочлен в $GF(3^t)[x]$, ζ — такой фиксированный элемент поля $GF(3^t)$, что $x^3-x+\zeta$ — неприводимый многочлен в $GF(3^t)[x]$. Используя [38, таблица 7] легко проверить, что $|x_9| = |x_{10}| > 3, |x_i| > 3$ для всех $i \geq 12$. Действительно, ввиду [38, таблица 7], мы имеем, что элементы x_9 и x_{10} сопряжены в $F_4(\overline{\mathbb{F}}_3)$. Они также сопряжены с элементом $c_7 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)$, где корни r_1, r_2 и r_3 являются фундаментальными корнями в корневой системе A_3. Но очевидно, что $|c_7| > 3$. Во всех случаях, когда $|x_i| > 3$, мы действуем по той же схеме. В остальных случаях легко проверить, что $|C_K(x_i)| \neq |C_K(x_j)|$ при $i \neq j$. Значит, если $|x_i| = 3$, то $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11$, и x_i сопряжён со своим обратным в G. □

Таблица 3.2.9. Классы унипотентных элементов в $F_4(q)$, $q = 3^t$.

представитель x	$\|C_K(x)\|$
$x_0 = 1$	$\|K\|$
$x_1 = x_{1+2}(1)$	$q^{24}(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)$
$x_2 = x_{1-2}(1)x_{1+2}(-1)$	$2q^{21}(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)$
$x_3 = x_{1-2}(1)x_{1+2}(-\eta)$	$2q^{21}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)$
$x_4 = x_2(1)x_{3+4}(1)$	$q^{20}(q^2-1)^2$
$x_5 = x_{2-3}(1)x_4(1)x_{2+3}(1)$	$2q^{17}(q^2-1)(q^3-1)$
$x_6 = x_{2-3}(1)x_4(1)x_{2+3}(\eta)$	$2q^{17}(q^2-1)(q^3+1)$
$x_7 = x_2(1)x_{1-2+3+4}(1)$	$q^{14}(q^2-1)(q^6-1)$
$x_8 = x_{2-3}(1)x_4(1)x_{1-2}(1)$	$q^{16}(q^2-1)$
$x_9 = x_{2-3}(1)x_{3-4}(1)x_{3+4}(-1)$	$2q^{12}(q^2-1)^2$
$x_{10} = x_{2-3}(1)x_{3-4}(1)x_{3+4}(-\eta)$	$2q^{12}(q^4-1)$
$x_{11} = x_{2+3}(1)x_{1+2-3-4}(1)x_{1-2+3+4}(1)$	$q^{14}(q^2-1)$
$x_{12} = x_{2-3}(1)x_4(1)x_{1-4}(1)$	$2q^{12}(q^2-1)$
$x_{13} = x_{2-3}(1)x_4(1)x_{1-4}(\eta)$	$2q^{12}(q^2-1)$
$x_{14} = x_{2-4}(1)x_{3+4}(1)x_{1-2}(-1)x_{1-3}(-1)$	$24q^{12}$
$x_{15} = x_{2-4}(1)x_{3+4}(1)x_{1-2}(-\eta)x_{1-3}(-1)$	$8q^{12}$
$x_{16} = x_{2-4}(1)x_{2+4}(-\eta)x_{1-2+3+4}(1)x_{1-3}(-1)$	$4q^{12}$
$x_{17} = x_{2-4}(1)x_{3+4}(1)x_{1-2-3+4}(1)x_{1-2}(-\eta)x_{1-3}(\xi)$	$4q^{12}$
$x_{18} = x_2(1)x_{3+4}(1)x_{1-2+3-4}(1)x_{1-2}(-1)x_{1-3}(\zeta)$	$3q^{12}$
$x_{19}x_{2-3}(1)x_{3-4}(1)x_4(1)$	$q^8(q^2-1)$
$x_{20} = x_2(1)x_{3+4}(1)x_{1-2-3-4}(1)$	$q^8(q^2-1)$
$x_{21} = x_{2-4}(1)x_3(1)x_{2+4}(1)x_{1-2-3+4}(1)$	$2q^8$
$x_{22} = x_{2-4}(1)x_3(1)x_{2+4}(\eta)x_{1-2-3+4}(1)$	$2q^8$
$x_{23} = x_{2-3}(1)x_{3-4}(1)x_4(1)x_{1-2}(1)$	$2q^6$
$x_{24} = x_{2-3}(1)x_{3-4}(1)x_4(1)x_{1-2}(\eta)$	$2q^6$
$x_{25} = x_{2-3}(1)x_{3-4}(1)x_4(1)x_{1-2-3-4}(1)$	$3q^4$
$x_{26} = x_{2-3}(1)x_{3-4}(1)x_4(1)x_{1-2-3-4}(1)x_{1-2+3+4}(\zeta)$	$3q^4$
$x_{27} = x_{2-3}(1)x_{3-4}(1)x_4(1)x_{1-2-3-4}(1)x_{1-2+3+4}(-\zeta)$	$3q^4$

Лемма 3.2.10. *Пусть $u \in G$ — элемент порядка 3, где $G = E_6(3^t)$ или $G = {}^2E_6(3^{2t})$ — каноническая простая группа лиева типа. Тогда u сопряжён с u^{-1} в G.*

Доказательство. Пусть $\overline{G}$ и σ таковы, что $G = O^{p'}(\overline{G})$. Поскольку характеристика равна 3, мы получаем, что $Z(\overline{G}_{sc}) = 1$. Значит, можно предполагать, что $\overline{G} = \overline{G}_{sc}$ является универсальной. Таким образом, $\overline{G}$ односвязна и $G = \overline{G}_\sigma$. Информация из [35, леммы 4.2, 4.3, 4.4, и теорема 4.13] о сопряжённых классах унипотентных элементов группы G собрана в таблице 3.2.11. В таблице 3.2.11 корень $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4 + \alpha_5 r_5 + \alpha_6 r_6$, где корни $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ образуют фундаментальную систему корневой системы E_6, заменяется на шестёрку $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ своих коэффициентов.

Заметим, что если $n \geqslant 3$ и $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — фундаментальные корни корневой системы типа A_n, то $|x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\ldots x_{r_n}(1)| > 3$. Используя этот факт,

получаем, что $|x_4| > 3$, $|x_7| > 3$, $|x_8| > 3$, $|x_i| > 3$, где $i \geqslant 10$, $i \neq 12, 16$. Таким образом, нам нужно рассмотреть лишь оставшиеся случаи. Мы имеем, что $x_1^{h_{r_1}(\lambda)} = x_1^{-1}$, где λ — корень из -1 в $\overline{\mathbb{F}}_3$. Для любого $x \in \overline{G}$, обозначим через $\mathrm{Ccl}(x)$ его класс сопряжённости в $\overline{G}$. Поскольку $C_{\overline{G}}(x_1) = C_{\overline{G}}(x_1)^0$, из [31, теорема 8.5] следует, что для любого отражения Фробениуса σ и для любого $x \in \mathrm{Ccl}(x_1) \cap \overline{G}_\sigma$, элементы x и x^{-1} сопряжены относительно $\overline{G}_\sigma$. Значит, если $x \in \mathrm{Ccl}(x_1) \cap G$, то x сопряжён со своим обратным.

Таблица 3.2.11. Унипотентные классы в $E_6(\overline{\mathbb{F}}_3)$.

представитель x	$C = C_G(x)$ $\lvert C : C^0\rvert$
$x_1 = x_{10000}(1)$	1
$x_2 = x_{100000}(1)x_{001000}(1)$	2
$x_3 = x_{100000}(1)x_{000100}(1)$	1
$x_4 = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000100}(1)$	1
$x_5 = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000010}(1)$	1
$x_6 = x_{100000}(1)x_{000100}(1)x_{000001}(1)$	1
$x_7 = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000100}(1)x_{000010}(1)$	1
$x_8 = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000100}(1)x_{000001}(1)$	1
$x_9 = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000010}(1)x_{000001}(1)$	1
$x_{10} = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{010000}(1)x_{000010}(1)$	1
$x_{11} = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000100}(1)x_{010000}(1)x_{000001}(1)$	1
$x_{12} = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000010}(1)x_{000001}(1)x_{010000}(1)$	1
$x_{13} = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000100}(1)x_{000010}(1)x_{000001}(1)$	1
$x_{14} = x_{010000}(1)x_{001000}(1)x_{000100}(1)x_{000010}(1)$	1
$x_{15} = x_{010000}(1)x_{001000}(1)x_{000100}(1)x_{010110}(1)$	6
$x_{16} = x_{000001}(1)x_{000010}(1)x_{001000}(1)x_{010000}(1)$	1
$x_{17} = x_{010000}(1)x_{001000}(1)x_{000010}(1)x_{101100}(1)$	1
$x_{18} = x_{000010}(1)x_{000100}(1)x_{001000}(1)x_{100000}(1)x_{000001}(1)x_{111111}(1)$	2
$x_{19} = x_{010000}(1)x_{000100}(1)x_{000010}(1)x_{000001}(1)x_{101000}(1)x_{001110}(1)$	1
$x_{20} = x_{100000}(1)x_{010000}(1)x_{001000}(1)x_{000100}(1)x_{000010}(1)x_{000001}(1)$	3

Для остальных элементов x_i порядка 3, при $i \neq 2$, мы действуем таким же образом. Остается рассмотреть лишь элемент x_2. Ввиду [31, теорема 8.5] для любого отображения Фробениуса σ выполнено, $\mathrm{Ccl}(x_2) \cap \overline{G}_\sigma$ состоит из двух классов сопряжённости группы $G = \overline{G}_\sigma$. Предположим, что $G = E_6(3^t)$. Тогда из [35, леммы 4.2 и 4.4] следует, что если $x \in \mathrm{Ccl}(x_2) \cap G$, то x сопряжён в G либо с элементом $y_1 = x_{100000}(1)x_{001000}(1)$, либо с элементом $y_2 = x_{100000}(1)x_{001000}(1)x_{000001}(1)x_{122321}(\eta)$, где η — неквадрат в $GF(3^t)$. Из [35, лемма 4.2] получаем, что $|C_G(y_1)| = 2q^{26}(q^2-1)^2(q^3-1)^2$, из [35, лемма 4.4] получаем, что $|C_G(y_2)| = 2y^{26}(q^4-1)(q^6-1)$. Для $i = 1, 2$, пусть $\mathrm{Ccl}_G(y_i)$ — класс сопряжённости элемента y_i в G. Поскольку $|C_G(y_1)| \neq |C_G(y_2)|$ мы получаем, что y_i сопряжён со своим обратным относительно G для $i = 1, 2$.

Значит, если $x \in \mathrm{Ccl}_G(y_1)$, или $x \in \mathrm{Ccl}_G(y_2)$, то x сопряжён со своим обратным в G. Предположим теперь, что $G = {}^2E_6(3^{2t})$ и обозначим $E_6(3^{2t})$ через G_1. Тогда $G = (G_1)_\tau$ для некоторого автоморфизма τ группы G_1. Существует такое отображение Фробениуса σ, что $G_1 = \overline{G}_\sigma$, $G = \overline{G}_{\sigma\tau}$ (см. [29, (7-2)]). Пусть Ccl_1 и Ccl_2 — два класса сопряжённости группы G_1, содержащиеся в $\mathrm{Ccl}(x_2) \cap G_1$. Мы доказали, что любой $x \in \mathrm{Ccl}_i$, $i = 1, 2$, сопряжён с x^{-1} в G_1. Поскольку $\mathrm{Ccl}(x_2) \cap G$ состоит из двух классов сопряжённости группы G, мы получаем, что $\mathrm{Ccl}_1 \cap G$ состоит из одного класса сопряжённости и $\mathrm{Ccl}_2 \cap G$ состоит из одного класса сопряжённости. Значит, любой $x \in \mathrm{Ccl}_i \cap G$, $i = 1, 2$ сопряжён со своим обратным в G. □

Лемма 3.2.12. *Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ — конечная присоединённая группа лиева типа над полем нечётной характеристики p и корневая система Φ группы $\overline{G}$ — одна из следующих: A_n $(n \geqslant 2)$, D_n $(n \geqslant 4)$, B_n $(n \geqslant 3)$, G_2, F_4, E_6, E_7 или E_8; и $G \not\simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$. Пусть U — максимальная унипотентная подгруппа группы G, H — подгруппа Картана группы G, нормализующая U, и Q — силовская 2-подгруппа группы H. Тогда $C_U(Q) = \{e\}$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму для случая $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = O^{p'}(G)$, т. е. можно считать, что G является канонической присоединённой группой лиева типа.

Предположим сначала, что группа G расщеплённая. Предположим, что $C_U(Q) \neq \{e\}$ и $u \in C_U(Q) \setminus \{e\}$. Рассмотрим разложение (1.1) элемента $u = \prod_{r \in \Phi^+} x_r(t_r)$, где t_r — элементы из поля определения $GF(q)$ группы G. Ввиду [11, теорема 5.3.3(ii)] это разложение единственно. Поскольку для любого $h(\chi) \in H$, $r \in \Phi$, $t \in GF(q)$ справедлива формула $h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t)$ (см. [11, стр. 100]), то мы получаем, что каждый множитель $x_r(t_r)$ в разложении (1.1) элемента u лежит в $C_U(Q)$. Поэтому можно считать, что $u = x_r(t)$ для некоторых $r \in \Phi^+$ и $t \in GF(q)^*$. В наших ограничениях на Φ, в силу леммы Хартли-Шута 1.5.5, существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = -1$. Поскольку $h(\chi)^2 = h(\chi^2)$ (см. [11, стр. 98]), то мы имеем, что $\chi^2(r) = 1$, т. е. $|h(\chi)^2| < |h(\chi)|$. Значит, порядок $|h(\chi)|$ чётен и можно записать $h(\chi) = h_2 \cdot h_{2'} = h(\chi_1) \cdot h(\chi_2)$ — разложение элемента $h(\chi)$ в виде произведения его 2- и $2'$- частей. Далее, $\chi(r) = \chi_1(r) \cdot \chi_2(r)$, следовательно, $\chi_1(r) = -1$ и $\chi_2(r) = 1$. Таким образом, $h(\chi_1)x_r(t)h(\chi_1)^{-1} = x_r(-t) \neq x_r(t)$. Так как $h(\chi_1) \in Q$, полученное неравенство противоречит выбору $x_r(t) \in C_U(Q)$.

Предположим, что $G \simeq {}^2A_n(q^2)$, $G \simeq {}^2D_n(q^2)$ или $G \simeq {}^2E_6(q^2)$, тогда $\Phi(\overline{G})$ равна A_n, D_n и E_6 соответственно. Обозначим через $\bar{r}$ образ корня r корневой системы Φ относительно соответствующей симметрии. В терминах

из [11], корневая система $\Phi(\overline{G})$ представима в виде объединения классов эквивалентности Ψ_i, причём каждый из Ψ_i имеет тип либо A_1, либо $A_1 \times A_1$, либо A_2. Ввиду [11, предложение 13.6.1], справедливо равенство $U = \prod_i X_{\Psi_i}$, где

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t) \mid t \in GF(q)\},$$

если $\Psi_i = \{r\}$ имеет тип A_1 (при этом $r = \bar{r}$);

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\},$$

если $\Psi_i = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$ (при этом $r \neq \bar{r}$ и $r + \bar{r} \notin \Phi(\overline{G})$);

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u) \mid t \in GF(q^2), u + u^q = -N_{r,\bar{r}}tt^q\},$$

если $\Psi_i = \{r, \bar{r}, r + \bar{r}\}$ имеет тип A_2 (при этом $r \neq \bar{r}$ и $r + \bar{r} \in \Phi(\overline{G})$). Далее, если $h(\chi)$ — элемент из группы H, то справедливы следующие равенства (см. [11, стр. 263]):

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t),$$

если $r = \bar{r}$ и $\Psi_i = \{r\}$ имеет тип A_1;

$$h(\chi)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t)x_{\bar{r}}(\chi(\bar{r})t^q),$$

если $r \neq \bar{r}$, $r + \bar{r} \notin \Phi(\overline{G})$ и $\Psi_i = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$;

$$h(\chi)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t)x_{\bar{r}}(\chi(\bar{r})t^q)x_{r+\bar{r}}(\chi(r + \bar{r})u),$$

если $r \neq \bar{r}$, $r + \bar{r} \in \Phi(\overline{G})$ и $\Psi_i = \{r, \bar{r}, r + \bar{r}\}$ имеет тип A_2.

Пусть u — нетривиальный элемент из $C_U(Q)$. Тогда u содержит нетривиальный множитель из X_{Ψ_i} для некоторого i. В силу единственности разложения в виде произведения $\prod_i X_{\Psi_i}$ (см. [11, предложение 13.6.1]) можно считать, что $u \in X_\Psi$.

Предположим, что Ψ имеет тип A_1, т. е. $u = x_r(t)$, $t \in GF(q)$, $r = \bar{r}$. Ввиду леммы Хартли-Шута 1.5.5 для любого $s \in GF(q)$ существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = s$. Возьмем $s = -1$. Тогда существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = -1$. Поскольку $h(\chi)^2 = h(\chi^2)$ (см. формулу на стр. 98 из [11]), то мы имеем, что $\chi^2(r) = 1$, т. е. $|h(\chi)^2| < |h(\chi)|$. Значит, порядок $|h(\chi)|$ чётен и можно записать $h(\chi) = h_2 \cdot h_{2'} = h(\chi_1) \cdot h(\chi_2)$ — разложение элемента $h(\chi)$ в виде произведение его 2- и 2′- частей. Далее, $\chi(r) = \chi_1(r) \cdot \chi_2(r)$, следовательно, $\chi_1(r) = -1$ и $\chi_2(r) = 1$. Таким образом, $h(\chi_1)x_r(t)h(\chi_1)^{-1} = x_r(-t) \neq x_r(t)$. Значит, случай $u = x_r(t)$ и $\Psi = \{r\}$ имеет тип A_1 невозможен.

Предположим, что $\Psi = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$. По лемме Хартли-Шута 1.5.5 для любого $s \in GF(q^2)$ существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = s^2$.

Поскольку существует такой $s \in GF(q^2)$, что $s^2 = -1$, то существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = -1$. Как и раньше $h(\chi)$ представим в виде $h(\chi_1) \cdot h(\chi_2)$ — произведения своих 2- и $2'$- частей. Тогда $\chi_1(r) = -1$, следовательно

$$h(\chi_1)x_r(t)x_{\bar r}(t^q)h(\chi_1)^{-1} = x_r(-t)x_{\bar r}(-t^q) \neq x_r(t)x_{\bar r}(t^q).$$

Таким образом, случай $u = x_r(t)x_{\bar r}(t^q)$ и $\Psi = \{r, \bar r\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$ невозможен.

Предположим, наконец, что $\Psi = \{r, \bar r, r + \bar r\}$ имеет тип A_2. По лемме Хартли-Шута 1.5.5 для любого $s \in GF(q^2)$ существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = s^3$. Выберем $s = -1$, тогда существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = -1$. Вновь $h(\chi) = h(\chi_1) \cdot h(\chi_2)$ представим в виде произведения своих 2- и $2'$-частей и $\chi_1(r) \neq 1$. Тогда

$$h(\chi_1)x_r(t)x_{\bar r}(t^q)x_{r+\bar r}(u)h(\chi_1)^{-1} = \\ x_r(-t)x_{\bar r}(\chi_1(-t^q)x_{r+\bar r}(\chi_1(r+\bar r)u) \neq \\ x_r(t)x_{\bar r}(t^q)x_{r+\bar r}(u)$$

при $t \neq 0$. Если $t = 0$, то выберем s так, что $s^2 = -1$. Тогда $\chi_1(r + \bar r) = -1$ и, как и выше, мы получаем неравенство. Значит, и этот последний случай невозможен.

Предположим, наконец, что $G \simeq {}^3D_4(q^3)$. В терминах из [11], корневая система $\Phi(\overline{G})$ представима в виде объединения классов эквивалентности Ψ_i, причём каждый из Ψ_i имеет тип либо A_1, либо $A_1 \times A_1 \times A_1$. Ввиду [11, предложение 13.6.1], справедливо равенство $U = \prod_i X_{\Psi_i}$, где

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t) \mid t \in GF(q)\},$$

если $\Psi_i = \{r\}$ имеет тип A_1 (при этом $r = \bar r$);

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t)x_{\bar r}(t^q)x_{\bar{\bar r}}(t^{q^2}) \mid t \in GF(q^3)\},$$

если $\Psi_i = \{r, \bar r, \bar{\bar r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1 \times A_1$ (при этом $r \neq \bar r$ и $r + \bar r \notin \Phi(\overline{G})$). В обоих случаях по лемме Хартли-Шута 1.5.5 существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = -1$. Как и выше, можно считать, что $h(\chi)$ является 2-элементом, т. е. $h(\chi) \in Q$ и $h(\chi)$ не централизует никакой неединичный элемент из X_{Ψ_i}, откуда следует утверждение леммы 3.2.12 в этом последнем случае. □

Лемма 3.2.13. *В обозначениях леммы* 3.2.12, *с нечётным* p, *пусть* K — *такая картерова подгруппа группы* G, *что* $|K| = 2^a p^b$. *Тогда* $a > 0$. *Более того, с точностью до сопряжения* $O_p(K) \leq C_U(Q)$. *В частности, в предположениях леммы* 3.2.12, K *есть* 2-*группа.*

Доказательство. Условие $a = 0$ влечёт $K = U$. Но H нетривиальна, поскольку p нечётно и G проста, и нормализует U. Таким образом, $a > 0$. Предположим, что $b > 0$. По теореме Бореля-Титса (лемма 1.5.4), K содержится в собственной параболической подгруппе P группы G и $O_p(K) \leq O_p(P)$. Поскольку $P = LO_p(P)$, где L — фактор Леви подгруппы P, из леммы 2.4.1 следует, что $KO_p(P)/O_p(P) \cong O_2(K)$ — картерова подгруппа группы $P/O_p(P) \cong L$. Таким образом, $O_2(K)$ является силовской 2-подгруппой группы L. Но L содержит H, следовательно, можно полагать, что $Q \leq K$. Отсюда следует, что $O_p(K) \leq C_U(Q)$. □

Лемма 3.2.14. *Пусть G — известная неабелева простая группа, не являющаяся простой группой лиева типа. Тогда любой элемент z нечётного простого порядка сопряжён с некоторой степенью $z^k \neq z$.*

Доказательство. Ввиду классификации конечных простых групп, G либо является знакопеременной, либо спорадической. Наше утверждение легко проверить непосредственно в первом случае и используя описание классов сопряжённости, данное в [17] во втором случае. □

§3 Почти простые группы, которые не являются минимальным контрпримером

В данном параграфе A обозначает почти простую группу, которая является минимальным контрпримером (см. определение 2.4.7). Если G — группа лиева типа, то через $\mathrm{Field}(G)$ обозначена подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$ порождённая внутренними, диагональными и полевыми автоморфизмами. Если G — простая группа, которая не является группой лиева типа, то для унификации обозначений положим $\widehat{G} = G$. Кроме того, для любого $x \in G$ мы полагаем, что композиционные факторы централизатора $C_G(s)$ являются известными простыми группами, и потому $C_G(s)$ удовлетворяет **(C)**. Как мы замечали в § 4 главы 2, это предположение всегда выполнено. Мы делаем подобную оговорку здесь, чтобы подчеркнуть, что все результаты не зависят от классификации конечных простых групп.

Лемма 3.3.1. *Предположим, что любой элемент $z \in \widehat{G}$ нечётного простого порядка сопряжён с некоторым $z^k \neq z$ относительно G и все композиционные факторы централизатора $C_G(z)$ являются известными конечными простыми группами. Тогда A не является минимальным контрпримером, при условии, что выполнено одно из следующих условий:*

(а) $|A : \widehat{G} \cap A|$ *является степенью двойки;*

(б) $|\widehat{G} : (\widehat{G} \cap A)|$ *является степенью двойки и, если корневая система* $\Phi(\overline{G})$ *имеет тип* D_4*, то* $|(\mathrm{Field}(G) \cap A) : (\widehat{G} \cap A)|_{2'} > 1$*;*

(в) *для любого нечётного простого* r *и любой силовской* r*-подгруппы* R *группы* A*, либо* $R \cap G$ *не имеет дополнения в* R*, либо все эти дополнения сопряжены в* A*.*

Доказательство. Заметим сразу, что из леммы 2.4.2(б) следует, что $K \cap \widehat{G}$ и $H \cap \widehat{G}$ являются 2-группами. Мы докажем сначала (в), а потом покажем, что (а) и (б) следуют из (в).

(в) Предположим, что K, H — несопряжённые картеровы подгруппы группы A. Тогда, ввиду теоремы 2.1.4 и леммы 2.4.1, мы получаем, что $KG/G = HG/G = A/G$. В частности, если r — некоторый простой делитель порядка $|A/G|$, то r делит и $|K|$, и $|H|$. По лемме 2.4.2 и из условий нашей леммы следует, что $K \cap \widehat{G}$ и $H \cap \widehat{G}$ не содержат элементов нечётного простого порядка, т. е. являются 2-группами. В том случае, когда $R \cap G$ не имеет дополнения в R мы сразу получаем противоречие, если же все эти дополнения сопряжены в A, мы получаем противоречие с леммой 2.4.2(в). Таким образом, мы получаем, что $|A/G|$ является степенью двойки, значит K и H являются 2-группами, что невозможно.

Теперь (а) очевидным образом следует из (в). Что касается (б), то он также следует из (в), используя сопряжённость дополнений, вытекающую из леммы 5.2.6. □

Отметим, что неабелевы композиционные факторы централизатора любого элемента из знакопеременной группы Alt_n являются знакопеременными группами меньшей степени. Следовательно, леммы 3.2.14 и 3.3.1 вместе с индукцией по n сразу влекут, что картеровы подгруппы в подгруппах группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_n)$ при $n \geqslant 5$ являются силовскими 2-подгруппами или не существуют. Аналогичное утверждение справедливо и для спорадических групп. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3.2. *Пусть* S *— конечная неабелева простая группа, являющаяся либо спорадической, либо знакопеременной группой. Тогда для любой подгруппы* A *группы* $\mathrm{Aut}(S)$ *картерова подгруппа либо не существует, либо является силовской 2-подгруппой.*

Теорема 3.3.3. *Пусть* G *— такая конечная присоединённая группа лиева типа, что* $G = \mathbf{P}\Omega^{\pm}_{2(2\ell+1)}(p^t)$*, и предположим, что* $\ell \geqslant 2$*. Тогда* G *не является минимальным контрпримером.*

Доказательство. Предположим, что наше утверждение ложно. Тогда G содержит картерову подгруппу K, которая не является 2-группой. Пусть $s \in Z(K)$ — элемент нечётного простого порядка r. Можно предполагать, что s полупрост, за исключением, возможно, случая, когда $p \neq 2$ и $|K| = 2^a p^b$. Но это невозможно ввиду лемм 3.2.12 и 3.2.13. Значит, s полупрост и из $K \leq C_G(s)$, следует, что $C_G(s)$ самонормализуем в G (см. лемму 2.4.2(a)). Далее, пусть $\overline{G} = \Omega_{2(2\ell+1)}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и пусть отображение σ таково, что $\overline{G}_\sigma = \Omega^{\pm}_{2(2\ell+1)}(p^t)$. Более того, положим K_0 равным прообразу группы K в $\overline{G}_\sigma$. Очевидно, K_0 является картеровой подгруппой группы $\overline{G}_\sigma$ и можно отождествить s с его прообразом в $\overline{G}_\sigma$, поскольку центр $\overline{G}_\sigma$ имеет порядок 2 или 4. Поскольку $|s|$ нечётен, лемма 3.2.1 влечёт, что $C = C_{\overline{G}}(s)$ — связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\overline{G}$ (см. леммы 1.5.1 и 1.5.2). Более того, C является собственной подгруппой группы $\overline{G}$, поскольку $s \notin Z(\overline{G})$. По лемме 3.2.4 группа $N_W(W_C)/W_C$ изоморфна группе $N_{\overline{G}}(C)/C$. Используя описание групп $N_W(W_C)/W_C$, данное в [14, предложение 10] и лемму 3.2.4, мы делаем вывод, что $N_G(C_G(s))/C_G(s)$ тривиален только когда $W_C^{\perp}$ и $\mathrm{Aut}_W(\Delta_C)$ обе тривиальны. Из предположения $\ell \geq 2$ следует, что такое случается в точности когда $m_1 = 0$ и $m_{2\ell+1} = 1$ (в обозначениях из [14]). В этом случае $C = A_{2\ell}(\overline{\mathbb{F}}_p) * S$, где S — одномерный тор. Используя тот факт, что $\overline{G}$ содержит в точности один класс связных редуктивных подгрупп, изоморфных группе C, и предполагая, что $\overline{G}$ сохраняет билинейную foруму, индуцированную матрицей $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, можно отождествить C с образом группы $\mathrm{GL}_{2\ell+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ относительно такого мономорфизма φ, что

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^t \end{pmatrix} .$$

Ввиду теоремы Ленга-Стейнберга (лемма 1.5.3), можно предполагать, что либо $C_\sigma = \varphi(\mathrm{GL}_{2\ell+1}(p^t))$, либо $C_\sigma = \varphi(\mathrm{GU}_{2\ell+1}(p^{2t}))$. Поскольку K_0 является картеровой подгруппой группы C_σ и $\ell \geq 2$, из [23] и [24] (а также теоремы 4.1.1, доказанной в главе 4 без использования результатов настоящей главы) следует, что K_0 является нормализатором силовской 2-подгруппы P группы C_σ, и либо $p^t = 2$ (и $C_\sigma = \varphi(\mathrm{GL}_{2\ell+1}(p^t))$), либо p нечётно. Из $s \in Z(C_\sigma)$ следует, что $r = |s|$ делит $p^t - 1$ если $C_\sigma \simeq \mathrm{GL}_{2\ell+1}(p^t)$, и что r делит $p^t + 1$ если $C_\sigma \simeq \mathrm{GU}_{2\ell+1}(p^{2t})$. В частности p нечётно. Используя известное строение нормализаторов силовских 2-подгрупп в классических группах (см. [5] и [16]),

можно предполагать, что K_0 является подгруппой следующей группы

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{\varphi} \mid B \in \mathrm{GL}_{2\ell}(p^t)\ ,\ \beta \in \overline{\mathbb{F}}_q^* \right\} \text{ если } C_\sigma \simeq \mathrm{GL}_{2\ell+1}(p^t)$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{\varphi} \mid B \in \mathrm{GU}_{2\ell}(p^{2t})\ ,\ \beta^{p^t+1} = 1 \right\} \text{ если } C_\sigma \simeq \mathrm{GU}_{2\ell+1}(p^{2t}).$$

Как мы заметили выше, существует такой $y \in L$, что $y = \begin{pmatrix} I_{2\ell} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^{\varphi}$ где γ имеет порядок r. Поскольку y лежит в центре группы L, он также лежит в центре группы K_0. Таким образом, $K_0 \leq C_{C_{G_\sigma}(s)}(y) = \big(C_C(y)\big)_\sigma$. Из изоморфизма $C \simeq \mathrm{GL}_{2\ell+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, следует, что $C_C(y)$ — связная редуктивная σ-инвариантная подгруппа максимального ранга группы $\overline{G}$. Таким образом, ввиду упомянутого выше результата Картера [14, предложение 10], $\big(C_C(y)\big)_\sigma$ является самонормализуемым в $\overline{G}_\sigma$ только если $C_C(y)$ сопряжён с C. Но $\dim(C_C(y)) < \dim(C)$, поскольку y не лежит в центре группы C. Таким образом, подгруппа $(C_C(y))_\sigma$ не является самонормализуемой в $\overline{G}_\sigma$. Поскольку $Z(\overline{G}) \leq C_C(y)$, отсюда следует, что факторгруппа $(C_C(y))_\sigma/(Z(\overline{G}))_\sigma$ не является самонормализуемой в $\overline{G}_\sigma/(Z(\overline{G}))_\sigma = G$. Таким образом, мы получили противоречие с леммой 2.4.2(а), поскольку K содержится в $(C_C(y))_\sigma/(Z(G))_\sigma$ и $(C_C(y))_\sigma/(Z(G))_\sigma$ удовлетворяет условию **(C)**. □

Теорема 3.3.4. *Пусть $E_6^\varepsilon(p^t) \leq G \leq \widehat{E_6^\varepsilon(p^t)}$. Тогда G не является минимальным контрпримером.*

Доказательство. Предположим противное. В силу леммы 2.4.2(в), G должна содержать картерову подгруппу K, которая не содержит силовскую 2-подгруппу группы G. В частности, K не является 2-группой. Пусть $s \in Z(K)$ имеет нечётный простой порядок r. В силу лемм 3.2.5, 3.2.10 и 2.4.2, p не делит $|K|$. Значит, s полупрост и K содержится в $C_G(s)$, который, вновь по лемме 2.4.2(а), самонормализуем. Если $|s| \neq 3$, то по лемме 3.2.2, следует, что $C_{\overline{G}}(s)$ связен. Если $|s| = 3$, то по лемме 1.5.2, следует, что $|C : C^0|$ делит $\Delta = 3$. Непосредственные вычисления с использованием [20] и [35] показывают, что $C_G(s)$ не является самонормализуемым, если $|s| = 3$. Следовательно, можно предполагать, что $|s| \neq 3$ и что $C_{\overline{G}}(s)$ связен. Поскольку $C_G(s)$ самонормализуем, лемма 3.2.4 показывает, что $C = C_{\overline{G}}(s)$ также самонормализуем. По [35], мы получаем, что централизатор C является самонормализуемым тогда и только тогда, когда $C = A_4(\overline{\mathbb{F}}_p) * A_1(\overline{\mathbb{F}}_p) * S$, или $C = D_5(\overline{\mathbb{F}}_p) * S$, где S — 1-мерный тор группы $\overline{G}$.

Если $C = A_4(\overline{\mathbb{F}}_p) * A_1(\overline{\mathbb{F}}_p) * S$, то, как и при доказательстве теоремы 3.3.3, можно найти такой элемент $y \in Z(K)$, что $|y| = r$ и $C_G(\langle s\rangle \times \langle y\rangle)$ не является самонормализуемым, что противоречит лемме 2.4.2.

Значит, предположим, что $C = D_5(\overline{\mathbb{F}}_p) * S$. Тогда $C_G(s) = C \cap G = HL$, где H — подгруппа Картана группы G и $L = O^{p'}(C_G(s))$ совпадает либо с $D_5(p^t)$ либо с ${}^2D_5(p^{2t})$. Поскольку $|\hat{L} : L|$ делит 4, то справедливо равенство

$$O_{2'}(H) = (O_{2'}(H) \cap Z(C_G(s))) \times (O_{2'}(H) \cap L).$$

Обозначая через Q силовскую 2-подгруппу группы $C_G(s)$, мы утверждаем, что $N_{C_G(s)}(Q) = QZ(C_G(s))$. Действительно, пусть x — элемент из $N_{C_G(s)}(Q)$. Из $H = O_2(H) \times O_{2'}(H)$ и $C_G(s) = HL$, следует, что можно записать $x = h_1 z l$, где $h_1 \in O_2(H)$, $z \in O_{2'}(H) \cap Z(C_G(s))$, $l \in L$. Очевидно, можно предполагать, что $O_2(H) \leq Q$, таким образом $l \in N_{C_G(s)}(Q)$. Поскольку L нормальна в $C_G(s)$, отсюда следует, что $l \in N_L(Q \cap L)$. В силу [5], $N_L(Q \cap L) = Q \cap L$, значит, $l \in Q$. Мы делаем вывод, что $N_{C_G(s)}(Q) = QZ(C_G(s))$ нильпотентен, значит, является картеровой подгруппой группы $C_G(s)$. Поскольку $C_G(s) < G$, все картеровы подгруппы в $C_G(s)$ сопряжены. Следовательно, с точностью до сопряжения, $K = N_{C_G(s)}(Q)$. По формуле $|(C)_\sigma| = |M_\sigma| \cdot |(Z(C)^0)_\sigma|$, где $M_\sigma = L$ в наших обозначениях (см. [14]), мы получаем, что $|G : C_G(s)|$ нечётен, значит, Q является силовской 2-подгруппой группы G, противоречие. □

Наши результаты можно объединить в следующую теорему.

Теорема 3.3.5. *Почти простая группа A с цоколем G не является минимальным контрпримером в следующих случаях:*

(а) *G является знакопеременной, спорадической или одной из следующих групп: $A_1(p^t)$, $B_\ell(p^t)$, $C_\ell(p^t)$, где t чётно, если $p = 3$; ${}^2B_2(2^{2n+1})$, $G_2(p^t)$, $F_4(p^t)$, ${}^2F_4(2^{2n+1})$, ${}^3D_4(q^3)$; $E_7(p^t)$, где $p \neq 3$; $E_8(p^t)$, где $p \neq 3, 5$, $D_{2\ell}(p^t)$, ${}^3D_4(p^{3t})$, ${}^2D_{2\ell}(p^{2t})$, где t чётно если $p = 3$ и, более того, если $G = D_4(p^t)$, то $|(\mathrm{Field}(G) \cap A) : (\widehat{G} \cap A)|_{2'} > 1$;*

(б) *A совпадает с одной из следующих групп: $B_\ell(3^t)$, $D_{2\ell}(3^t)$, ${}^2D_{2\ell}(3^{2t})$, $D_{2\ell+1}(p^t)$, ${}^2D_{2\ell+1}(r^{2t})$, ${}^3D_4(3^{3t})$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, $E_6^\varepsilon(r^t)$, $\widehat{E_6^\varepsilon(r^t)}$, $E_7(3^t)$, $E_8(3^t)$, $E_8(5^t)$, $C_\ell(3^t)$;*

В частности, никакая простая группа, за исключением, возможно, групп, изоморфных $A_n^\varepsilon(q)$, не может быть минимальным контрпримером. Более того, если любая почти простая группа с известной простой нормальной подгруппой удовлетворяет **(C)**, *то во всех перечисленных выше группах картерова подгруппа (если существует) содержит силовскую 2-подгруппу*

Доказательство. (а) Мы утверждаем, что любой элемент $z \in \widehat{G}$ нечётного простого порядка сопряжён в G, с некоторой степенью $z^k \neq z$. Когда G является знакопеременной или спорадической это выполнено по лемме 3.2.14, и когда G является группой лиева типа и z полупрост, это верно по лемме 3.2.3. С другой стороны, когда z является унипотентным (следовательно p нечётно), наше утверждение следует из лемм 3.2.6, 3.2.8 если $G = G_2(3^t),\ F_4(3^t)$ и из леммы 3.2.5 в остальных случаях. Наконец, если $G \simeq {}^3D_4(q^3)$, то ввиду [42, теорема 1.2(vi)] любой элемент группы G сопряжён со своим обратным. Таким образом, (а) следует из леммы 3.3.1, поскольку для всех рассматриваемых групп мы имеем, что либо $|\widehat{G} : G|$ является степенью двойки и потому по лемме 5.2.6 все дополнения нечётного порядка сопряжены, либо что $|A : A \cap \widehat{G}|$ является степенью двойки (см. [17], например).

(б) Наше утверждение следует из результатов, полученных в [24] (и теоремы 4.1.1, полученной независимо от результатов данной главы в главе 4), когда $G = B_2(3^t) \simeq C_2(3^t)$ или $G = C_\ell(3^t)$, и из теорем 3.3.3 и 3.3.4, когда G совпадает с одной из групп $D^\varepsilon_{2\ell+1}(p^t)$, $E^\varepsilon_6(p^t)$ или $\widehat{E^\varepsilon_6(p^t)}$. Поэтому предположим, что выполнен один из оставшихся случаев. Любой полупростой элемент $z \in \widehat{G}$ нечётного простого порядка сопряжён с некоторым z^{-1} по лемме 3.2.3. Таким образом, в характеристике 2 картерова подгруппа K группы G может быть лишь силовской 2-подгруппой, в нечётной характеристике K может иметь порядок равный только $2^a p^b$. Если $G \neq {}^2G_2(3^{2n+1})$, то выполнены условия леммы 3.2.12 и, используя лемму 3.2.13, мы делаем вывод, что K вновь является 2-группой.

Предположим теперь, что $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$ (при этом $n \geqslant 1$). Тогда $|K| = 2^a 3^b$. Поскольку нормализатор силовской 2-подгруппы группы G содержит элемент порядка 7 (см. [7]), то мы получаем, что $b > 0$. По лемме 1.5.4, подгруппа K содержится в собственной параболической подгруппе P группы G. Так как лиев ранг группы G равен 1, то P является подгруппой Бореля, т. е. $P = U \leftthreetimes H$, где H — подгруппа Картана и U — максимальная унипотентная подгруппа группы G. Так как группа P разрешима, она удовлетворяет условию **(C)** и, по лемме 2.4.1, KU/U является картеровой подгруппой группы $P/U \simeq H$. Но при $n \geqslant 1$ подгруппа H содержит элемент нечётного порядка, следовательно, K содержит полупростой элемент нечётного простого порядка. Противоречие с тем, что $|K| = 2^a 3^b$. □

Заметим, что после доказательства того факта, что для любой известной конечной простой группы S и нильпотентной подгруппы $N \leq \mathrm{Aut}(S)$, картеровы подгруппы группы $\langle\, N, S \,\rangle$ сопряжены, полученная теорема 3.3.5 влечёт,

что картеровы подгруппы в группах, перечисленных в данной теореме, обязаны содержать силовскую 2-подгруппу. В силу леммы 2.4.3 это возможно лишь в том случае, если нормализатор силовской 2-подгруппы Q в A удовлетворяет равенству $N_A(Q) = QC_A(Q)$, т. е. тогда и только тогда, когда A удовлетворяет **(ESyl2)**. В работе [5] и последующих результатах настоящей работы полностью описаны простые группы, удовлетворяющие условию **(ESyl2)**. Кроме того, леммы 5.3.1 и 5.3.3 позволяют «поднимать» свойство **(ESyl2)** с простой на почти простую группу. Таким образом полностью известна классификация картеровых подгрупп в группах, указанных в теореме 3.3.5

Глава 4. Картеровы подгруппы классических групп

§1 Краткий обзор результатов главы

В настоящей главе изучаются картеровы подгруппы в конечных группах G, удовлетворяющих условию $O^{p'}(L) \leq G \leq L$, где L — одна из полных классических матричных групп: $\mathrm{GU}_n(q)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $\mathrm{GO}_n^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon = \pm$ если n чётно и отсутствует, если n нечётно. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Пусть $q = p^{\alpha}$, где p простое, и предположим, что $G = \mathrm{Sp}_n(q)$, или $\mathrm{SO}_n^{\varepsilon}(q) \leq G \leq \mathrm{GO}_n^{\varepsilon}(q)$, где q нечётно или $\mathrm{SU}_n(q) \leq G \leq \mathrm{GU}_n(q)$. Если в G существует картерова подгруппа K, то либо K является нормализатором силовской 2-подгруппы группы G, либо выполнено одно из следующих утверждений:*

(а) *$G \in \{\mathrm{Sp}_2(3),\ \mathrm{SL}_2(3),\ 2.\mathrm{SU}_2(3)\}$ и K является нормализатором силовской 3-подгруппы группы G;*

(б) *$G = \mathrm{GU}_3(2)$ имеет порядок $2^3 \cdot 3^4$, и K имеет порядок $2 \cdot 3^2$.*

Более того, когда G — ортогональная группа, K является 2-группой, за исключением, возможно, случая, когда $G = \mathrm{SO}_2^{\varepsilon}(q)$.

На протяжении данной главы через $\mathrm{GL}_n(q)$ (соответственно, $\mathrm{SL}_n(q)$, $\mathrm{Sp}_n(q)$, $\mathrm{GO}_n^{\varepsilon}(q)$, $\mathrm{SO}_n^{\varepsilon}(q)$, $\mathrm{GU}_n(q)$, $\mathrm{SU}_n(q)$) будем обозначать *общую линейную* (соотв. *специальную линейную, симплектическую, общую ортогональную* и *специальную ортогональную*, и *общую* и *специальную унитарные*) группы над полем $GF(q)$, причём в ортогональном случае и чётной размерности ε принимает значения $\pm$, а в нечётной размерности мы ε не пишем.

Хотя методы доказательства, используемые в настоящей главе, могут применяться и для любой группы G, такой что $\mathrm{SL}_n(q) \leq G \leq \mathrm{GL}_n(q)$, мы не будем рассматривать здесь эти группы, чтобы избежать разбора дополнительных исключительных случаев. Для этих групп картеровы подгруппы описаны в [2] и [23], и мы будем использовать результаты этих работ.

§2 Обозначения и предварительные результаты

Пусть $GF(q)$ — конечное поле характеристики p и пусть φ — автоморфизм поля $GF(q)$. Для каждой матрицы $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(q)$ обозначим через A^φ матрицу (α_{ij}^φ) и через A^t транспонированную к A матрицу. Напомним, что невырожденная матрица J называется *рефлексивной* если она либо симметрическая, либо кососимметрическая, либо эрмитова. Более точно, это происходит в точности тогда, когда либо $J^t = J$, либо $J = A - A^t$ для некоторой A, либо $J^t = J^\varphi$, где φ — автоморфизм поля $GF(q)$ порядка 2. Пусть G — одна из классических групп, упомянутых в теореме 4.1.1. Хорошо известно (например, см. [21]), что существует такой автоморфизм φ порядка $\leqslant 2$ и такая рефлексивная матрица J, что, для подходящего $d \in \mathbb{N}$:

$$G = \ \{X \in \mathrm{Mat}_n(q) \mid XJX^{\varphi t} = J,\ \det(X)^d = 1\} = G_n^d(q, J, \varphi).$$

До конца данной главы, для краткости, мы часто обозначаем $G_n^d(q, J, \varphi)$ через $G_n^d(q)$ или просто через G. Уместно заметить, что G разрешима (в частности, имеет единственный класс картеровых подгрупп) в точности когда она содержится в одной из следующих групп: $\mathrm{GO}_1(q) = C_2$, $\mathrm{GU}_1(q) = C_{\sqrt{q}+1}$, $\mathrm{GO}_2^\varepsilon(q) = D_{2(q\pm1)}$, $\mathrm{GO}_3(3)$, $\mathrm{GO}_4^+(3)$, $\mathrm{GU}_2(2)$, $\mathrm{GU}_2(3)$ и $\mathrm{GU}_3(2)$.

Для любой подгруппы G группы $\mathrm{GL}_n(q)$ через $GF(q)G$ обозначена подалгебра алгебры $\mathrm{Mat}_n(q)$, состоящая из всех линейных комбинаций элементов из G с коэффициентами из $GF(q)$. Для данного разбиения $n = n_1 + \cdots + n_k$, прямую сумму алгебр $\mathrm{Mat}_{n_1}(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(q)$ будем отождествлять очевидным образом с подалгеброй алгебры $\mathrm{Mat}_n(q)$, а именно с:

$$\{\mathrm{blockdiag}(A_1,\ \ldots\ , A_k) \mid A_i \in \mathrm{Mat}_{n_i}(q),\ i \leqslant k\}.$$

Лемма 4.2.1. *Пусть K — картерова подгруппа группы $G_n^d(q, J, \tau)$. Предположим, что $n = n_1 + \cdots + n_k$, $GF(q)K \leq \mathrm{Mat}_{n_1}(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(q)$ и $J = \mathrm{blockdiag}(J_1,\ \ldots\ , J_k)$, где $J_i \in \mathrm{Mat}_{n_i}(q)$. Для каждого $i \leq k$, обозначим через K_i проекцию группы K в $\mathrm{Mat}_{n_i}(q)$ и положим $d_i = |\{\det(x) \mid x \in G_i\}|$. Тогда:*

(а) *если $n_i = n_\ell$, мы можем предполагать, что $J_i = J_\ell$, за исключением, возможно, случая, когда $G_n^d(q, J, \tau)$ ортогональна;*

(б) *K_i — картерова подгруппа группы $G_{n_i}^{d_i}(q, J_i, \tau)$;*

(в) *пусть $k > 1$, предположим, что K_1 — нормализатор силовской p_1-подгруппы P_1 группы $K_{n_1}^{d_1}(q)$ (для некоторого простого p_1) и что либо*

K_2 является нормализатором силовской p_2-подгруппы P_2 группы $K_{n_2}^{d_2}(q)$ (p_2 простое) либо, что $K_{n_2}^{q-1}(q)$ разрешима. Тогда $d_1 = d_2 = 2$ в ортогональном случае и $d_1 = d_2 = q+1$ в унитарном случае.

Доказательство. (а) Утверждение очевидно, поскольку $G_{n_i}^{d_i}(q, J_i, \tau)$ является симплектической, унитарной или ортогональной в соответствии с тем, какой тип имеет группа $G_n^d(q, J, \tau)$.

(б) Очевидно, каждая K_i является подгруппой группы $G_{n_i}^{d_i}(q)$. Более того, поскольку K нильпотентна и самонормализуема, мы получаем:

$$K = (K_1 \times \ \cdots \ \times K_k) \cap G_n^d(q).$$

Мы хотим показать, что K_i самонормализуема в $G_{n_i}^{d_i}(q)$. Пусть, для простоты обозначений $i = 1$ и положим $h_1 \in N_{G_{n_1}^{d_1}}(K_1)$. По определению d_1, данному в формулировке, существует такой $x_1 \in K_1$, что $\det(x_1) = \det(h_1)$. Пусть $y \in K_2 \times \ \cdots \ \times K_k$ таков, что

$$g = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in K.$$

Следовательно, матрица

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

имеет тот же определитель, что и матрица g. Таким образом, $h \in G_n^d(q)$, поскольку он является изометрией по отношению к J. Очевидно, h нормализует $K_1 \times \ \cdots \ \times K_k$, следовательно, нормализует K. Отсюда следует, что $h \in K$, и мы заключаем, что $h_1 \in K_1$.

(в) $G_{n_1}^{d_1}(q)$ — нормальная подгруппа группы $G_{n_1}^{q-1}(q)$. Значит, мы имеем $P_1 = \widehat{P_1} \cap G_{n_1}^{d_1}(q)$, где $\widehat{P_1}$ является силовской p_1-подгруппой группы $G_{n_1}^{q-1}(q)$. Напомним, что отображение $\det$ переводит нормализатор силовской p_1-группы $G_{n_1}^{q-1}(q)$ на нормализатор силовской p_1-подгруппы в её образе $GF(q)^*$. Таким образом, существует такой $x_1 \in N_{G_{n_1}^{q-1}(q)}(\widehat{P_1})$, что $|\det(x_1)|$ равен 2 в ортогональном случае и $q+1$ в унитарном случае. Из $P_1 = \widehat{P_1} \cap G_{n_1}^{d_1}(q)$, следует, что $P_1^{x_1} = P_1$, значит, $(N_{G_{n_1}^{d_1}(q)}(P_1))^{x_1} = N_{G_{n_1}^{d_1}(q)}(P_1)$ т. е. $K_1^{x_1} = K_1$. Если K_2 — нормализатор подгруппы P_2, те же рассуждения показывают, что существует такой $x_2 \in G_{n_2}^{q-1}(q)$, что $\det(x_1) = \det(x_2)$ и $K_2^{x_2} = K_2$. Таким образом, матрица $\operatorname{blockdiag}\left(x_1, x_2^{-1}, I_{n-n_1-n_2}\right)$ лежит в $G_n^1(q) \leq G_n^d(q)$ и нормализует K. Отсюда следует, что $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$, и наше утверждение верно в этом случае. Теперь предположим, что $G_{n_2}^{q-1}(q)$ разрешима

и предположим от противного, что $d_2 < |\det(x_1)|$. Поскольку отображение $\det$ переводит картерову подгруппу группы $G_{n_2}^{q-1}(q)$ на картерову подгруппу образа (лемма 2.4.1), K_2 не может быть картеровой подгруппой группы $G_{n_2}^{q-1}(q)$. Таким образом, существует такой y_2 в $G_{n_2}^{q-1}(q) \setminus K_2$, что $K_2^{y_2} = K_2$. Очевидно, существует такая степень y_1 элемента x_1, что $\det(y_1) = \det(y_2)$. Используя матрицу $\mathrm{blockdiag}\left(y_1, y_2^{-1}, I_{n-n_1-n_2}\right)$, как и выше, мы делаем вывод, что $y_2 \in K_2$, противоречие. Мы заключаем, что $d_2 = |\det(x_1)|$ и отсюда легко следует, что $d_1 = |\det(x_1)|$. □

Лемма 4.2.2. *Пусть $n = 2m$ и*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ \pm I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда группа

$$L = G_n^d(q, J, \varphi) \cap \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \mid X, Y \in \mathrm{GL}_m(q) \right\}$$

не содержит картеровых подгрупп группы $G_n^d(q, J, \varphi)$, за исключением случая, когда $G_n^d(q) = \mathrm{SO}_2^+(q)$. В этом случае $L = G_n^d(q)$.

Доказательство. Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & (X^{\varphi t})^{-1} \end{pmatrix} \mid X \in G \right\},$$

где $G = \mathrm{GL}_m(q)$ если $G_n^d(q)$ является симплектической или ортогональной, в то время как $\mathrm{SL}_m(q) \leq G \leq \mathrm{GL}_m(q)$ если $G_n^d(q)$ является унитарной. Предположим, что K — картерова подгруппа группы $G_n^d(q)$, содержащаяся в $L \simeq G$. Тогда по [23], K является нормализатором силовской 2-подгруппы группы L, заметим, что если $p = 3$ и $G_n^d(q)$ является унитарной, то $q \geqslant 9$.

Если m нечётно, предположим сначала, что $G_n^d(q) \neq \mathrm{SO}_n^+(q)$. (В ортогональном случае индекс Витта должен быть максимальным из-за вида матрицы J.) Когда m нечётно и $G_n^d(q)$ является унитарной, положим

$$h = \begin{pmatrix} 0 & D \\ (D^\tau)^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где $D = \mathrm{diag}(1, \ldots 1, \alpha)$, причём $\alpha \in GF(q)$ таков, что $\alpha^{1-q} = -1$. В противном случае положим $h = J$. В обоих случаях $h \in G_n^d(q)$ и нормализует L. Следовательно, $K^h = K^x$ для некоторого $x \in L$. Отсюда следует, что $hx^{-1} \in K$, значит, $h \in L$, противоречие.

Наконец предположим, что m нечётно и $G_n^d(q) = \mathrm{SO}_n^+(q)$. В этом случае, если N обозначает нормализатор силовской 2-подгруппы группы $\mathrm{GL}_{m-1}(q)$, по [16, теорема 1] справедливы равенства

$$G = N \times GF(q)^* \;=\; \left\{\mathrm{blockdiag}\left(Y, \eta, (Y^t)^{-1}, \eta^{-1}\right) \;\mid\; Y \in N,\ \eta \in GF(q)^*\right\}.$$

Ясно также, что N^t есть нормализатор силовской 2-подгруппы группы $\mathrm{GL}_{m-1}(q)$. Поэтому существует такая матрица $U \in \mathrm{GL}_{m-1}(q)$, что $N^U = N^t$. В этом случае берём

$$h \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (U^t)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $h \in G_n^d(q)$ и нормализует K, противоречие при $m > 1$. □

Если T — произвольная подгруппа группы G, то $GF(q)T$ — подалгебра алгебры $\mathrm{Mat}_n(q)$, удовлетворяющая условию минимальности. Таким образом, $GF(q)T$ можно записать единственным образом в виде $A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, где $k \geqslant 1$ и каждое слагаемое A_i является неразложимым двусторонним идеалом алгебры $GF(q)T$. Запишем $I_n = \sum_{i=1}^k e_i$, тогда любой e_i является единицей $A_i = e_iA = Ae_i$, и $e_ie_j = 0$ если $i \neq j$. Элементы e_i-ые будет называться *минимальными центральными идемпотентами* алгебры A. Поскольку они попарно коммутируют, они одновременно приводятся к диагональному виду. Более того, поскольку они попарно ортогональны, с точностью до сопряжения в $\mathrm{Mat}_n(q)$ можно предполагать, что $e_1 = \mathrm{diag}(I_{n_1}, 0_{n-n_1})$, $\ldots$ $, e_k = \mathrm{diag}(0_{n-n_k}, I_{n_k})$, причём $n_1 + \ \cdots\ + n_k = n$.

Лемма 4.2.3. *Пусть K — картерова подгруппа группы $G_n^d(q, J, \varphi)$ и пусть T — произвольная подгруппа группы K, такая что $K \leq TC_K(T)$. Предположим, что $GF(q)T$ разложима и пусть $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ — множество минимальных центральных идемпотентов алгебры $GF(q)T$, рангов $n_1, \ldots, n_k$ соответственно. Тогда:*

(а) *$GF(q)K$ разложима и $GF(q)K \leq \mathrm{Mat}_{n_1}(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(q)$;*

(б) *отображение σ, определённое правилом $X \mapsto JX^{\varphi t}J^{-1}$, переставляет множество E действуя как $(e_1, e_2) \cdots (e_{2h-1}, e_{2h})$, для некоторого $h \geqslant 0$, и оставляя неподвижными $e_{2h+1}, \ \cdots\ , \ e_k$;*

(в) *полагая* $m_i = n_{2i-1} + n_{2i}$ *для* $i \leqslant h$ *и* $m_i = n_i$ *для* $i > 2h$, *имеет место тождество*

$$J = \mathrm{blockdiag}(J_1, \cdots, J_h, J_{2h+1}, \cdots, J_k) \text{ где } J_i \in \mathrm{Mat}_{m_i}(q);$$

(г) *случай* $h \geqslant 1$ *может возникнуть только если* $G_n^d(q, J, \varphi)$ *ортогональна. Более того, в этом случае,* $\mathrm{Mat}_{m_i}(q) = \mathrm{Mat}_2(q)$ *и проекция* K_i *группы* K *совпадает с* $\mathrm{SO}_2^+(q)$, *для всех* $i \leqslant h$.

Доказательство. (а) Из $GF(q)T \leq GF(q)K$ следует, что идемпотенты e_i лежат в $GF(q)K$ и, из предположения $K \leq TC_K(T)$, следует, что идемпотенты e_i центральны в $GF(q)G$. Таким образом,

$$GF(q)K \;=\; \bigoplus_{i=1}^{k} e_i(GF(q)K)e_i \;\leq\; \mathrm{Mat}_{n_1}(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(q). \tag{4.1}$$

В частности (4.1) даёт разложение алгебры $GF(q)K$ в виде прямой суммы двусторонних идеалов $e_i(GF(q)K)e_i$, $i \leqslant k$. Значит, $GF(q)K$ разложима.

(б) По определению группы $G_n^d(q)$, любой $X \in T$ удовлетворяет соотношению $\sigma(X) = X^{-1}$, значит, σ оставляет неподвижной алгебру $GF(q)T$. Из единственности центральных идемпотентов следует, что σ фиксирует также множество E, индуцируя подстановку порядка $\leqslant 2$.

(в) Для $i \leqslant h$, σ переставляет e_{2i-1} с e_{2i}. Это эквивалентно тому, что J переставляет сопряжением e_{2i-1} с e_{2i}. Для $i > 2h$, σ фиксирует e_i. Это эквивалентно тому, что J централизует e_i.

(г) Для разложения $n = m_1 + \cdots + m_h + m_{2h+1} + \cdots + m_k$, мы находимся в условиях леммы 4.2.1. В частности, для любого $i \leqslant h$ проекция K_i группы K в $\mathrm{Mat}_{m_i}(q)$ является картеровой подгруппой группы $G_{m_i}^{d_i}(q, J_{m_i}, \varphi)$, для некоторого d_i. С другой стороны, по пункту (а), K_i состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

По лемме 4.2.2 это может случиться лишь если $m_i = 2$ и $K_i = \mathrm{SO}_2^+(q)$. $\square$

Лемма 4.2.4. *Справедливы следующие утверждения*

(1) *Пусть* $P \neq \{e\}$ *— силовская* p*-подгруппа группы* $G_n^d(q)$ *и предположим, что* $N_{G_n^d(q)}(P)$ *нильпотентен. Тогда* $q = 2$ *и* $G_n^d(q)$ *не является унитарной, или* $q = 2$ *и* $G_n^d(q) \in \{\mathrm{SU}_2(2),\ \mathrm{GU}_2(2), \mathrm{SU}_3(2)\}$, *или* $q = 3$ *и* $G_n^d(q) \in \{\mathrm{Sp}_2(3),\ \mathrm{SU}_2(3),\ 2.\mathrm{SU}_2(3)\}$.

(2) *Пусть R — неабелева силовская r-подгруппа группы $G_n^d(q)$, где r нечётно и $p \neq r$. Тогда $N_{G_n^d(q)}(R)$ нильпотентна только когда $n = 1$.*

Доказательство. (1) Заметим, что $P \leq G'$, где G' обозначает коммутант группы $G = G_n^{q-1}(q)$. Таким образом, достаточно показать, что $N_{G'}(P)$ не является нильпотентной в случаях, неуказанных в утверждении. Очевидно, что достаточно показать это для проективного образа $\mathbf{P}G'$ группы G'. Когда $\mathbf{P}G'$ — группа лиева типа ранга $\ell = \ell(n)$, известно, что P нормализуется диагональной подгруппой D. Поскольку $C_D(P)$ содержится в центре $\mathbf{P}G'$, который тривиален, достаточно показать, что D нетривиальна в случаях, неуказанных в утверждении. Для этого мы используем информацию, собранную в следующей таблице, где η_j — собственные значения изометрии τ, индуцированной симметрией диаграммы Дынкина.

$\mathbf{P}G'$	A_ℓ	B_ℓ или C_ℓ	D_ℓ	${}^2A_\ell$	${}^2D_\ell$
d	$(\ell+1, q-1)$	$(2, q-1)$	$(4, q^\ell - 1)$	$(\ell+1, q+1)$	$(4, q^\ell + 1)$
$\lvert D\rvert$	$\frac{1}{d}(q-1)^\ell$	$\frac{1}{d}(q-1)^\ell$	$\frac{1}{d}(q-1)^\ell$	$\frac{1}{d}\prod_{j=1}^{\ell}(q-\eta_j)$	$\frac{1}{d}\prod_{j=1}^{\ell}(q-\eta_j)$

Если $\mathbf{P}G'$ имеет тип D_ℓ, мы предполагаем $\ell \geqslant 4$. В нескрученном случае элементарные вычисления показывают, что D тривиальна только если $q = 2$ или $\ell = 1$ и $q = 2, 3$. В скрученном случае можно предполагать, что $\ell \geqslant 2$, поскольку $\mathrm{SL}_2(q) \simeq \mathrm{SU}_2(q)$. В частности, мы можем предполагать $\eta_1 = -1$. Вновь используем элементарные вычисления, чтобы получить $|D| > 1$.

Вспоминая, что $\mathrm{SL}_2(q) \simeq \mathrm{Sp}_2(q) \simeq \mathrm{SU}_2(q)$, группы G, которые остались после предыдущего анализа — в точности ортогональные группы размерности $\leqslant 6$ (см., например, [33, предложение 2.9.1]). Используя изоморфизмы $\mathrm{SO}_3(q) \simeq \mathbf{P}\mathrm{GL}_2(q)$, $\mathbf{P}\Omega_4^-(q) \simeq \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(q^2)$, $\mathbf{P}\Omega_4^+(q) \simeq \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(q) \times \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(q)$, $\Omega_5(q) \simeq \mathbf{P}\mathrm{Sp}_4(q)$, $\mathbf{P}\Omega_6^+(q) \simeq \mathbf{P}\mathrm{SL}_4(q)$, $\mathbf{P}\Omega_6^-(q) \simeq \mathbf{P}\mathrm{SU}_4(q)$, легко убедиться, что мы не получаем исключений к нашему утверждению (чуть более аккуратная проверка требуется, когда $G \leq \mathrm{GO}_4^+(3)$).

(2) Наше утверждение следует из [34, теорема 3.3], если G является симплектической или ортогональной нечётной размерности. В остальных случаях в [34, теорема 3.4] показано, что если R является силовской r-подгруппой группы G, то существует r'-элемент из коммутанта G', нормализующий R, но нецентрализующий $R \cap G'$. □

Лемма 4.2.5. *Пусть $G_n^d(q)$ и K — минимальные контрпримеры к теореме* 4.1.1, *с минимальным n. Тогда $GF(q)K$ неразложима.*

Доказательство. Предположим противное, что $GF(q)K$ разложима и пусть $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ — множество минимальных центральных идемпотентов алгебры $GF(q)K$, соответствующих рангов $n_1, \ldots, n_k$. Пусть $h \geqslant 0$ — минимальное количество нетривиальных орбит подстановки σ на E. По лемме 4.2.3, и в тех же обозначениях мы имеем

$$GF(q)K \leq \underbrace{\mathrm{Mat}_2(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_2(q)}_{h \geqslant 0 \text{ раз}} \oplus \mathrm{Mat}_{m_{2h+1}}(q) \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{m_k}(q).$$

Как и раньше для каждого i, обозначим через K_i проекцию группы K в $\mathrm{Mat}_{m_i}(q)$. По лемме 4.2.1 каждая K_i является картеровой подгруппой группы $G^{d_i}_{m_i}(q, J_i, \mathrm{id})$, где $d_i = |\{\det(x) \mid x \in K_i\}|$. В виду теоремы 3.3.5 можно считать, что $G^d_n(q)$ не является симплектической группой.

1) Предположим, что $G^d_n(q)$ ортогональна. Если приведённое выше разложение имеет лишь одно слагаемое, то $h = 1$ и $n = 2$, ввиду предположения $k > 1$. Отсюда следует, что $G^d_n(q) = \mathrm{SO}^+_2(q)$ и этот случай не является контрпримером к теореме 4.1.1. Таким образом, существует более одного слагаемого. По индукции, каждая K_i является нормализатором силовской 2-подгруппы P_i группы $G^{d_i}_{m_i}(q)$, и по лемме 4.2.1(в), группа $G^{d_i}_{m_i}(q)$ должна совпадать с полной ортогональной группой $\mathrm{GO}^{\varepsilon_i}_{m_i}(q)$. Отсюда следует, что $h = 0$ и каждая K_i является 2-группой. Мы заключаем, что сама группа K является 2-группой и вновь $G^d_n(q)$ и K не являются контрпримерами к теореме 4.1.1.

2) Предположим, что $G^d_n(q)$ является унитарной. В этом случае $h = 0$. Покажем, что минимальные центральные идемпотенты алгебры $GF(q)K$ имеют попарно различные ранги. Для этого предположим, что e_1 и e_2 имеют одинаковый ранг $n_1 = n_2$. Как замечено в лемме 4.2.1, можно предполагать, что $J_1 = J_2$. По индукции мы можем предполагать, что для $i = 1, 2$, подгруппа K_i является нормализатором силовской p_i-подгруппы группы $G^{d_i}_{n_i}(q)$, за исключением, возможно, случая когда $n_1 = 3$ и $q = 2$. В первом случае по лемме 4.2.1(в), мы имеем $d_1 = d_2 = q + 1$, значит, $K_1 = K_2$. Во втором случае мы имеем $K_1 = K_2$, за исключением случая, когда $1 = d_1 < d_2 = 3$. В этом случае K_1 должна быть нормализатором силовской 2-подгруппы группы $\mathrm{SU}_3(2)$. Замечая, что $\mathrm{GU}_3(2)$ разрешима, можно применить лемму 4.2.1(в) и получить $d_1 = d_2 = 3$, противоречие. Значит, во всех случаях можно предполагать, что $K_1 = K_2$. Далее рассмотрим матрицу

$$x = \begin{pmatrix} 0 & (-I_{n_1})^{n_1} & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2n_1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $x \in G_n^1(q) \leq G_n^d(q)$, и нормализует K. Значит $x \in K$, что невозможно.

Далее мы покажем, что q нечётно, и что K является нормализатором силовской 2-подгруппы группы $G_n^d(q)$, что не противоречит теореме 4.1.1.

Предположим, что q чётно. Заметим, что не существует такого индекса i, что $G_{n_i}^{d_i}(q) = \mathrm{GU}_3(2)$. Действительно, непосредственные вычисления показывают, что в этом случае $GF(q)K_i$ была бы разложимой. Таким образом, по индукции, K_i является нормализатором силовской 2-подгруппы P_i группы $G_{n_i}^{d_i}(q)$. В частности, по лемме 4.2.1(в), $d_i = q+1$, для всех i. Далее зафиксируем обозначения так, чтобы $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Если $P_k = 1$, то $G_{n_k}^{d_k}(q) = K_k$ должна быть нильпотентной. Но это даёт $n_k = 1$, противоречие. Если $P \neq 1$, по лемме 4.2.4, мы должны получить $\mathrm{GU}_{n_k}(q) = \mathrm{GU}_2(2)$, значит, $G_n^d(q) \leq \mathrm{GU}_3(2)$, что не противоречит теореме 4.1.1.

Осталось рассмотреть нечётное q. Таким образом, по индукции K_i является нормализатором силовской 2-подгруппы P_i группы $\mathrm{GU}_{n_i}(q)$, для всех i. Ввиду строения нормализаторов силовских 2-подгрупп в группах $\mathrm{GU}_{n_i}(q)$, полученного в [16], групповая алгебра $GF(q)K_i$ неразложима только если n_i — степень двойки. Но тогда, по той же самой работе, $\widehat{P} = P_1 \times \cdots \times P_k$ является силовской 2-подгруппой группы $\mathrm{GU}_n(q)$. Таким образом, P является подгруппой нормализатора N подгруппы $\widehat{P}$ в $G_n^d(q)$. Полагая $P = \widehat{P} \cap G_n^d(q)$ мы получаем, что P есть силовская 2-подгруппа группы $G_n^d(q)$ и $K \leq N_{G_n^d(q)}(P)$. В частности, поскольку P является подпрямым произведением группы $\widehat{P}$, центр группы P содержится в центре группы $\widehat{P}$, который имеет вид $Z_1 \times \cdots \times Z_k$, где каждая из Z_i циклическая. Можно предполагать, что ранги $n_2, \ldots, n_k$ идемпотентов $e_2, \ldots, e_k$ больше 1. Следовательно, инволюции $U_2, \ldots, U_k$ которые переводят соответственно $e_2, \ldots, e_k$ в их противоположные и оставляют неподвижными остальные, имеют определитель 1. Более того, они являются единственными инволюциями в центре группы $\widehat{P}$, чьи подпространства, состоящие из собственных векторов, соответствующих собственному значению -1 имеют соответственно размерности $n_2 < \cdots < n_k$. Далее пусть $x \in N_{G_n^d(q)}(P)$. Из предыдущих рассуждений следует, что x централизует каждую инволюцию $U_2, \ldots, U_k$. Отсюда следует $x \in \mathrm{Mat}_{n_1}(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}_{n_k}(q)$, значит, $x = x_1 \cdots x_k$, где $x_i \in \mathrm{GU}_{n_i}(q)$. Вновь, поскольку P является подпрямым произведением группы $\widehat{P}$, каждый x_i должен нормализовать проекцию P_i группы $\widehat{P}$. Таким образом, $x_i \in K_i$ для всех i, т. е. $x \in K$. Мы заключаем, что $K = N_{G_n^d(q)}(P)$, где P — силовская 2-подгруппа группы $G_n^d(q)$. □

Следующую теорему мы формулируем в тех обозначениях, в которых она

будет использоваться при доказательстве теоремы 4.1.1. Напомним, что отображение $\sigma : \mathrm{Mat}_m(q^h) \to \mathrm{Mat}_m(q^h)$ называется *инволюцией*, если оно является антиизоморфизмом порядка 2. Для инволюции σ образ элемента x относительно σ удобнее записывать как $\sigma(x)$, чем мы и будем пользоваться.

Лемма 4.2.6. *Пусть σ — инволюция алгебры $\mathrm{Mat}_m(q^h)$ и положим*

$$\mathrm{GU}_m^\sigma(q^h) = \{X \in \mathrm{Mat}_m(q^h) |\ X\,\sigma(X) = I_m\}.$$

Тогда существует автоморфизм φ_1 поля $GF(q^h)$, порядка $\leqslant 2$, и рефлексивная матрица $J_1 \in \mathrm{Mat}_m(q^h)$ такие, что σ является отображением $X \mapsto J_1\, X^{\varphi_1 t}\, J_1^{-1}$. Более того:

(а) *$\mathrm{GU}_m^\sigma(q^h) = G_m^{q^h-1}(q^h, J_1, \varphi_1)$ совпадает с одной из рассматриваемых классических групп или*

(б) *q чётно, $\varphi_1 = \mathrm{id}$, J_1 является симметрической, а не кососимметрической и выполнено одно из следующих утверждений:*

  (1) *$m = 2\ell + 1$ и $\mathrm{GU}_m^\sigma(q) \simeq \mathrm{Sp}_{2\ell}(q)$;*

  (2) *$m = 2\ell + 2$ и $\mathrm{GU}_m^\sigma(q)$ является расщеплённой расширением $N \cdot \mathrm{Sp}_{2\ell}(q)$, где N является 2-группой (мы полагаем $\mathrm{Sp}_0(q) = \{e\}$).*

Доказательство. Центр Z алгебры $\mathrm{Mat}_m(q^h)$ инвариантен относительно σ. Следовательно, σ действует на Z как автоморфизм φ_1 порядка $\leqslant 2$. Отождествим Z с $GF(q^h)$ и рассмотрим отображение $\mathrm{Mat}_m(q^h) \to \mathrm{Mat}_m(q^h)$, определённое правилом:

$$X \mapsto \sigma(X^{\varphi_1 t}).$$

Это отображение является автоморфизмом Z-алгебры. Значит, по теореме Нётер-Сколема (см. [36, 12.6]), существует такая $J_1 \in \mathrm{GL}_m(q^h)$, что $\sigma(X^{\varphi_1 t}) = J_1 X J_1^{-1}$, для всех $X \in \mathrm{Mat}_m(q^h)$. Отсюда следует, что $\sigma(X) = J_1 X^{\varphi_1 t} J_1^{-1}$. Осталось показать, что J_1 рефлексивна.

Из $X = \sigma^2(X) = J_1 J_1^{\varphi_1 t^{-1}} X J_1^{\varphi_1 t} J_1^{-1}$, мы получаем $J_1^{\varphi_1 t} = \gamma J_1$, причём $\gamma \in GF(q^h)$. Применяя $\varphi_1 t$ к последнему равенству, делаем вывод, что $\gamma^{\varphi_1 + 1} = 1$. Если $\varphi_1 = \mathrm{id}$, то $\gamma = \pm 1$ и либо J_1 является симметрической, либо q нечётно и J_1 является кососимметрической. Поэтому предположим $\varphi_1 \neq \mathrm{id}$. Тогда существует такой $\mu \in GF(q^h)$, что $\gamma = \frac{\mu}{\mu^{\varphi_1}}$. В этом случае мы заменяем J_1 на μJ_1, которая является эрмитовой, что завершает рассуждение.

(а) Следующие утверждения хорошо известны (см., например, [21]). Если $\varphi_1 = \mathrm{id}$, J_1 является симметрической и q нечётно, то $\mathrm{GU}_m^\sigma(q^h) = \mathrm{GO}_m(q^h)$.

Если $\varphi_1 = \mathrm{id}$ и J_1 является кососимметрической, то $\mathrm{GU}_m^\sigma(q^h) = \mathrm{Sp}_m(q^h)$. Если $\varphi_1 \neq \mathrm{id}$ и J_1^t является эрмитовой, то $\mathrm{GU}_m^\sigma(q^h) = \mathrm{GU}_m(q^h)$.

(б) Данное утверждение доказано в [24]. □

Лемма 4.2.7. *Пусть T — такая подгруппа группы $G_n^d(q)$, что $C = GF(q)T$ является подполем алгебры $\mathrm{Mat}_n(q)$ порядка q^n. Тогда любой элемент $\psi \in \mathrm{Gal}(GF(q^n) : GF(q))$ реализуется как сопряжение некоторым элементом из $N_{G_n^1(q)}(C^*)$, кроме случая, когда $G_n^{q-1}(q) = \mathrm{GO}_n^-(q)$, при q нечётном. В этом случае n чётно и то же утверждение справедливо для любого автоморфизма ψ, который лежит в подгруппе индекса 2 группы $\mathrm{Gal}(GF(q^n) : GF(q))$. В частности, $N_{G_n^d(q)}(T) > T$ как только $n > 1$ и $G_n^d(q) \neq \mathrm{SO}_2^-(q)$.*

Доказательство. Хорошо известно, что группа $N_{\mathrm{GL}_n(q)}(C^*)$ индуцирует на C сопряжением всю группу $\mathrm{Gal}(GF(q^n) : G(F_q))$ (см., например, [32]). Если $G_n^d(q) = G_n^d(q, J, \varphi)$, обозначим через σ отображение $X \mapsto JX^{\varphi t}J^{-1}$. Из $\sigma(T) = T$ следует, что σ оставляет неподвижным C, индуцируя автоморфизм порядка $\leqslant 2$. Если $\sigma|_C$ имеет порядок 1, то отношение $X^2 = \sigma(X)X = 1$ для всех $X \in T$ влечёт $|T| \leqslant 2$. Значит, $GF(q)T = GF(q)$, что даёт $n = 1$ и наше утверждение, очевидно, верно. Значит, можно предполагать, что $\sigma|_C$ имеет порядок 2, так что $|C : C_\sigma| = 2$. Более того, по определению отображения σ, мы получаем, что $GF(q)I_n \leq C_\sigma$, когда $\varphi = \mathrm{id}$, и $GF(q)I_n \cap C_\sigma = GF(q)I_n$, когда $\varphi \neq \mathrm{id}$. Поскольку $\mathrm{Gal}(GF(q^n) : GF(q))$ является циклической, эти утверждения влекут, что n чётно, когда $\varphi = \mathrm{id}$, в то время как n нечётно, если $\varphi \neq \mathrm{id}$. В [24] показано, что

$$N_{\mathrm{GL}_n(q)}(C^*) \ = \ C^* N_{G_n^{q-1}(q)}(C^*). \tag{4.2}$$

Очевидно, это равенство сразу даёт утверждение леммы в симплектическом случае, поскольку все элементы имеют определитель 1. Предположим, что $G_n^{q^2-1}(q) = \mathrm{GU}_n(q)$. Тогда n нечётно, значит,

$$s = (1 + q \ , \ 1 + q + \cdots + q^{n-1}) = 1. \tag{4.3}$$

Далее пусть $C^* = \langle c \rangle$. Из $\sigma(c) = c^{q^n}$ мы делаем вывод:

$$c^{q^n-1}\,\sigma(c^{q^n-1}) \ = \ c^{q^n-1}\,(c^{q^n-1})^{q^n} \ = \ I_n.$$

Это влечёт $c^{q^n-1} \in \mathrm{GU}_n(q)$. Поскольку $\det(c)$ имеет порядок q^2-1, $\det(c^{q^n-1})$ имеет порядок $q+1$ в виду равенства (4.3). Это показывает, что $C^* \cap \mathrm{GU}_n(q)$ содержит матрицы всех возможных определителей элементов из $\mathrm{GU}_n(q)$ и

мы получаем утверждение из равенства (4.2). Наконец, предположим, что $G_n^{q-1}(q) = \mathrm{GO}_n^{\varepsilon}(q)$ и рассмотрим отображение определителя:

$$N \cap G_n^{q-1}(q) = N_{\mathrm{GO}_n^{\varepsilon}(q)}(C^*) \to \{\pm 1\}.$$

Поскольку ядро этого отображения имеет индекс не более 2, утверждение следует из равенства (4.2). □

Лемма 4.2.8. *Пусть $K = R \times O_{r'}(K)$ — картерова подгруппа конечной группы G, где r простое и R — силовская r-подгруппа группы K. Если $C_G(R)$ нильпотентен, то $K = N_G(R)$. В частности, R — силовская r-подгруппа группы G.*

Доказательство. Очевидно, $Z(R) \times O_{r'}(K)$ является картеровой подгруппой группы $C_G(R)$. Значит, когда последняя группа нильпотентна, мы имеем $Z(R) \times O_{r'}(K) = C_G(R)$. Замечая, что $N_G(R)$ нормализует $C_G(R)$, следовательно, нормализует $O_{r'}(C_G(R)) = O_{r'}(K)$, мы делаем вывод, что $N_G(R)$ нормализует K. □

§3 Доказательство теоремы 4.1.1

В данном параграфе мы докажем теорему 4.1.1.

Пусть $G = G_n^d(q)$ и K — минимальные контрпримеры к нашей теореме с минимальным n. Очевидно, $n > 1$ и K не является 2-группой. Более того, можно предполагать, что $GF(q)K$ неразложима, по лемме 4.2.5, и $G_n^d(q) \not\simeq \mathrm{Sp}_n(q)$ ввиду [24].

Предположим, что T — произвольная подгруппа группы K, такая что $K = TC_K(T)$. Из леммы 4.2.3 следует, что алгебра $GF(q)T$ неразложима. Если мы предположим также, что порядок подгруппы T не делится на p, то $GF(q)T$ является простой алгеброй. По хорошо известной теореме Веддербена, существует такая факторизация $n = mht$, что (с точностью до сопряжения):

$$GF(q)T \;=\; \mathrm{Mat}_m(q^h) \otimes I_t, \quad C_{\mathrm{Mat}_n(q)}(GF(q)T) \;=\; I_m \otimes \mathrm{Mat}_t(q^h). \qquad (4.4)$$

Пусть σ обозначает инволюцию алгебры $\mathrm{Mat}_n(q)$, определённую правилом

$$X \mapsto JX^{\varphi t}J^{-1}.$$

Условие $\sigma(X) = X^{-1}$ для всех $X \in T$ влечёт $\sigma(GF(q)T) = GF(q)T$. Отсюда следует, что σ оставляет неподвижным также $C_{\mathrm{Mat}_n(q)}(GF(q)T)$, индуцируя

(анти)изоморфизм порядка $\leqslant 2$. Мы положим

$$L_m = G_n^d(q) \cap GF(q)T, \quad L_t = G_n^d(q) \cap C_{\mathrm{Mat}_n(q)}(GF(q)T). \tag{4.5}$$

Если $\sigma|_{GF(q)T} = \mathrm{id}$, то L_m является элементарной абелевой 2-группой. В противном случае по лемме 4.2.6 либо (1) L_m является одной из рассматриваемых классических групп, или (2) q чётно и $L_m = 2^a \cdot \mathrm{Sp}_{m-s}(q^h)$, причём $a \geqslant 0$, $s \in \{1,2\}$. В этом случае центр группы L_m является 2-группой. Более того, картерова подгруппа группы L_m может быть лишь 2-группой, ввиду [24]. Очевидно, те же самые рассуждения применимы к L_t. Заметим, что по лемме 4.2.4, силовская p-подгруппа группы G никогда не является самонормализуемой, таким образом, $O_{p'}(K) \neq \{e\}$.

Случай 1. Предположим, что $O_{p'}(K)$ абелева. В этом случае мы полагаем $T = O_{p'}(K)$. Значит, $m = 1$, $GF(q)T = GF(q^h) \otimes I_t$ содержится в $C = C_{\mathrm{Mat}_n(q)}(GF(q)T)$, и $K \leq C_{G_n^d(q)}(T)$. Поэтому K является картеровой подгруппой группы L_t. В частности, $\sigma_C \neq \mathrm{id}$ и L_t не имеет тип (2), поскольку K не может быть 2-группой. Рассмотрим сначала случай $t = 1$, $h = n$. Отсюда следует, что $GF(q)T = C_{\mathrm{Mat}_n(q)}(GF(q)T) = GF(q^n)$ является подполем алгебры $\mathrm{Mat}_n(q)$ и $K = T \leq GF(q^n)^*$. По лемме 4.2.7 мы получаем противоречие $T < N_{K_n^d(q)}(T)$, за исключением случая, когда $G_n^d(q) = \mathrm{SO}_2^-(q)$, но эта группа не является контрпримером к теореме 4.1.1.

Рассмотрим теперь случай $t > 1$. Поскольку T является скалярной над полем $GF(q^h)$, отсюда следует, что T содержится в центре группы L_t, группы типа (1). Следовательно, либо $P = \{e\}$, $K = T = L_t$, либо K является нормализатором нетривиальной силовской p-подгруппы P группы L_t. Первый вариант невозможен, так как он влечёт, что L_t должна быть скалярной с $t > 1$, и это может выполниться лишь если L_t является ортогональной 2-группой. Значит, предположим, что $K = N_{L_t}(P)$. По лемме 4.2.4, мы имеем, что $q^h \in \{2,3\}$. В частности, $h = 1$. Таким образом T является скалярной над $GF(q)$ и $K = P \times T$ является нормализатором силовской p-подгруппы группы $G_n^d(q)$. По лемме 4.2.4 имеем, что $p = 2$ или $G_n^d(q) \in \{\mathrm{Sp}_2(3), \mathrm{SU}_2(3), 2.\mathrm{SU}_2(3)\}$, что согласуется с теоремой 4.1.1.

Таким образом, мы делаем вывод, что $O_{p'}(K)$ не может быть абелевой, следовательно, существует неабелева силовская r-подгруппа R группы K, где $p \neq r$.

Случай 2. Положим $T = R$ и запишем $K = T \times S$. Заметим, что $\sigma|_{GF(q)T} \neq \mathrm{id}$, поскольку T неабелева. Как доказано в основной теореме [24], подгруппа $T \times (GF(q)T \cap S)$ является картеровой подгруппой группы L_m и $Z(T) \times S$ является картеровой подгруппой группы L_t. Таким образом, из $GF(q)T \cap S \leq$

$Z(GF(q)T) \cap G_n^d(q) \leq Z(L_m)$ следует равенство $T \times (GF(q)T \cap S) = N_{L_m}(T)$. В частности, T должна быть абсолютно неприводимой силовской r-подгруппой группы L_m с нильпотентным нормализатором. Поскольку картеровы подгруппы групп типа (2) являются 2-группами, если L_m или L_t имели бы тип (2), то T была бы 2-группой и $p = r = 2$, что не соответствует предположению. Таким образом, и L_m, и L_t имеют тип (1) и лемма 4.2.4 влечёт, что $r = 2$. Ввиду абсолютной неприводимости группы T над $GF(q^h)$, m является степенью 2. Поскольку T неабелева, $1 < m$ и $t < n$. Из неравенства $r \neq p = 2$ и индуктивного предположения мы имеем $Z(T) \times S = N_{L_t}(R_t)$ причём либо **(а)** $R_t \in \mathrm{Syl}_2(L_t)$, либо **(б)** $R_t \in \mathrm{Syl}_3(L_t)$.

В случае **(а)**, $R_t = Z(T)$ является скалярной: следовательно, $Z(T) \times S = L_t$ нильпотентна. Поскольку $L_t = C_K(T)$, по лемме 4.2.8 мы получаем $K = N_G(T)$, что и требовалось. Заметим, что когда $G_n^d(q)$ ортогональна и $n > 2$, то централизатор группы T в $G_n^d(q)$ есть 2-группа. Это можно получить, используя описание группы T, данное в [16], группы $N_G(T)$, данное в [5], и этот факт доказан в [6]. Таким образом, в ортогональном случае K является 2-группой.

Наконец рассмотрим случай **(б)**, в котором $Z(T) \times S$ является нормализатором силовской 3-подгруппы группы L_t, и $L_t \in \{\mathrm{Sp}_2(3),\ \mathrm{SU}_2(3), 2.\mathrm{SU}_2(3)\}$. Тогда S имеет порядок 3, и T должна быть силовской 2-подгруппой группы $N_{G_n^d(q)}(S)$. Из $|N_{G_n^d(q)}(S) : C_{G_n^d(q)}(S)| \leqslant 2$ следует $N_{G_n^d(q)}(S) = C_{G_n^d(q)}(S)$. Таким образом, порождающий s группы S несопряжён с s^{-1} в $G_n^d(q)$. Но это может выполниться лишь если $m = 1$ и $G_n^d(q) = L_t$. Действительно, предположим $m = 2^a$ причём $a > 1$. С точностью до сопряжения можно предполагать, что

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J_0 \\ \pm J_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix},$$

где $J_0 \otimes I_t$ — форма, оставляемая неподвижной группой L_m. Мы можем также предполагать, что

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \pm I & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = \mathrm{blockdiag}(I, -I)$. Мы имеем $AJ_0A^t = -J_0$. Отсюда следует, что матрица $\mathrm{blockdiag}(A, -A)$ принадлежит группе $G_n^1(q)$ и инвертирует s. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.1.1.

Глава 5. Полулинейные группы лиева типа

В данной главе мы дадим определение полулинейных групп лиева типа и перенесём на них результаты о строении групп лиева типа. Данная теория понадобится при изучении картеровых подгрупп в группах лиева типа, расширенных с помощью полевых, графовых или графово-полевых автоморфизмов в главе 6. В последнем параграфе главы мы изучим вопросы существования картеровых подгрупп в полулинейных группах в том случае, когда картеровы подгруппы либо содержат силовскую 2-подгруппу, либо содержатся в нормализаторе подгруппы Бореля.

§1 Основные определения

Теперь мы определим некоторые надгруппы конечных групп лиева типа. Сначала мы дадим более подробное описание отображения Фробениуса σ. Отметим, что все отображения, рассматриваемые в данном параграфе, являются автоморфизмами, если группу $\overline{G}$ рассматривать как абстрактную группу и эндоморфизмами, если её рассматривать как алгебраическую группу. Поскольку мы используем отображения для построения связанных автоморфизмов в конечных группах и группах над алгебраически замкнутым полем, мы считаем уместным в данном параграфе называть все отображения автоморфизмами. Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа присоединённого типа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ конечного поля положительной характеристики p. Везде далее, если не оговорено противное, мы будем рассматривать группы присоединённого типа. Выберем подгруппу Бореля $\overline{B}$ группы $\overline{G}$, пусть $\overline{U} = R_u(\overline{B})$ — унипотентный радикал группы $\overline{B}$. Существует подгруппа Бореля $\overline{B}^-$, удовлетворяющая равенству $\overline{B}\cap\overline{B}^- = \overline{T}$, где $\overline{T}$ — максимальный тор группы $\overline{B}$ (значит, и группы $\overline{G}$). Мы частично дублируем обозначения и определения из § 2 главы 1 здесь. Пусть Φ — корневая система группы $\overline{G}$ и пусть $\{X_r \mid r \in \Phi^+\}$ — множество $\overline{T}$-инвариантных

1-мерных корневых подгрупп группы $\overline{U}$. Каждая X_r изоморфна аддитивной группе поля $\overline{\mathbb{F}}_p$, значит, любой элемент группы X_r можно записать как $x_r(t)$, где t — образ элемента $x_r(t)$ относительно этого изоморфизма. Обозначим через $\overline{U}^- = R_u(\overline{B}^-)$ унипотентный радикал группы $\overline{B}^-$. Как и выше, определим $\overline{T}$-инвариантные 1-мерные подгруппы $\{\overline{X}_r \mid r \in \Phi^-\}$ группы $\overline{U}^-$. Тогда $\overline{G} = \langle \overline{U}, \overline{U}^- \rangle$. Пусть $\bar{\varphi}$ — полевой автоморфизм группы $\overline{G}$ (как абстрактной группы) и $\bar{\gamma}$ — графовый автоморфизм группы $\overline{G}$. Известно, что $\bar{\varphi}$ можно выбрать так, что он действует по правилу $x_r(t)^{\bar{\varphi}} = x_r(t^p)$ (см., например, [11, 12.2] и [15, 1.7]). Ввиду [11, предложения 12.2.3 и 12.3.3], мы можем выбрать $\bar{\gamma}$ так, что он действует по правилу $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t)$, если Φ не содержит корней различной длины, и по правилу $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t^{\lambda_r})$ для подходящего $\lambda_r \in \{1,2,3\}$, если Φ содержит корни различной длины. Напомним, что $\bar{r}$ — это образ корня r относительно симметрии ρ (соответствующей автоморфизму $\bar{\gamma}$) корневой системы Φ. В обоих случаях мы можем записать $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t^{\lambda_r})$, где $\lambda_r \in \{1,2,3\}$. Из этих формул видно, что $\bar{\varphi} \cdot \bar{\gamma} = \bar{\gamma} \cdot \bar{\varphi}$. Пусть $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$ и $\overline{N} = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi, t \in \overline{\mathbb{F}}_p^* \rangle$. Пусть $h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$ и $\overline{H} = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi, t \in \overline{\mathbb{F}}_p^* \rangle$. Ввиду [11, главы 6 и 7], $\overline{H}$ есть максимальный тор группы $\overline{G}$, $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{H})$, и подгруппы $\overline{X}_r$ являются корневыми подгруппами относительно $\overline{H}$. Значит, мы можем заменить $\overline{T}$ на $\overline{H}$ и предполагать, что относительно нашего выбора тор $\overline{T}$ является $\bar{\varphi}$- и $\bar{\gamma}$- инвариантным. Более того, $\bar{\varphi}$ индуцирует тривиальный автоморфизм факторгруппы $\overline{N}/\overline{H}$. Отметим, что $\overline{H} \leq \overline{B} \cap \overline{B}^-$, следовательно, $\overline{H} = \overline{T}$.

Автоморфизм $\bar{\varphi}^k$, где $k \in \mathbb{N}$ называется *классическим автоморфизмом Фробениуса*. Мы будем называть автоморфизм σ *автоморфизмом Фробениуса*, если σ сопряжён относительно $\overline{G}$ с $\bar{\gamma}^\epsilon \bar{\varphi}^k, \epsilon \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}$. Из теоремы Ленга-Стейнберга [41, теорема 10.1] следует, что для любого $\bar{g} \in \overline{G}$ элементы σ и $\sigma\bar{g}$ сопряжены относительно $\overline{G}$. Таким образом, ввиду [41, 11.6], мы имеем, что отображение Фробениуса, определённое в § 4 главы 1, совпадает с автоморфизмом Фробениуса, определённым здесь.

Далее, зафиксируем $\overline{G}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\gamma}$, и $\sigma = \bar{\gamma}^\epsilon \bar{\varphi}^k$; и предположим, что $|\bar{\gamma}| \leqslant 2$, т. е. мы не рассматриваем тройственный автоморфизм группы $\overline{G}$ с корневой системой $\Phi(\overline{G}) = D_4$. Положим $B = \overline{B}_\sigma$, $H = \overline{H}_\sigma$, и $U = \overline{U}_\sigma$. Поскольку $\overline{B}, \overline{H}$, и $\overline{U}$ являются $\bar{\varphi}$- и $\bar{\gamma}$- инвариантными, они дают нам соответственно подгруппу Бореля, подгруппу Картана и максимальную унипотентную подгруппу (силовскую p-подгруппу) группы $\overline{G}_\sigma$ (см. более подробно [15, 1.7–1.9] или [28, глава 2]).

Предположим, что $\epsilon = 0$, т. е. $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ нескручена (расщеплённая). Тогда

$U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$, где X_r изоморфна аддитивной группе поля $GF(p^k) = GF(q)$ и любой элемент группы X_r может быть записан в виде $x_r(t), t \in GF(q)$. Положим также $U^- = \overline{U}_\sigma^-$. Как и для U, мы можем записать $U^- = \langle X_r \mid r \in \Phi^-\rangle$ и любой элемент группы X_r может быть записан в виде $x_r(t), t \in GF(q)$. Далее мы можем определить автоморфизм φ как ограничение автоморфизма $\bar{\varphi}$ на $\overline{G}_\sigma$ и автоморфизм γ как ограничение автоморфизма $\bar{\gamma}$ на $\overline{G}_\sigma$. По определению выполнены равенства $x_r(t)^\varphi = x_r(t^p)$ и $x_r(t)^\gamma = x_{\bar{r}}(t^{\lambda_r})$ для всех $r \in \Phi$ (смотри определение автоморфизма $\bar{\gamma}$ выше). Определим автоморфизм ζ группы $\overline{G}_\sigma$ равным $\zeta = \gamma^\varepsilon\varphi^\ell$, $\varphi^\ell \neq e$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, и автоморфизм $\bar{\zeta}$ группы $\overline{G}$ равным $\bar{\zeta} = \bar{\gamma}^\varepsilon \cdot \bar{\varphi}^\ell$. Выберем ζ-инвариантную подгруппу G, удовлетворяющую условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Заметим, что если корневая система Φ группы $\overline{G}$ не равна D_{2n}, то факторгруппа $\overline{G}_\sigma/(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$ циклическая. Таким образом, для большинства групп и автоморфизмов, кроме групп типа D_{2n} над полем нечётной характеристики, любая подгруппа G группы $\overline{G}_\sigma$, удовлетворяющая $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$, является γ- и φ- инвариантной. Определим ΓG как множество подгрупп вида $\langle G, \zeta g\rangle \leq \overline{G}_\sigma \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где $g \in \overline{G}_\sigma$, $\langle\zeta g\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq G$; и $\Gamma\overline{G}$ как множество подгрупп вида $\overline{G} \leftthreetimes \langle\bar{\zeta}\rangle$. Следуя [28, определение 2.5.13], будем называть автоморфизм ζ *полевым*, если $\varepsilon = 0$, т. е. $\zeta = \varphi^\ell$ и *графово-полевым* в остальных случаях (напомним, что мы предполагаем $\varphi^\ell \neq e$).

Предположим теперь, что $\epsilon = 1$, т. е. $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ скручена. Тогда $U = \overline{U}_\sigma$ и $U^- = \overline{U}_\sigma^-$. Определим φ на $U^\pm$ как сужение автоморфизма $\bar{\varphi}$ на $U^\pm$. Поскольку $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = \langle U^+, U^-\rangle$, мы получаем автоморфизм φ группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Рассмотрим $\zeta = \varphi^\ell \neq e$, и пусть G — ζ-инвариантная группа, удовлетворяющая условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Тогда $\bar{\zeta} = \bar{\varphi}^\ell$ является автоморфизмом группы $\overline{G}$. Определим ΓG как множество подгрупп вида $\langle G, \zeta g\rangle \leq \overline{G}_\sigma \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где $g \in \overline{G}_\sigma$, $\langle\zeta g\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq G$; и $\Gamma\overline{G}$ как множество подгрупп вида $\overline{G} \leftthreetimes \langle\bar{\zeta}\rangle$. Следуя [28, определение 2.5.13], мы будем говорить, что автоморфизм ζ является *полевым*, если $|\zeta|$ не делится на $|\gamma|$ (это определение будет использоваться и в том случае, если $|\gamma| = 3$ и $\overline{G}_\sigma \simeq {}^3D_4(q^3)$), и что автоморфизм ζ является *графовым* в остальных случаях.

Группы из множества ΓG, определённого выше, называются *полулинейными конечными группами лиева типа* (они называются также *полулинейными каноническими конечными группами лиева типа*, если $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$), а группы из множества $\Gamma\overline{G}$ называются *полулинейными алгебраическими группами.* Заметим, что $\Gamma\overline{G}$ нельзя определить без ΓG, поскольку нам необходимо знание того, что $\varphi^\ell \neq e$. Если G записана в обозначениях из [11], т. е. $O^{p'}(G) = G = A_n(q)$ или $O^{p'}(G) = G = {}^2A_n(q^2)$ и т. д., то мы будем записы-

вать ΓG как $\Gamma A_n(q)$, $\Gamma^2 A_n(q^2)$, и т. д.

Рассмотрим $A \in \Gamma G$ и $x \in A \setminus G$. Тогда $x = \zeta^k y$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $y \in \overline{G}_\sigma$. Определим $\bar{x}$ равным $\bar{\zeta}^k y$. Обратно, если $\bar{x} = \bar{\zeta}^k y$ для некоторого $y \in \overline{G}_\sigma$, $\zeta^k \neq e$ и $\langle \zeta^k y \rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq G$, определим x равным $\zeta^k y$. Заметим, что нам не нужно предполагать, что $\bar{x} \notin \overline{G}$ поскольку $|\bar{\zeta}| = \infty$. Если $x \in G$, полагаем $\bar{x} = x$.

Лемма 5.1.1. *Во введённых выше обозначениях рассмотрим подгруппу X группы G. Элемент x нормализует X в том и только в том случае, когда $\bar{x}$ нормализует X как подгруппу группы $\overline{G}$.*

Доказательство. Поскольку ζ является ограничением автоморфизма $\bar{\zeta}$ на G наше утверждение тривиально. □

Пусть X_1 — подгруппа группы $A \in \Gamma G$. Тогда X_1 порождается нормальной подгруппой $X = X_1 \cap G$ и элементом $x = \zeta^k y$. Ввиду леммы 5.1.1, мы можем рассмотреть подгруппу $\overline{X}_1 = \langle \bar{x}, X \rangle$ группы $\overline{G} \leftthreetimes \langle \bar{\zeta} \rangle$. Далее, мы находим разумным объяснить, почему мы используем столь запутанные обозначения и определения. Мы имеем, что порядок элемента ζ всегда конечен, но порядок элемента $\bar{\zeta}$ всегда бесконечен. Таким образом, даже если $Z(G)$ тривиален, мы не можем рассматривать $G \leftthreetimes \langle \bar{\zeta} \rangle$ как подгруппу группы $\mathrm{Aut}(G)$. Следовательно, нам нужно определить каким-нибудь образом (один возможный способ только что дан) связь между элементами из $\mathrm{Aut}(G)$ и элементами из $\mathrm{Aut}(\overline{G})$ для того, чтобы использовать технику линейных алгебраических групп.

Пусть $\overline{R}$ — σ-инвариантный максимальный тор (соотв. редуктивная подгруппа максимального ранга, параболическая подгруппа) группы $\overline{G}$, и элемент $y \in N_{\overline{G} \leftthreetimes \langle \bar{\zeta} \rangle}(\overline{R})$, выбран так, что существует элемент $x \in \langle G, \zeta g \rangle$, удовлетворяющий равенству $y = \bar{x}$. Тогда $R_1 = \langle x, \overline{R} \cap G \rangle$ называется *максимальным тором* (соотв. *редуктивной подгруппой максимального ранга*, *параболической подгруппой*) группы $\langle G, \zeta g \rangle$.

§2 Перенос основных результатов

Лемма 5.2.1. *Пусть $M = \langle x, X \rangle$, где $X = M \cap G \trianglelefteq M$ — такая подгруппа группы $\langle G, \zeta g \rangle$, что подгруппа $O_p(X)$ нетривиальна. Тогда существует такая собственная σ- и $\bar{x}$- инвариантная параболическая подгруппа $\overline{P}$ группы $\overline{G}$, что $X \leq \overline{P}$ и $O_p(X) \leq R_u(\overline{P})$.*

Доказательство. Определим $U_0 = O_p(X)$, $N_0 = N_{\overline{G}}(U_0)$ и далее по индукции $U_i = U_0R_u(N_{i-1})$ и $N_i = N_{\overline{G}}(U_i)$. Очевидно U_i, N_i являются $\bar{x}$- и σ- инвариантными для всех i. Ввиду [8, предложение 30.3], цепь подгрупп $N_0 \leq N_1 \leq \ldots \leq N_k \leq \ldots$ конечна и $\overline{P} = \cup_i N_i$ является собственной параболической подгруппой группы $\overline{G}$. Очевидно, что $\overline{P}$ является σ- и $\bar{x}$-инвариантной, $X \leq \overline{P}$ и $O_p(X) \leq R_u(\overline{P})$. □

Лемма 5.2.2. *Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ — конечная присоединённая группа лиева типа с базовым полем характеристики p и порядка q. Предположим также, что группа $O^{p'}(G)$ не изоморфна группам ${}^2D_{2n}(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^2F_4(2^{2n+1})$. Тогда существует такой максимальный σ-инвариантный тор $\overline{T}$ группы $\overline{G}$, что*

(а) $(N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T})_\sigma \simeq (N_{\overline{G}}(\overline{T}))_\sigma/(\overline{T}_\sigma) = N(\overline{G}_\sigma, \overline{T}_\sigma)/\overline{T}_\sigma \simeq W$, *где W — группа Вейля группы $\overline{G}$;*

(б) *если r — нечётный простой делитель числа $q - (\varepsilon 1)$, где $\varepsilon = +$, если G расщеплённая и $\varepsilon = -$, если G скрученная, то $N(\overline{G}_\sigma, \overline{T}_\sigma)$ содержит силовскую r-подгруппу группы $\overline{G}_\sigma$;*

(в) *если r — простой делитель числа $q - (\varepsilon 1)$, и s — такой элемент порядка r группы G, что $C_{\overline{G}}(s)$ связен, то, с точностью до сопряжения элементом из G, элемент s содержится в $T = \overline{T}_\sigma \cap G$;*

Тор $\overline{T}$ единственный с точностью до сопряжения в $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ и $|\overline{T}_\sigma| = (q - \varepsilon 1)^n$, где n — ранг группы $\overline{G}$.

Доказательство. Поскольку для любого максимального тора T группы $\overline{G}_\sigma$ выполнено равенство $\overline{G}_\sigma = TO^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, без потери общности мы можем предполагать, что $G = \overline{G}_\sigma$. Если G расщеплённая, то лемма легко доказывается. В этом случае $\overline{T}$ является таким максимальным тором, что $\overline{T}_\sigma$ — подгруппа Картана группы $\overline{G}_\sigma$ (т. е. $\overline{T}$ является максимальным расщеплённым тором) и (а) очевиден. Пункт (б) следует из [29, (10.1)]. Кроме того, из [29, (10.2)] следует, что порядок тора $\overline{T}_\sigma$ определён единственным образом и равен $(q-1)^n$, где n — ранг группы $\overline{G}$. По [1, F, §6] выполнено, что любой элемент порядка r группы $\overline{T}$ содержится в $\overline{G}_\sigma$. Далее, существует такой $g \in \overline{G}$, что $s^g \in \overline{T}$, значит, $s^g \in G$. В силу связности централизатора элемента s, элементы s и s^g сопряжены в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в G, поэтому s и s^g сопряжены в G, откуда следует (в). Информация о классах максимальных торов, данная в [1, G] и [12], влечёт, что, с точностью до сопряжения элементом из G, существует единственный тор $\overline{T}$ такой, что $|\overline{T}_\sigma| = (q-1)^n$.

Предположим, что $O^{p'}(G) \simeq {}^2A_n(q^2)$. Тогда $\overline{T}$ является таким максимальным тором, что $|\overline{T}_\sigma| = (q+1)^n$. Отметим, что тор $\overline{T}_\sigma$ получается из максимального расщеплённого тора скручиванием элементом $w_0\sigma$. Непосредственные вычисления, с использованием [15, предложение 3.3.6] показывают, что группа $N(\overline{G}_\sigma, \overline{T}_\sigma)/\overline{T}_\sigma$ изоморфна группе $W(\overline{G})$, которая в свою очередь изоморфна Sym_{n+1}. Единственность следует из [14, предложение 8]. Пункт (б) следует из [29, (10.1)]. Для доказательства пункта (в) покажем сначала, что любой элемент порядка r из $\overline{T}$ лежит в G. Предположим, что t — элемент порядка r в $\overline{T}$ (напомним, что в этом случае r делит $q+1$). Пусть $\overline{H}$ — σ-инвариантный максимальный расщеплённый тор группы $\overline{G}$. Тор $\overline{T}_\sigma$ получен из $\overline{H}$ «скручиванием» элементом $w_0\sigma$, где $w_0 \in W(\overline{G})$ — единственный элемент, отображающий положительные корни в отрицательные и $\overline{T}_\sigma \simeq \overline{H}_{\sigma w_0}$. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — множество фундаментальных корней корневой системы A_n. Тогда t, как элемент группы $\overline{H}$, может быть записан как $h_{r_1}(\lambda_1) \cdot \ldots \cdot h_{r_n}(\lambda_n)$. Далее, для любого i, мы имеем $\sigma w_0 : h_{r_i}(\lambda) \mapsto h_{-r_i}(\lambda^q) = h_{r_i}(\lambda^{-q})$, т. е. $t^{\sigma w_0} = t^{-q}$. Поскольку r делит $q+1$, мы получаем, что $t^{q+1} = e$, т. е., $t = t^{-q}$. Значит, $t^{\sigma w_0} = t$ и $t \in \overline{T}_\sigma$. Далее, как и в нескрученном случае, существует такой элемент $g \in \overline{G}$, что $s^g \in \overline{T}$, следовательно, $s^g \in \overline{T}_\sigma$. В силу связности $C_{\overline{G}}(s)$, элементы s и s^g сопряжены в G.

Для $O^{p'}(G) = {}^2D_{2n+1}(q^2)$ мы берём $\overline{T}$ равным единственному (с точностью до сопряжения в G) максимальному тору, для которого порядок $|\overline{T}_\sigma|$ равен $(q+1)^{2n+1}$ (единственность следует из [14, предложение 10]), а для $O^{p'}(G) = {}^2E_6(q^2)$ мы берём $\overline{T}$ равным единственному (вновь с точностью до сопряжения в G) максимальному тору, для которого порядок $|\overline{T}_\sigma|$ равен $(q+1)^6$ (единственность тора следует из [20, таблица 1, стр. 128]). Как в случае $G = {}^2A_n(q^2)$ легко показать, что $\overline{T}$ удовлетворяет утверждениям (а), (б) и (в) леммы. □

Лемма 5.2.3. *Пусть G — конечная группа лиева типа и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть s — регулярный полупростой элемент нечётного простого порядка r группы G. Тогда $N_G(C_{\overline{G}}(s)) \neq C_G(s)$.*

Доказательство. Ввиду [31, предложение 2.10] мы имеем, что факторгруппа $C_{\overline{G}}(s)/C_{\overline{G}}(s)^0$ изоморфна подгруппе группы $\Delta(\overline{G})$. Далее, если корневая система Φ группы $\overline{G}$ не равна либо A_n, либо E_6, то $|\Delta(\Phi)|$ является степенью 2. Поскольку $\Delta(\overline{G})$ является факторгруппой группы $\Delta(\Phi(\overline{G}))$, то лемма 3.2.1 влечёт, что $C_{\overline{G}}(s) = C_{\overline{G}}(s)^0 = \overline{T}$ является максимальным тором и $C_G(s) = C_{\overline{G}}(s) \cap G = T$. Поскольку $N_G(\overline{T}) = N(G, T) \neq T$, мы получаем утверждение леммы в этом случае. Таким образом, можно предполагать, что

либо $\Phi = A_n$, либо $\Phi = E_6$.

Предположим сначала, что $\Phi = A_n$, т. е. $O^{p'}(G) = A_n^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Очевидно, что $T = C_{\overline{G}}(s)^0 \cap G$ является нормальной подгруппой группы $C_G(s)$, значит, $C_G(s) \leq N(G,T)$. Предположим, что $N_G(C_{\overline{G}}(s)) = C_G(s)$. Тогда $C_G(s) = N_{N(G,T)}(C_G(s))$ и $C_G(s)/T$ является самонормализуемой подгруппой группы $N(G,T)/T$. Как мы заметили выше, $C_G(s)/T$ изоморфна подгруппе группы $\Delta(A_n)$, т. е. является циклической. По лемме 3.2.1, мы также получаем, что $C_G(s)/T$ является r-группой, таким образом, $C_G(s)/T = \langle x \rangle$ для некоторого r-элемента $x \in N(G,T)/T$. Следовательно, $\langle x \rangle$ является картеровой подгруппой группы $N(G,T)/T$. Далее, ввиду [15, предложение 3.3.6], выполнено $N(G,T)/T \simeq C_{W(\overline{G})}(y)$ для некоторого $y \in W(\overline{G}) \simeq \mathrm{Sym}_{n+1}$. Ясно, что $C_{C_{W(\overline{G})}(y)}(x)$ содержит y. Таким образом, y должен быть r-элементом, в противном случае $N_{C_{W(\overline{G})}(y)}(\langle x \rangle)$ содержал бы элемент y порядка взаимно простого с r, т. е. $N_{C_{W(\overline{G})}(y)}(\langle x \rangle) \neq \langle x \rangle$. Противоречие с тем, что $\langle x \rangle$ есть картерова подгруппа группы $C_{W(\overline{G})}(y)$.

Далее пусть $y = \tau_1 \cdot \ldots$ — разложение элемента y в произведение независимых циклов и $l_1, \ldots$ — длины циклов $\tau_1, \ldots$ соответственно. Предположим сначала, что m_1 циклов имеют одинаковую длину l_1, m_2 имеют длину l_2 и т. д. Пусть $m_0 = n + 1 - (l_1 m_1 + \ldots + l_k m_k)$. Тогда

$$C_{W(\overline{G})}(y) \simeq \left(Z_{l_1} \wr \mathrm{Sym}_{m_1}\right) \times \ldots \times \left(Z_{l_k} \wr \mathrm{Sym}_{m_k}\right) \times \mathrm{Sym}_{m_0},$$

где Z_{l_i} — циклическая группа порядка l_i. Если $m_j > 1$ для некоторого $j \geqslant 0$, то существует такая нормальная подгруппа N группы $C_{W(\overline{G})}(y)$, что имеет место изоморфизм $C_{W(\overline{G})}(y)/N \simeq \mathrm{Sym}_{m_j} \neq \{e\}$. По лемме 3.3.2 картеровы подгруппы в группе S, удовлетворяющей условию $\mathrm{Alt}_\ell \leq S \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_\ell)$, сопряжены для всех $\ell \geqslant 5$. Таким образом, группы $C_{W(\overline{G})}(y)$, N удовлетворяют условию **(C)** и $\langle x \rangle$ — единственная, с точностью до сопряжения, картерова подгруппа в $C_{W(\overline{G})}(y)$. По лемме 2.4.1 мы получаем, что $\langle x \rangle$ отображается на картерову подгруппу группы $C_{W(\overline{G})}(y)/N \simeq \mathrm{Sym}_{m_j}$. По лемме 3.3.2 только силовская 2-подгруппа группы Sym_{m_j} может быть картеровой подгруппой группы Sym_{m_j}. Противоречие с тем, что x является r-элементом и r нечётно.

Таким образом, мы можем предполагать, что $C_{W(\overline{G})}(y) \simeq (Z_{l_1} \times \ldots \times Z_{l_k})$ и $l_i \neq l_j$ если $i \neq j$. Из известного строения максимальных торов и их нормализаторов в группе $A_n^{\varepsilon}(q)$ (см., например, [14, предложения 7,8]) мы получаем строение групп T и $N(G,T)$, которое мы поясним с помощью матриц. Везде ниже группа $\mathrm{GL}_n^{\varepsilon}(q)$ изоморфна $\mathrm{GL}_n(q)$, если $\varepsilon = +$ и изоморфна $\mathrm{GU}_n(q)$, если $\varepsilon = -$. Для разложения $l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n + 1$ в группе $\mathrm{GL}_{n+1}^{\varepsilon}(q)$

рассмотрим группу L, состоящую из клеточно-диагональных матриц вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

где $A_i \in \mathrm{GL}_{l_i}^{\varepsilon_i}(q)$. Тогда $L \simeq \mathrm{GL}_{l_1}^{\varepsilon_1}(q) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{l_k}^{\varepsilon_k}(q)$. Обозначим для краткости $\mathrm{GL}_{l_i}^{\varepsilon_i}(q)$ через G_i. В каждой из групп G_i рассмотрим цикл Зингера T_i. Хорошо известно, что $N_{G_i}(T_i)/T_i$ — циклическая группа порядка l_i и $N(G_i, T_i) = N_{G_i}(T_i)$. Существует такая подгруппа Z группы $Z(\mathrm{SL}_{n+1}^{\varepsilon}(q))$, что $O^{p'}(G) \simeq \mathrm{SL}_{n+1}^{\varepsilon}(q)/Z$. Тогда $T \simeq ((T_1 \times \ldots \times T_k) \cap \mathrm{SL}_{n+1}^{\varepsilon}(q))/Z$ и $N(G,T) \simeq ((N(G_1,T_1) \times \ldots \times N(G_k,T_k)) \cap \mathrm{SL}_{n+1}^{\varepsilon}(q))/Z$. Поскольку для любого цикла Зингера T_i группа $N(G_i,T_i)/T_i$ циклическая, мы можем предполагать, что $N(G,T) = C_G(s)$ и T является циклом Зингера, т. е. является циклической группой порядка $\frac{q^{n+1}-(\varepsilon 1)^{n+1}}{q-(\varepsilon 1)}$ и $n+1 = r^k$ для некоторого $k \geqslant 1$ (последнее равенство выполнено потому, что $N(G,T)/T$ является r-группой). Но $q^{r^k} \equiv q \pmod r$, следовательно, r делит $q - (\varepsilon 1)$. По лемме 5.2.2 мы получаем, что s лежит в $N(G,H)$, где H — такой максимальный тор, что факторгруппа $N(G,H)/H$ изоморфна Sym_{n+1} и $|H| = (q - \varepsilon 1)^n$. В частности, H не является циклом Зингера. Если $s \in H$, то это немедленно влечёт противоречие с выбором s. Если $s \notin H$, то, поскольку порядок элемента s прост, пересечение $\langle s \rangle \cap H$ тривиально. Значит, относительно естественного гомоморфизма $N(G,H) \to N(G,H)/H \simeq \mathrm{Sym}_{n+1}$ элемент s отображается в элемент порядка r. Однако, в группе Sym_{n+1} любой элемент нечётного порядка сопряжён со своим обратным. Таким образом, существует 2-элемент z группы G, нормализующий, но нецентрализующий группу $\langle s \rangle$. Следовательно, $z \in N_{\overline{G}}(C_{\overline{G}}(s)) \leq N_{\overline{G}}(C_{\overline{G}}(s)^0)$ и $|N(G,T)/T|$ делится на 2, что противоречит доказанному выше утверждению о том, что $N(G,T)/T$ является r-группой. Это последнее противоречие завершает разбор случая $\Phi(\overline{G}) = A_n$.

В оставшемся случае $\Phi = E_6$ легко проверить, что для любого $y \in W(E_6)$, группа $C_{W(E_6)}(y)$ не содержит картеровых подгрупп порядка 3. Действительно, если в $C_{W(E_6)}(y)$ есть картерова подгруппа порядка 3, то она порождается элементом y. Однако хорошо известно (и можно легко проверить с помощью [12, таблица 9]), что в $W(E_6)$ нет элементов порядка 3, централизатор которых также имеет порядок 3. Поскольку $|C_G(s)/T|$ делит 3 и группа $C_G(s)/T$ является картеровой подгруппой в $C_{W(E_6)}(y)$ для некоторого y, мы получаем противоречие. □

Используя лемму 5.2.3 можно получить аналогичный результат и в полу-

линейных группах.

Лемма 5.2.4. *Пусть $\langle G, \zeta g\rangle$ — конечная полулинейная группа лиева типа и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть s — регулярный полупростой элемент нечётного простого порядка группы G. Тогда $N_{\langle G,\zeta g\rangle}(C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)) \neq C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)$.*

Доказательство. Так как элемент s полупрост, существует σ-инвариантный максимальный тор $\overline{S}$ группы $\overline{G}$, содержащий s. Поскольку $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)\overline{S}_\sigma$, то можно считать, что $g \in \overline{S}_\sigma$, т. е. элементы g и s перестановочны. Если $C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)G \neq \langle G, \zeta g\rangle$, то группу $\langle G, \zeta g\rangle$ можно заменить группой $C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)G$ и доказывать лемму для этой группы. Кроме того, если $C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s) = C_G(s)$, то лемма следует из леммы 5.2.3, поэтому можно считать, что ζ централизует s. Если либо группа G не является скрученной, либо $|\zeta|$ нечётен, то из [28, предложение 2.5.17] следует, что существует такой $\zeta_1 \in \mathrm{Aut}(\overline{G})$, что $\sigma = \zeta_1^k$ для некоторого $k > 0$ и ζ является ограничением автоморфизма ζ_1 на G. По лемме 5.2.3 существует элемент из $N_{G_{\zeta g}}(C_{\overline{G}}(s))$, не лежащий в $C_{G_{\zeta g}}(s)$, откуда следует лемма.

Предположим, что группа G является скрученной и $|\zeta|$ чётен. Тогда $\sigma = \bar{\gamma}\bar{\varphi}^k$, $\bar{\zeta} = \bar{\varphi}^\ell$, где ℓ делит k. Следовательно, элемент s лежит в $\overline{G}_{\bar{\gamma}}$. В зависимости от корневой системы $\Phi(\overline{G})$, мы получаем, что $\overline{G}_{\bar{\gamma}}$ изоморфна простой алгебраической группе с корневой системой равной B_m (для некоторого $m > 1$), C_m (для некоторого $m > 2$), или F_4. В силу леммы 3.2.3 элемент s сопряжён со своим обратным относительно $O^{p'}((\overline{G}_{\bar{\gamma}})_{\sigma\bar{\zeta}g}) \leq G_{\zeta g}$, значит $N_{\langle G,\zeta g\rangle}(C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)) \neq C_{\langle G,\zeta g\rangle}(s)$. □

Лемма 5.2.5. *Пусть G — конечная присоединённая группа лиева типа над полем нечётной характеристики p. Предположим, что $\overline{G}$ и σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть ψ — полевой автоморфизм нечётного порядка группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.*

Тогда ψ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G, и существует такая ψ-инвариантная подгруппа Картана H, что ψ централизует силовскую 2-подгруппу группы H. Более того, если $G \not\simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2D_{2n}(q^2)$, то существует такой ψ-инвариантный максимальный тор T группы G, что ψ централизует силовскую 2-подгруппу тора T, и факторгруппа $N(G,T)/T$ изоморфна $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму лишь для случая $G = \overline{G}_\sigma$. Предположим, что $|\psi| = k$. Пусть $GF(q)$ — базовое поле группы G. Тогда $q = p^\alpha$ и $\alpha = k \cdot m$. Далее, $|G|$ можно записать в виде $|G| =$

$q^N(q^{m_1}+\varepsilon_1 1)\cdot\ldots\cdot(q^{m_n}+\varepsilon_n 1)$ для некоторого N, где n — это ранг группы $\overline{G}$, $\varepsilon_i=\pm$ (см. [11, теоремы 9.4.10 и 14.3.1]). Аналогично мы имеем, что $|G_\psi|=(p^m)^N((p^m)^{m_1}+\varepsilon_1 1)\cdot\ldots\cdot((p^m)^{m_n}+\varepsilon_n 1)$. Так как k нечётно, то $((p^{km})^{m_i}+\varepsilon_i 1)_2=((p^m)^{m_i}+\varepsilon_i 1)_2$ для всех i, т. е. $|G|_2=|G_\psi|_2$ и силовская 2-подгруппа группы G_ψ является силовской 2-подгруппой группы G. В силу [28, предложение 2.5.17] существует такой автоморфизм ψ_1 группы $\overline{G}$, что $\sigma=\psi_1^k$ и ψ совпадает с ограничением ψ_1 на $\overline{G}_\sigma$. Отметим, что ψ_1, вообще говоря, не совпадает с автоморфизмом $\bar{\psi}$, определённым раньше. Рассмотрим максимальный расщеплённый тор $\overline{H}_{\psi_1}$ группы $\overline{G}_{\psi_1}$. Тогда $H=\overline{H}_\sigma$ — ψ-инвариантная подгруппа Картана группы G. Поскольку $|H|=(q^{k_1}+\varepsilon_1 1)\cdot\ldots\cdot(q^{k_l}+\varepsilon_l 1)$, где $\varepsilon_i=\pm$, равенство $|H|_2=|H_\psi|_2$ доказывается аналогично.

Предположим теперь, что $G\not\simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2D_{2n}(q^2)$. По лемме 5.2.2 существует такой максимальный тор T группы G_ψ, что $N(G_\psi,T)/T\simeq N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ и $|T_\psi|=(p^m-\varepsilon 1)^n$. Поскольку $|\psi|$ нечётен и $\overline{T}_{\psi_1}$ получен скручиванием максимального расщеплённого тора $\overline{H}$ с помощью элемента w_0, то $\overline{T}_\sigma$ также получен скручиванием максимального расщеплённого тора $\overline{H}$ элементом w_0 (см. доказательство леммы 5.3.1). Следовательно, $|\overline{T}_\sigma|=(q-\varepsilon 1)^n$, $|\overline{T}_{\psi_1}|=(p^m-\varepsilon 1)^n$, значит $|\overline{T}_\sigma|_2=|T|_2=|T_\psi|_2$. □

Лемма 5.2.6. [29, (7-2)] *Пусть $\overline{G}$ — связная простая линейная алгебраическая группа над полем характеристики p, σ — отображение Фробениуса группы $\overline{G}$ и $G=\overline{G}_\sigma$ — конечная группа лиева типа. Пусть φ — полевой или графово-полевой автоморфизм группы G (если автоморфизм φ является графово-полевым, то соответствующий графовый автоморфизм имеет порядок 2) и пусть φ' — такой элемент группы $(G\leftthreetimes\langle\varphi\rangle)\setminus G$, что $|\varphi'|=|\varphi|$ и $G\leftthreetimes\langle\varphi\rangle=G\leftthreetimes\langle\varphi'\rangle$.*

Тогда существует такой элемент $g\in G$, что $\langle\varphi\rangle^g=\langle\varphi'\rangle$. В частности, если $G/O^{p'}(G)$ — 2-группа и φ нечётного порядка, то g можно выбрать в $O^{p'}(G)$.

Следующая лемма для классических групп известна (см., например, [27]).

Лемма 5.2.7. *Пусть G — конечная присоединённая расщеплённая группа лиева типа; $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)\le G\le\overline{G}_\sigma$. Предположим, что τ является графовым автоморфизмом порядка 2 группы $O^{p'}(G)$.*

Тогда любой полупростой элемент $s\in G$ сопряжён со своим обратным в группе $\langle O^{p'}(\overline{G}_\sigma),\tau a\rangle$, где a — произвольный элемент из $\overline{G}_\sigma$.

Доказательство. Если $\Phi(\overline{G})$ не имеет тип A_n, D_{2n+1}, E_6, то лемма следует из леммы 3.2.3, таким образом, нам нужно рассматривать группы типа

A_n, D_{2n+1}, E_6. Обозначим через $\bar{\tau}$ графовый автоморфизм группы $\overline{G}$ такой, что $\bar{\tau}|_G = \tau$. Пусть $\overline{T}$ — такой максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$, что $\overline{T}_\sigma \cap G$ является подгруппой Картана группы G. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — фундаментальные корни корневой системы $\Phi(\overline{G})$ и ρ — симметрия, соответствующая $\bar{\tau}$. Обозначим r_i^ρ через $\bar{r}_i$. Тогда $\overline{T} = \langle h_{r_i}(t_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ t_i \neq 0\rangle$ и $h_{r_i}(t_i)^{\bar{\tau}} = h_{\bar{r}_i}(t_i)$. Обозначим через W группу Вейля группы $\overline{G}$. Пусть w_0 — единственный элемент группы W, отображающий все положительные корни в отрицательные корни, и пусть n_0 — его прообраз в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ относительно естественного гомоморфизма $N_{\overline{G}}(\overline{T}) \to N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T} \simeq W$. Поскольку σ действует тривиально на $W = N(G,T)/T$ (см. лемму 5.2.2), мы можем выбрать $n_0 \in G$, т. е. $n_0^\sigma = n_0$. Тогда для всех r_i и t мы получаем, что

$$h_{r_i}(t)^{n_0\bar{\tau}} = h_{r_i^{w_0\rho}}(t) = h_{-r_i}(t) = h_{r_i}(t^{-1}).$$

Таким образом, $x^{n_0\bar{\tau}} = x^{-1}$ для всех $x \in \overline{T}$.

Далее пусть s — полупростой элемент группы G. Тогда существует максимальный σ-инвариантный тор $\overline{S}$ группы $\overline{G}$, содержащий s. Поскольку все максимальные торы группы $\overline{G}$ сопряжены, мы получаем, что существует такой $g \in \overline{G}$, что $\overline{S}^g = \overline{T}$. Так как $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)\overline{T}_\sigma$, то можно считать, что $a \in \overline{T}_\sigma$. Следовательно, $s^{gn_0\bar{\tau}ag^{-1}} = s^{-1}$. Поскольку $n_0^\sigma = n_0$ и $\bar{\tau}^\sigma = \bar{\tau}$, мы имеем, что $(gn_0\bar{\tau}ag^{-1})^\sigma = g^\sigma n_0\bar{\tau}a(g^{-1})^\sigma$. Более того, поскольку $\overline{S}$ является σ-инвариантным, то для любого $x \in \overline{S}$ выполнено $x^{gn_0\bar{\tau}ag^{-1}} = x^{g^\sigma n_0\bar{\tau}a(g^{-1})^\sigma} = x^{-1}$, т. е. $gn_0\bar{\tau}ag^{-1}\overline{S} = g^\sigma n_0\bar{\tau}a(g^{-1})^\sigma\overline{S}$. В частности, существует такой элемент $t \in \overline{S}$, что $gn_0\bar{\tau}ag^{-1}t = g^\sigma n_0\bar{\tau}a(g^{-1})^\sigma$. Ввиду теоремы Ленга-Стейнберга [41, теорема 10.1] существует такой элемент $y \in \overline{S}$, что $t = y\cdot(y^{-1})^\sigma$. Следовательно, $gn_0\bar{\tau}ag^{-1}y = (gn_0\bar{\tau}ag^{-1}y)^\sigma$, т. е. $gn_0\tau ag^{-1}y \in \overline{G}_\sigma \leftthreetimes \langle\tau\rangle$, и $s^{gn_0\tau ag^{-1}y} = s^{-1}$. Поскольку $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)\overline{S}_\sigma = \overline{G}_\sigma$, и подгруппа $\overline{S}_\sigma$ абелева, мы можем найти такой элемент $z \in \overline{S}_\sigma$, что $gn_0\tau ag^{-1}yz \in \langle O^{p'}(\overline{G}_\sigma), \tau a\rangle$. □

§3 Картеровы подгруппы специального вида

В настоящем параграфе мы изучим некоторые вопросы о строении и существованнии картеровых подгрупп полулинейных групп, содержащих силовскую 2-подгруппу или лежащих в нормализаторе подгруппы Бореля.

Лемма 5.3.1. *Пусть G — конечная группа лиева типа над полем нечётной характеристики и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Тогда если G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**, *то любая группа L, для которой справедливо $G \leq L \leq \overline{G}_\sigma$ удовлетворяет* **(ESyl2)**.

Доказательство. Пусть Q — силовская 2-подгруппа группы $\overline{G}_\sigma$ и пересечение $Q^0 = O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \cap Q$ — силовская 2-подгруппа группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Ясно, что если $N_{\overline{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\overline{G}_\sigma}(Q)$, то утверждение леммы справедливо. Ввиду [5, теорема 1], если $\overline{G}_\sigma$ — классическая группа, то равенство $N_{\overline{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\overline{G}_\sigma}(Q)$ может не выполняться лишь в том случае, когда корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип A_1 или C_n. Если корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип A_1 или C_n, то $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 2$ и утверждение леммы следует из леммы 2.4.6.

Предположим теперь, что G — группа исключительного типа. Если $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, то утверждение леммы, очевидно, справедливо. Поэтому равенство $N_{\overline{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\overline{G}_\sigma}(Q)$, возможно, не выполняется лишь в том случае, когда корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип E_6 или E_7. Если корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип E_7, то $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 2$ и утверждение леммы следует из леммы 2.4.6.

Предположим, что корневая система группы $\overline{G}$ имеет тип E_6. Тогда либо $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, либо $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 3$. В первом случае доказывать нечего, поэтому предположим, что $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 3$. Поскольку группа G совпадает либо с $\overline{G}_\sigma$, либо с $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, и поскольку в том случае, если $G = \overline{G}_\sigma$ доказывать нечего, можно считать, что $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Ввиду [28, теорема 4.10.2] существует такой максимальный тор T группы $\overline{G}_\sigma$, что Q содержится в $N(\overline{G}_\sigma, T)$. Поскольку $|\overline{G}_\sigma : G| = 3$, то $Q = Q^0 \leq N(G, T \cap G)$. Ввиду [6, теорема 6] справедливо равенство $N_G(Q) = Q \times R^0$, где $R^0 \leq T$ — циклическая группа нечётного порядка. Далее, поскольку $\overline{G}_\sigma = TG$, то $N_{\overline{G}_\sigma}(Q) = \langle N_T(Q), N_G(Q)\rangle$. Действительно, $N(G, T \cap G)/(T \cap G) \simeq N(G, T)/T$. Следовательно, силовская 2-подгруппа QT/T группы $N(G, T)/T$ совпадает со своим нормализатором. Поскольку факторгруппа $\overline{G}_\sigma/G$ циклическая порядка 3, то $N_{\overline{G}_\sigma}(Q) = \langle tg, N_G(Q)\rangle$, где $t \in T$ и $g \in G$. Кроме того, поскольку $|\overline{G}_\sigma : G| = 3$, можно считать, что tg является элементом порядка 3^k для некоторого $k > 0$. Так как $t \in T \leq N(\overline{G}_\sigma, T)$, то $Q^t \leq N(G, T \cap G)$. Значит, существует элемент $g_1 \in N(G, T \cap G)$ такой, что $Q^t = Q^{g_1^{-1}}$. Поэтому можно считать, что $tg = tg_1 \in N(\overline{G}_\sigma, T)$. При естественном эпиморфизме $\pi : N(\overline{G}_\sigma, T) \to N(\overline{G}_\sigma, T)/T$ образ $N_{N(\overline{G}_\sigma, T)}(Q)$ совпадает с Q. Значит, $(tg)^\pi = e$, поэтому $tg \in T$. Таким образом, любой элемент нечётного порядка группы $\overline{G}_\sigma$, нормализующий Q, лежит в T. Поскольку T — тор, то T — абелева группа, значит, множество элементов нечётного порядка группы $N_{\overline{G}_\sigma}(Q)$ образует нормальную подгруппу R группы $N_{\overline{G}_\sigma}(Q)$. Следовательно, $N_{\overline{G}_\sigma}(Q) = Q \times R$, т. е. $\overline{G}_\sigma$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** $\square$

Следующая лемма немедленно вытекает из [5, теорема 1].

Лемма 5.3.2. *Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = G$ — каноническая конечная группа лиева типа и $\overline{G}$ либо имеет тип A_1, либо имеет тип C_n, p нечётно, $q = p^\alpha$ — порядок базового поля группы G. Тогда G удовлетворяет условию* **(ESyl2)** *в том и только в том случае, если $q \equiv \pm 1 \pmod 8$.*

Отметим, что лемма 5.3.1 вместе с [5, теорема 1] и [6, теорема 6] влечёт, что любая группа лиева типа над полем нечётной характеристики, отличная от группы Ри и групп из леммы 5.3.2, удовлетворяет **(ESyl2)**.

Лемма 5.3.3. *Пусть G — конечная присоединённая группа лиева типа над полем нечётной характеристики, $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$ и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть A — такая подгруппа группы $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$, что $A \cap \overline{G}_\sigma = G$. Если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$, предположим также, что A содержится в группе, порождённой внутренне-диагональными и полевыми автоморфизмами и графовым автоморфизмом порядка 2. Тогда A удовлетворяет условию* **(ESyl2)** *в том и только в том случае, если G удовлетворяет условию* **(ESyl2)**.

Доказательство. Предположим, что G удовлетворяет условию **(ESyl2)**. В условиях леммы факторгруппа A/G абелева, поэтому $A/G = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$, где $\overline{A}_1$ — холлова $2'$-подгруппа группы A/G и $\overline{A}_2$ — силовская 2-подгруппа группы A/G. Обозначим через A_1 полный прообраз группы $\overline{A}_1$ в A. Если A_1 удовлетворяет условию **(ESyl2)**, то по лемме 2.4.6 группа A также удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Таким образом, можно считать, что порядок $|A/G|$ нечётен. Поскольку мы предполагаем, что графовый автоморфизм порядка 3 не содержится в A, то группа A/G циклическая, значит $A = \langle G, \psi g\rangle$, где ψ — полевой автоморфизм нечётного порядка, а $g \in \overline{G}_\sigma$. Поскольку $|A : G| = |\psi|$ нечётен, можно считать, что $|\psi g|$ также нечётен. В силу леммы 5.2.5, ψ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $\overline{G}_\sigma$, следовательно, g — элемент нечётного порядка. Далее факторгруппа $\overline{G}_\sigma/G$ абелева и может быть представлена в виде $\overline{L} \times \overline{Q}$, где $\overline{L}$ — холлова $2'$-подгруппа группы $\overline{G}_\sigma/G$ и $\overline{Q}$ — силовская 2-подгруппа группы $\overline{G}_\sigma/G$. Пусть L — полный прообраз группы $\overline{L}$ в $\overline{G}_\sigma$ относительно естественного гомоморфизма. Тогда $g \in L$. Рассмотрим группу $L \leftthreetimes \langle\psi\rangle \geq A$. По построению, индекс $|L \leftthreetimes \langle\psi\rangle : A| = |L : G|$ нечётен. В силу леммы 5.3.1 группа L удовлетворяет условию **(ESyl2)**. По лемме 5.2.5 полевой автоморфизм ψ централизует силовскую 2-подгруппу Q группы L. Таким образом,

$$N_{L \leftthreetimes \langle\psi\rangle}(Q) = N_L(Q) \times \langle\psi\rangle = QC_L(Q) \times \langle\psi\rangle = QC_{L \leftthreetimes \langle\psi\rangle}(Q),$$

т. е. группа $L \leftthreetimes \langle \psi \rangle$ удовлетворяет **(ESyl2)**. Поскольку $|L \leftthreetimes \langle \psi \rangle : A|$ нечётен, то A удовлетворяет **(ESyl2)**.

Предположим теперь что A удовлетворяет **(ESyl2)**. Если G не удовлетворяет **(ESyl2)**, то [5, теорема 1] и [6, теорема 6] влекут, что корневая система группы $\overline{G}$ либо имеет тип A_1, либо имеет тип C_n. В обоих случаях группа $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))/\overline{G}_\sigma$ циклическая и порождается полевым автоморфизмом φ. Кроме того, из [5, теорема 1] следует, что порядок базового поля (которое совпадает с полем определения в этом случае, поскольку группа G не является скрученной) равен $q = p^t$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Следовательно, t нечётно и, значит, $|\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))/\overline{G}_\sigma|$ нечётен. Поэтому $|A : G|$ нечётен, значит, G удовлетворяет **(ESyl2)**. □

Лемма 5.3.4. *Пусть $\langle G, \zeta g \rangle$ — конечная полулинейная группа лиева типа над полем характеристики p (мы не исключаем случая $\langle G, \zeta g \rangle = G$) и группа G является группой присоединённого типа (напомним, что $g \in \overline{G}_\sigma$, но необязательно $g \in G$). Предположим, что $B = U \leftthreetimes H$, где H — подгруппа Картана группы G, есть ζg-инвариантная подгруппа Бореля группы G, и $\langle B, \zeta g \rangle$ содержит картерову подгруппу K группы $\langle G, \zeta g \rangle$. Предположим, что $K \cap U \neq \{e\}$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(а) *либо $\langle G, \zeta g \rangle = \langle {}^2A_2(2^{2t}), \zeta g \rangle$, либо $\langle G, \zeta g \rangle = {}^2\widehat{A_2(2^{2t})} \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, порядок $|\zeta| = t$ нечётен и не делится на 3, $C_G(\zeta) \simeq {}^2\widehat{A_2(2^2)}$, подгруппа $K \cap G$ абелева и имеет порядок $2 \cdot 3$;*

(б) *$\langle G, \zeta g \rangle = \langle {}^2A_2(2^{2t}), \zeta g \rangle$, порядок $|\zeta| = t$ нечётен, $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ является силовской 2-подгруппой группы G_ζ;*

(в) *либо $\langle G, \zeta g \rangle = \langle A_2(2^{2t}), \zeta g \rangle$, либо $\langle G, \zeta g \rangle = \widehat{A_2(2^{2t})} \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$, ζ — графово-полевой автоморфизм порядка $2t$, t не делится на 3, и $C_G(\zeta) \simeq {}^2\widehat{A_2(2^2)}$, подгруппа $K \cap G$ абелева и имеет порядок $2^{|\zeta_{2'}|} \cdot 3$;*

(г) *$\langle G, \zeta g \rangle = \langle A_2(2^{2t}), \zeta g \rangle$, ζ — графово-полевой автоморфизм и $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}}$;*

(д) *группа G расщеплённая и определена над $GF(2^t)$, $\langle G, \zeta g \rangle = G \leftthreetimes \langle \zeta g \rangle$, ζ — полевой автоморфизм порядка t группы $O^{2'}(G)$, если группа $O^{2'}(G)$ расщеплённая или графовый автоморфизм порядка t, если группа $O^{2'}(G)$ скрученная, и, с точностью до сопряжения в G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta g \rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа группы $G_{(\zeta g)_{2'}}$;*

(е) *группа G определена над $GF(2^t)$, $\langle G, \zeta g\rangle = G \leftthreetimes \langle \zeta g\rangle$, ζ — произведение полевого автоморфизма нечётного порядка t группы $O^{2'}(G)$ и графового автоморфизма порядка 2, ζ и ζg сопряжены относительно $\overline{G}_\sigma$, и, с точностью до сопряжения в G, $K = Q \leftthreetimes \langle \zeta g\rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа группы $G_{(\zeta g)_{2'}}$;*

(ж) *$G/Z(G) \simeq \mathbf{P}SL_2(3^t)$, порядок $|\zeta| = t$ нечётен (значит, $\zeta \in \langle G, \zeta g\rangle$), и K содержит силовскую 3-подгруппу группы $G_{\zeta_{3'}}$;*

(з) *$\langle G, \zeta g\rangle = {}^2G_2(3^{2n+1}) \leftthreetimes \langle \zeta\rangle$, $|\zeta| = 2n+1$, $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, где Q имеет порядок 2 и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$.*

Отметим, что в каждом из пунктов (а)–(з) леммы картеровы подгруппы, имеющие указанное строение, существуют. Существование картеровых подгрупп в пунктах (а) и (в) следуют из существования картеровой подгруппы порядка 6 в группе $\mathbf{P}\mathrm{GU}_3(2)$ (см. [24]). Существование картеровых подгрупп в пунктах (б), (г)–(е) следует из того, что силовская 2-подгруппа в группе лиева типа, определённой над полем порядка 2, совпадает со своим нормализатором. Существование картеровых подгрупп в пункте (ж) следует из того факта, что силовская 3-подгруппа группы $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3)$ совпадает со своим нормализатором. Существование картеровой подгруппы, удовлетворяющей пункту (з) леммы, следует из существования картеровой подгруппы K порядка 6 в (непростой) группе ${}^2G_2(3)$. Существование картеровой подгруппы K порядка 6 в группе ${}^2G_2(3)$ следует из структурных результатов, приведённых в работах [7] и [44].

Доказательство. Если G является одной из групп $A_1(q)$, $G_2(q)$, $F_4(q)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$ или ${}^2F_4(2^{2n+1})$, то лемма следует из таблицы 3.1.1. Если $\langle G, \zeta g\rangle = G$, то лемма следует из результатов глав 3 и 4. Поэтому можно предполагать, что $\langle G, \zeta g\rangle \neq G$, т. е. что ζ является нетривиальным полевым, графово-полевым или графовым автоморфизмом. Если $\Phi(\overline{G}) = C_n$, то лемма следует из теоремы 6.2.3 ниже, в которой не используется лемма 5.3.4, поэтому мы предполагаем, что $\Phi(\overline{G}) \neq C_n$. Если $\Phi(\overline{G}) = D_4$ и либо графово-полевой автоморфизм ζ раскладывается в произведение полевого автоморфизма и графового автоморфизма порядка 3, либо $G \simeq {}^3D_4(q^3)$, то лемма следует из теоремы 6.3.1 ниже, в которой не используется лемма 5.3.4, поэтому мы предполагаем, что $\langle G, \zeta g\rangle$ лежит в группе A_1, определённой в теореме 6.3.1, и $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$. Поскольку мы будем использовать лемму 5.3.4 в доказательстве теоремы 6.4.1, после теорем 6.2.3 и 6.3.1, мы вправе сделать такие дополнительные предположения.

Предположим, что q нечётно и $\Phi(\overline{G})$ имеет один из следующих типов: A_n ($n \geqslant 2$), D_n ($n \geqslant 4$), B_n ($n \geqslant 3$), E_6, E_7 или E_8. По лемме 2.4.1 мы имеем, что KU/U является картеровой подгруппой группы $\langle B, \zeta g\rangle/U \simeq \langle H, \zeta g\rangle$. Так как $\overline{G}_\sigma = G\overline{H}_\sigma$, где $\overline{H}$ — максимальный расщеплённый тор группы $\overline{G}$ и $\overline{H}_\sigma \cap G = H$, то можно считать, что $g \in \overline{H}_\sigma$, в частности, g централизует H. Поэтому $H_\zeta \leq Z(\langle H, \zeta g\rangle)$, и мы получаем, с точностью до сопряжения в B, что $H_\zeta \leq K$. По лемме 5.2.5, автоморфизм $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу Q группы H. Таким образом, любой элемент нечётного порядка группы $\langle H, \zeta g\rangle$ централизует Q и лемма 2.4.3 влечёт, что, с точностью до сопряжения в B, справедливо $Q \leq K$. Из леммы 3.2.12 следует, что $C_U(Q) = \{e\}$; противоречие с нетривиальностью $K \cap U$.

Предположим, что $G \simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$ и $\langle G, \zeta g\rangle = G \leftthreetimes \langle \zeta\rangle$ (в этом случае $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = \overline{G}_\sigma$). Вновь по лемме 2.4.1 KU/U является картеровой подгруппой группы $(B \leftthreetimes \langle\zeta\rangle)/U \simeq H \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$. По лемме 3.2.3 любой полупростой элемент группы G сопряжён со своим обратным. Так как неабелевы композиционные факторы централизатора любого полупростого элемента группы G могут быть изоморфны лишь группам $A_1(q)$, из таблицы 3.1.1 следует, что централизатор любого полупростого элемента группы G удовлетворяет условию **(C)**. Поэтому лемма 2.4.2 влечёт, что $KU/U \cap B/U$ является 2-группой. С другой стороны, $|H|_2 = 2$ и $KU/U \geq Z(B/U) \geq H_\zeta$, откуда $|H_\zeta| = 2$ и $|\zeta| = 2n + 1$. Таким образом, $K \cap G = (K \cap U) \times \langle t\rangle$, где t — инволюция. Отсюда следует, что $K \cap U = C_G(t) \cap G_{\zeta_{3'}}$. Теперь структурные результаты из [7, теорема 1] и [44] влекут справедливость пункта (з) леммы.

Предположим теперь, что $q = 2^t$. Предположим сначала, что $\Phi(\overline{G})$ имеет один из типов A_n ($n \geqslant 2$), D_n ($n \geqslant 4$), B_n ($n \geqslant 3$), E_6, E_7 или E_8, G расщеплённая, и ζ является полевым автоморфизмом. Как и выше мы получаем, что $H_\zeta \leq K$ и $O^{2'}(G_\zeta)$ — расщеплённая группа лиева типа с полем определения $q = 2^{t/|\zeta|}$. По лемме Хартли-Шута 1.5.5 для любого $r \in \Phi(\overline{G})$ и для любого $s \in GF(2^{t/|\zeta|})^*$ существует такой $h(\chi) \in H_\zeta \cap O^{2'}(G_\zeta)$, что $\chi(r) = s$. Рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3.2.12, влекут, что при $\frac{t}{|\zeta|} \neq 1$ справедливо $K \cap U \leq C_U(H_\zeta) = \{e\}$; противоречие. Значит, $|\zeta| = t$ и $H_\zeta = \{e\}$. Поскольку g можно выбрать в $\overline{H}_\sigma$ и $\langle \zeta g\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq \langle \zeta g\rangle \cap \overline{H}_\sigma \leq H_\zeta = \{e\}$, то $\langle \zeta g\rangle \cap \overline{G}_\sigma = \{e\}$. По лемме 5.2.6 элементы ζg и ζ сопряжены в $\overline{G}_\sigma$, откуда следует пункт (д) леммы.

Теперь предположим, что $\Phi(\overline{G})$ имеет один из типов A_n ($n \geqslant 3$), D_n ($n \geqslant 4$) или E_6, и либо ζ есть графово-полевой автоморфизм и G расщеплённая, либо G скрученная. Пусть ρ — симметрия корневой системы $\Phi(\overline{G})$, соответствующая автоморфизму γ (напомним, что по определению $\zeta = \gamma^\varepsilon \varphi^\ell$), и $\bar{r}$ обо-

значает r^ρ для $r \in \Phi(\overline{G})$. Как и выше, можно доказать, что, с точностью до сопряжения, $H_\zeta \leq K$. Если $H_\zeta \neq \{e\}$, то по лемме Хартли-Шута 1.5.5 мы получаем, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $H_\zeta = \{e\}$, то либо группа G является скрученной и $|\zeta| = t$ что влечёт утверждение (д) леммы; либо группа G является расщеплённой, $|\zeta| = 2t$, в частности число t нечётно, что влечёт пункт (е) леммы.

Предположим, что $O^{2'}(G) \simeq A_2(2^t)$, ζ — графово-полевой автоморфизм и t нечётно. Если $|\zeta| \neq 2t$, то рассуждения, использующие лемму Хартли-Шута 1.5.5, аналогичные доказательству леммы 2.4.2 показывают, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $|\zeta| = 2t$, то мы получаем пункт (е) леммы.

Предположим теперь, что $O^{2'}(G) \simeq A_2(2^{2t})$ и ζ — графово-полевой автоморфизм. Вновь при $|\zeta| \neq 2t$ из леммы Хартли-Шута 1.5.5 следует, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $|\zeta| = 2t$, то либо $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^2)$, либо $G_\zeta \simeq \widehat{{}^2A_2(2^2)}$. Если $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^2)$, то $H_\zeta = \{e\}$ и мы получаем утверждение (г) леммы. Если $G_\zeta \simeq \widehat{{}^2A_2(2^2)}$, то $|H_\zeta| = 3$, и поэтому $KU/U \cap HU/U$ является циклической группой $\langle y \rangle$ порядка $(2^{t_3}+1)_3 = 3^k$, где $3^{k-1} = t_3$. Если $k > 1$, то лемма Хартли-Шута 1.5.5 влечёт, что $C_U(y) = \{e\}$, что невозможно. Таким образом, t не делится на 3 и $K \cap U$ содержится в централизаторе элемента x, порождающего H_ζ. Рассмотрим гомоморфизм $GL_3(2^{2t}) \to \mathbf{P}GL_3(2^{2t})$. Тогда некоторый прообраз элемента x подобен матрице

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

где λ — порождающий элемент мультипликативной группы поля $GF(2^2)$. Прообраз группы U сопряжён с множеством верхнетреугольных матриц, на диагонали которых стоят одинаковые элементы. Непосредственные вычисления показывают, что $C_U(x)$ изоморфна аддитивной группе поля $GF(2^{2t})$. Нильпотентность группы K влечёт, что $K \cap U = (C_U(x))_{\zeta_{2'}}$, откуда следует пункт (в) леммы.

Предположим теперь, что $O^{2'}(G) \simeq {}^2A_2(2^{2t})$. По лемме 2.4.1 KU/U является картеровой подгруппой группы $\langle B, \zeta g\rangle/U \simeq \langle H, \zeta g\rangle$ и, как и выше, можно считать, что $H_\zeta \leq K$. Если $|\zeta| = 2t$, то $G_\zeta \simeq SL_2(2)$ и $H_\zeta = \{e\}$, откуда следует пункт (д) леммы. Предположим, что число t чётно и $|\zeta| \leqslant t$. Тогда либо $O^{2'}(G_\zeta) \simeq SL_2(2^{2t/|\zeta|})$ (если порядок $|\zeta|$ чётен), либо $O^{2'}(G_\zeta) \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$ (если порядок $|\zeta|$ нечётен, следовательно, $|\zeta| < t$). Очевидно, что H_ζ содержит

такой элемент x, что $K \cap U \leq C_U(H_\zeta) = \{e\}$, и это даёт противоречие с условием $K \cap U \neq \{e\}$. Если число t нечётно и $t \neq |\zeta|$, то $O^{2'}(G_\zeta) \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$, откуда следует, что H_ζ содержит такой элемент x, что $C_U(x) = \{e\}$. Если $|\zeta| = t$ и число t нечётно, то порядок $|KU/U \cap B/U|$ может делиться только на 3 (в противном случае из леммы Хартли-Шута 1.5.5 вновь следует, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$). Если $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$, то $H_\zeta = \{e\}$ и мы получаем пункт (б) леммы. Если $G_\zeta \simeq {}^2\widehat{A_2(2^{2t/|\zeta|}})$, то $KU/U \cap HU/U$ является циклической группой $\langle y \rangle$ порядка $(2^{t_3} + 1)_3 = 3^k$, где $3^{k-1} = t_3$. Если $k > 1$, то лемма Хартли-Шута 1.5.5 влечёт, что $C_U(y) = \{e\}$, что невозможно. Таким образом, t не делится на 3 и $K \cap U$ содержится в централизаторе элемента x, порождающего H_ζ. Как и в нескрученном случае выше, мы получаем, что $C_U(x)$ изоморфна аддитивной подгруппе поля $GF(2^t)$. Нильпотентность группы K влечёт, что $K \cap U = (C_U(x))_{\zeta_{2'}}$, откуда следует пункт (а) леммы. $\square$

Глава 6. Картеровы подгруппы в полулинейных группах

§1 Краткий обзор результатов главы

В данной главе мы, используя понятия и результаты, полученные в главе 5, классифицируем картеровы подгруппы в группах автоморфизмов конечных групп лиева типа. Сначала мы дадим такую классификацию в том случае, когда группа лиева типа имеет тип C_n или её группа автоморфизмов содержит автоморфизм тройственности, поскольку рассуждения в этих двух случаях несколько отличаются от остальных. Наконец, мы сформулируем окончательную классификационную теорему и будем её доказывать на протяжении двух параграфов. В последнем параграфе мы докажем, что в любой конечной группе с известными композиционными факторами картеровы подгруппы сопряжены.

§2 Картеровы подгруппы симплектических групп

Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ таких почти простых групп A, что единственный неабелев композиционный фактор $S = F^*(A)$ является канонической простой группой лиева типа и A содержит несопряжённые картеровы подгруппы. Если множество $\mathcal{A}$ непусто, обозначим через **Cmin** наименьший возможный порядок подгруппы $F^*(A)$, при $A \in \mathcal{A}$. Если множество $\mathcal{A}$ пусто, то положим, что $\mathbf{Cmin} = \infty$. Мы докажем, что $\mathbf{Cmin} = \infty$, т. е. что $\mathcal{A} = \varnothing$. Отметим, что если $A \in \mathcal{A}$ и $G = F^*(A)$, то существует такая подгруппа A_1 группы A, что $A_1 \in \mathcal{A}$ и $A_1 = KG$ для некоторой картеровой подгруппы K группы A. Действительно, если для любой нильпотентной подгруппы N группы A картеровы подгруппы группы NG сопряжены, то A удовлетворяет условию **(C)**, следовательно, картеровы подгруппы группы A сопряжены, что противоречит выбору A. Значит, существует такая нильпотентная подгруппа N группы A, что картеровы подгруппы группы NG несопряжены. Пусть K — некоторая

картерова подгруппа группы NG. Тогда очевидно, что KG/G является картеровой подгруппой группы NG/G, т. е. совпадает с NG/G. Следовательно, картеровы подгруппы группы KG несопряжены и $KG = A_1 \in \mathcal{A}$. Поэтому условие $A = KG$ в теоремах 6.2.3, 6.3.1 и 6.4.1 не является ограничением и используется лишь для упрощения рассуждений.

В этом параграфе мы рассмотрим картеровы подгруппы в почти простой группе A с простым цоколем $G = F^*(A) \simeq \mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(q)$. Мы рассмотрим такие группы здесь, поскольку для групп типа $\mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ лемма 3.2.12 неверна и мы используем рассуждения, немного отличные от тех, которые мы используем в доказательстве теоремы 6.4.1.

Докажем сначала следующие две технические леммы.

Лемма 6.2.1. *Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = G$ — каноническая присоединённая конечная группа лиева типа над полем нечётной характеристики p и -1 не является квадратом в базовом поле группы G. Предположим, что корневая система Φ группы $\overline{G}$ равна C_n. Пусть U — максимальная унипотентная подгруппа группы G, H — подгруппа Картана группы G, нормализующая U, и Q — силовская 2-подгруппа группы H. Тогда $C_U(Q) = \langle X_r \mid r$ является длинным корнем$\rangle$.*

Доказательство. Если r — короткий корень, то существует корень s, удовлетворяющий условию $< s, r >= 1$. Таким образом,

$$x_r(t)^{h_s(-1)} = x_r((-1)^{<s,r>}t) = x_r(-t)$$

(см. [11, предложение 6.4.1]). Следовательно, если $x \in C_U(Q)$ и $x_r(t)$ — нетривиальный множитель в разложении (1.1) элемента x, то r является длинным корнем. Далее, если r является длинным корнем, то для любого корня s либо $| < s, r > | = 2$, либо $< s, r >= 0$, т. е. $x_r(t)^{h_s(-1)} = x_r(t)$. При выполнении условия, что -1 не является квадратом в базовом поле группы G (т. е. в поле $GF(q)$) мы получаем, что $q \equiv -1 \pmod 4$, поэтому $\langle h_s(-1) \mid s \in \Phi\rangle = Q$, откуда следует лемма. □

Лемма 6.2.2. *Пусть $G = \mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ — простая каноническая группа лиева типа, J — подмножество фундаментальных корней, содержащее длинный фундаментальный корень r_n, P_J — параболическая подгруппа, порождённая подгруппой Бореля B и группами X_r при $-r \in J$, L — фактор Леви подгруппы P_J. Обозначим через S квазипростую нормальную подгруппу группы L, изоморфную $\mathrm{Sp}_{2k}(q)$ (она всегда существует, поскольку $r_n \in J$). Тогда $Aut_L(S/Z(S)) = S/Z(S)$.*

Доказательство. Данное утверждение известно, оно доказано, например, в неопубликованной работе Н.А. Вавилова. Мы приведём здесь доказательство для полноты изложения. Как мы отмечали выше, L является редуктивной подгруппой максимального ранга группы G, и потому справедливы включения $S/Z(S) \leq \mathrm{Aut}_L(S/Z(S)) \leq \widehat{S/Z(S)}$. Поскольку $|\widehat{C_n(q)} : C_n(q)| = (2, q-1)$, то для чётного q утверждение очевидно. Если же q нечётно, то либо $\mathrm{Aut}_L(\mathbf{P}S) = \mathbf{P}S$, либо $\mathrm{Aut}_L(\mathbf{P}S) = \widehat{\mathbf{P}S}$. Покажем, что второе равенство невозможно.

В наших обозначениях фундаментальные корни корневой системы группы S — это корни $r_{n-k+1}, \ldots, r_n$. Если выполнено равенство $\mathrm{Aut}_L(S/Z(S)) = \widehat{S/Z(S)}$, то существуют такие элементы $s_1, \ldots, s_k$ решётки $\mathbb{Z}\Phi = \mathbb{Z}C_n$, что

$$< s_i, r_{n-k+j} >= \frac{(s_i, r_{n-k+j})}{(s_i, s_i)} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

(Они порождают решётку фундаментальных весов и, таким образом, позволяют получить все диагональные автоморфизмы группы S.) Но для любого корня r из C_n мы имеем, что либо $< r, r_n >= 0$, либо $< r, r_n >= \pm 2$, т. е. для любого элемента $s \in \mathbb{Z}\Phi$ число $< s, r_n >$ чётно, в частности, отлично от 1. Следовательно, такого набора элементов $s_1, \ldots, s_k$ не существует. $\square$

Теорема 6.2.3. *Пусть G — конечная присоединённая группа лиева типа (не обязательно простая) над полем характеристики p, и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $\mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(p^t) \simeq O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Выберем подгруппу A группы $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(p^t))$ так, чтобы $A \cap \overline{G}_\sigma = G$. Пусть K — картерова подгруппа группы A. Предположим также, что $|\mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(p^t)| \leqslant \mathbf{Cmin}$ и $A = KG$.*

Тогда выполнено в точности одно из утверждений:

(1) *G определена над $GF(2^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A, $|\zeta| = t$, и, с точностью до сопряжения в G, выполнено $K = S \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где S — силовская 2-подгруппа группы $G_{\zeta_{2'}}$.*

(2) *$G \simeq \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^t) \simeq \mathbf{P}\mathrm{Sp}_2(3^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A, порядок $|\zeta| = t$ нечётен, и, с точностью до сопряжения в G, выполнено $K = S \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где S — силовская 3-подгруппа группы $G_{\zeta_{3'}}$.*

(3) *p не делит $|K \cap G|$ и K содержится в нормализаторе силовской 2-подгруппы группы A.*

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены, т. е., если $A_1 \in \mathcal{A}$ и $F^*(A_1) = \mathbf{Cmin}$, то $F^*(A_1) \not\simeq \mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(p^t)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и A — такой контрпример, что $|F^*(A)|$ минимален. Заметим, что в точности одно из утверждений теоремы может быть выполнено, поскольку если выполнено утверждение (2), то, ввиду леммы 5.3.2, для силовской 2-подгруппы S группы A не выполнено условие $N_G(S) = SC_G(S)$, т. е. не выполнено утверждение (3) теоремы. Таким образом, если A_1 — почти простая группа, для которой $F^*(A_1)$ — простая группа лиева типа порядка меньшего, чем $|F^*(A)|$, то картеровы подгруппы группы A_1 сопряжены. Ввиду теоремы 4.1.1 можно считать, что $A \neq G$. Кроме того, ввиду теоремы 3.3.5, можно считать, что q нечётно, т. е. $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(q))$ не содержит графовых автоморфизмов. Таким образом, можно предполагать, что $A = \langle G, \zeta g \rangle$.

Предположим, что K является картеровой подгруппой группы $\langle G, \zeta g \rangle$ и K не удовлетворяет утверждению теоремы. Запишем $K = \langle x, K \cap G \rangle$. Если либо $p \neq 3$, либо t чётно, либо $n = 1$, то теорема следует из теоремы 3.3.5. Таким образом, мы можем предполагать, что $q = 3^t$, t нечётно и $n \geqslant 2$. Поскольку $|\overline{G}_\sigma : O^{p'}(\overline{G}_\sigma)| = 2$ и порядок $|\zeta|$ нечётен, можно считать, что порядок $|\zeta g|$ также нечётен и поэтому $\zeta \in \langle G, \zeta g \rangle$, т. е. $\langle G, \zeta g \rangle = G \leftthreetimes \langle \zeta \rangle$. По лемме 3.2.3 любой полупростой элемент нечётного порядка сопряжён со своим обратным в G. Далее, для любого полупростого элемента $t \in G$ каждый неабелев композиционный фактор централизатора $C_G(t)$ есть простая группа лиева типа (см. [13]) порядка меньшего, чем **Cmin**. Следовательно, для любого неабелева композиционного фактора S группы $C_G(t)$ и любой нильпотентной подгруппы $N \leq C_G(t)$ картеровы подгруппы группы $\langle \mathrm{Aut}_N(S), S \rangle$ сопряжены. Значит, $C_G(t)$ удовлетворяет условию **(C)**. Поэтому, по лемме 2.4.2, $|K \cap G| = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ для некоторых $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Если $G = \widehat{\mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(q)}$, то по [45, теорема 2] любой унипотентный элемент сопряжён со своим обратным. Поскольку 3 является хорошим простым числом для G, то [39, теоремы 1.2 и 1.4] влекут, что для любого элемента $u \in G$ порядка 3 все неабелевы композиционные факторы группы $C_G(u)$ являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**. Таким образом, $C_G(u)$ удовлетворяет условию **(C)**, значит, по лемме 2.4.2, мы получаем, что $K \cap G$ есть 2-группа. Ввиду лемм 5.2.5 и 5.2.6 любой элемент $x \in A \setminus G$ нечётного порядка, удовлетворяющий равенству $\langle x \rangle \cap G = \{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G. Поэтому K содержит силовскую 2-подгруппу группы G, и значит, группы A, т. е. K удовлетворяет утверждению (в) теоремы.

Таким образом, мы можем предполагать, что $G = \mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ и $\beta \geqslant 1$, т. е. силовская 3-подгруппа $O_3(K \cap G)$ группы $K \cap G$ нетривиальна. Из леммы

5.2.1 следует, что $K \cap G$ содержится в некоторой K-инвариантной параболической подгруппе P группы G с фактором Леви L и, с точностью до сопряжения в P, силовская 2-подгруппа $O_2(K \cap G)$ группы $K \cap G$ содержится в L. Заметим, что все неабелевы композиционные факторы группы P являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**, поэтому P и любой её гомоморфный образ удовлетворяют условию **(C)**. Группа $\widetilde{K} = KO_3(P)/O_3(P)$ изоморфна $K/O_3(K \cap G)$ и, по лемме 2.4.1, $\widetilde{K}$ является картеровой подгруппой группы $\langle \widetilde{K}, P/O_3(P)\rangle$. Далее $\widetilde{K} \cap P/O_3(P) \simeq O_2(K \cap G)$ есть 2-группа и любой элемент $x \in \langle \widetilde{K}, P/O_3(P)\rangle \setminus P/O_3(P)$ нечётного порядка, удовлетворяющий равенству $\langle x\rangle \cap P/O_3(P) = \{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $P/O_3(P) \simeq L$ (см. леммы 5.2.5 и 5.2.6). Следовательно, $O_2(K \cap G)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы L, в частности, содержит силовскую 2-подгруппу H_2 группы H. Поскольку K нильпотентна, лемма 6.2.1 влечёт, что $O_3(K \cap G) \leq C_U(H_2) = \langle X_r \mid r$ — длинный корень из $\Phi(G)^+\rangle$. Поскольку для любых двух длинных корней r, s из $\Phi(G)^+$ выполнено $r + s \notin \Phi(G)$, коммутаторная формула Шевалле [11, теорема 5.2.2] влечёт, что подгруппа $\langle X_r \mid r$ — длинный корень из $\Phi(G)^+\rangle$ абелева.

Поскольку ζ — полевой автоморфизм, он нормализует любую параболическую подгруппу группы G, содержащую ζ-инвариантную подгруппу Бореля. Таким образом, для любого подмножества J множества фундаментальных корней $\Pi = \{r_1, \dots, r_n\}$ корневой системы $\Phi = \Phi(G)$ параболическая подгруппа P_J является ζ-инвариантной. Следовательно, можно считать, что $P = P_J$, где J — некоторое собственное подмножество множества фундаментальных корней Π корневой системы Φ. Выберем нумерацию фундаментальных корней таким образом, что r_n — длинный фундаментальный корень, а все остальные r_i — короткие корни. Если $r_n \in J$, то одна из компонент фактора Леви L, например, G_1, изоморфна группе $\mathrm{Sp}_{2k}(q)$ для некоторого $k < n$ (отметим, что поскольку $A \neq G$, то $q \neq 3$). В силу леммы 6.2.2 мы получаем, что $L/C_L(G_1) = \mathrm{Aut}_L(G_1/Z(G_1)) = G_1/Z(G_1)$. По лемме 2.4.1, $K_1 = KC_L(G_1)O_3(P)/C_L(G_1)O_3(P)$ — картерова подгруппа группы $(P \leftthreetimes \langle\zeta\rangle)/C_L(G_1)O_3(P)$. Поскольку $|K_1 \cap P/C_L(G_1)O_3(P)|$ не делится на 3, и ζ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $G_1/Z(G_1)$ (см. лемму 5.2.5), то K_1 содержит силовскую 2-подгруппу группы $P/C_L(G_1)O_3(P) \simeq G_1/Z(G_1) \simeq \mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2k}(q)$. Кроме того, по лемме 5.2.5 силовская 2-подгруппа группы $(P/C_L(G_1)O_3(P))_\zeta$ является силовской 2-подгруппой факторгруппы $P/C_L(G_1)O_3(P)$. Таким образом, $K_1 \cap P/C_L(G_1)O_3(P)$ является силовской 2-подгруппой группы $(P/C_L(G_1)O_3(P))_\zeta \simeq \mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2k}(3)$. Но по лемме 5.3.2 в

группе $\mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2k}(3)$ существует элемент x нечётного порядка, который нормализует, но не централизует силовскую 2-подгруппу; противоречие с тем, что K_1 является картеровой подгруппой группы $(P \leftthreetimes \langle\zeta\rangle)/C_L(G_1)O_3(P)$. Таким образом, можно считать, что $r_n \notin J$.

Рассмотрим множество $J_n = \Pi \setminus \{r_n\}$ и параболическую подгруппу P_{J_n}. Из предыдущих рассуждений следует, что $K \leq P_J \leftthreetimes \langle\zeta\rangle \leq P_{J_n} \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$. Далее, подгруппа $\langle X_r \mid r$ — длинный корень из $\Phi(G)^+\rangle$ содержится в $O_3(P_{J_n})$ и $O_3(K \cap G)$ содержится в $\langle X_r \mid r$ — длинный корень из $\Phi(G)^+\rangle$, поэтому $O_3(K \cap G) \leq O_3(P_{J_n})$ и можно считать, что $P = P_{J_n}$. По лемме 2.4.1, $\widetilde{K} = KO_3(P)/O_3(P)$ является картеровой подгруппой группы $(P \leftthreetimes \langle\zeta\rangle)/O_3(P)$. Заметим, что единственный неабелев композиционный фактор группы $P \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ изоморфен $A_{n-1}(q) \simeq \mathbf{P}\mathrm{SL}_n(q)$. Ввиду [5, теорема 1] и [6, теорема 4] мы получаем, что $\widetilde{K} = R \times \langle\zeta\rangle$, где R — силовская 2-подгруппа группы P, централизуемая элементом ζ. Таким образом, $O_3(K \cap G) \leq C_P(R)$. Рассмотрим $Q = O_3(K \cap G) \cap P_\zeta$. Поскольку $O_3(K \cap G)$ нетривиальна и K нильпотентна, то группа $Q = O_3(K \cap G) \cap P_\zeta = Z(K) \cap O_3(K \cap G)$ нетривиальна. Следовательно, $N_G(Q)$ — собственная подгруппа группы G, и по лемме 5.2.1 $N_G(Q)$ содержится в собственной параболической подгруппе группы G. С другой стороны, $K \leq N_G(Q)$ и $P = P_{J_n}$ — максимальная собственная параболическая подгруппа группы G. Если $N_G(Q)$ не содержится в P, то $N_G(Q)$ и K содержатся в некоторой параболической подгруппе P_J, для которой $r_n \in J$. Выше было доказано, что $r_n \notin J$, значит, $N_G(Q)$ содержится в P.

Покажем, что $R \times Q$ — картерова подгруппа группы G_ζ. Действительно, предположим, что некоторый элемент $x \in G_\zeta$ нормализует $R \times Q$. Тогда x нормализует Q, поэтому x лежит в P и нормализует $O_3(P)$. С другой стороны, x нормализует R, значит, нормализует $C_P(R)$, поэтому x нормализует $C_{O_3(P)}(R)$. Кроме того, очевидно, x и ζ перестановочны. Таким образом, x нормализует $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$. Как мы отмечали выше, $K \leq (R \times C_{O_3(P)}(R)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ и группа $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ разрешима. Лемма 2.4.2(a) влечёт, что группа $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$ совпадает со своим нормализатором в $G \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, значит, $x \in R \times C_{O_3(P)}(R)$. Группа $C_{O_3(P)}(R) \leq \langle X_r \mid r$ — является длинным корнем$\rangle$ абелева, поэтому любой элемент из $R \times C_{O_3(P)}(R)$ централизует $C_{O_3(P)}(R) \geq O_3(K \cap G)$. Следовательно, x нормализует $(R \times O_3(K \cap G)) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle = K$, т. е. $x \in K$. По построению $R \times Q = K \cap G_\zeta$, значит, $x \in R \times Q$ и $R \times Q$ — картерова подгруппа группы G_ζ. С другой стороны, $O^{3'}(G_\zeta) \simeq \mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(3^{t/|\zeta|})$ и по индукции группы $\mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(3^{t/|\zeta|})$ и $\mathbf{P}\widehat{\mathrm{Sp}_{2n}(3^{t/|\zeta|})}$ не содержат картеровых подгрупп, порядок которых делится на 3. Это последнее противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

§3 Группы с автоморфизмом тройственности

Теорема 6.3.1. *Пусть G — конечная присоединённая группа лиева типа над полем характеристики p; $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ и $O^{p'}(G)$ изоморфна $D_4(q)$ или ${}^3D_4(q^3)$. Предположим, что τ — графовый автоморфизм порядка 3 группы $O^{p'}(G)$ (напомним, что для группы $G \simeq {}^3D_4(q^3)$ автоморфизм τ — это такой автоморфизм, множество неподвижных точек которого изоморфно $G_2(q)$). Обозначим через A_1 подгруппу группы $\mathrm{Aut}(D_4(q))$, порождённую внутренне-диагональными и полевыми автоморфизмами, а также графовым автоморфизмом порядка 2. Пусть подгруппа $A \leq \mathrm{Aut}(O^{p'}(G))$ такова, что $A \not\leq A_1$ (если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$), и K — картерова подгруппа группы A. Предположим также, что $G = A \cap \overline{G}_\sigma$, $A = KG$ и $|O^{p'}(G)| \leqslant$ **Cmin**. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(а) *$G \simeq {}^3D_4(q^3)$, $(|A : G|, 3) = 1$, q нечётно и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A;*

(б) *$(|A : G|, 3) = 3$, q нечётно, $\tau \in A$, с точностью до сопряжения элементом из G, подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_A(\tau) \in \Gamma G_2(q)$ и $\tau \in K$;*

(в) *$(|A : G|, 3) = 3$, $q = 2^t$, $|A : G| = 3t$, $A = G \leftthreetimes \langle \tau, \varphi\rangle$ ($A = G \leftthreetimes \langle\varphi\rangle$, если $G \simeq {}^3D_4(q^3)$), где φ — полевой автоморфизм порядка t ($|\varphi| = 3t$, если $G \simeq {}^3D_4(q^3)$), перестановочный с τ, с точностью до сопряжения элементом из G, подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_G(\langle\tau, \varphi\rangle_{2'}) \simeq G_2(2^{t_{2'}})$ и $\tau \in K$;*

(г) *$O^{p'}(G) \simeq D_4(p^{3t})$, p нечётно, факторгруппа A/G циклическая, $\tau \notin A$, $A = G \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где, для некоторого натурального m, $\zeta = \tau\varphi^m$ является графово-полевым автоморфизмом, и, с точностью до сопряжения элементом из G, $K = Q \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где Q является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}} \simeq {}^3D_4(p^{3t/|\zeta_{2'}|})$.*

*В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены, т. е. если $A_2 \in \mathcal{A}$ и $|F^*(A_2)| =$ **Cmin**, то группа A_2 не удовлетворяет условиям теоремы, значит, $F^*(A_2) \not\simeq {}^3D_4(q^3)$.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и A — такой контрпример к утверждению теоремы, что $|O^{p'}(G)|$ минимален. Ввиду [42, теорема 1.2(vi)] каждый элемент группы G сопряжён со своим обратным. По [13]

и [39, теоремы 1.2 и 1.4] для любого элемента $t \in G$ нечётного простого порядка все неабелевы композиционные факторы централизатора $C_G(t)$ являются простыми группами лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**. Таким образом, $C_A(t)$ удовлетворяет условию **(C)** и лемма 2.4.2 влечёт, что $K \cap G$ является 2-группой. Далее, лемма 5.2.6 влечёт, что все циклические группы, порождённые полевыми автоморфизмами одинакового нечётного порядка группы G, сопряжены относительно G. Поскольку централизатор любого полевого автоморфизма в G является группой лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**, мы вновь применяем лемму 2.4.2 и получаем утверждение теоремы по индукции. Лемма 5.2.6 также влечёт, что если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$, то все циклические группы, порождённые графово-полевыми автоморфизмами, сопряжены. Поскольку централизатор любого графово-полевого автоморфизма в G является группой лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**, мы вновь применяем лемму 2.4.2 и получаем утверждение (г) теоремы по индукции. Таким образом, можно считать, что A не содержит полевого или графово-полевого автоморфизма нечётного порядка. Следовательно, либо $G \simeq {}^3D_4(q^3)$ и A/G является 2-группой, либо K содержит такой элемент s порядка 3, что $\langle s\rangle \cap A_1 = \{e\}$ (для групп ${}^3D_4(q^3)$ справедливо $\langle s\rangle \cap G = \{e\}$), $G \leftthreetimes \langle s\rangle = G \leftthreetimes \langle \tau\rangle$, и $K \cap G$ является 2-группой.

В первом случае мы получаем утверждение (а) теоремы при выполнении условия $(|A : G|, 3) = 1$. Во втором случае существуют ровно две несопряжённых циклических подгруппы $\langle \tau\rangle$ и $\langle x\rangle$ порядка 3 группы A такие, что $\langle \tau\rangle \cap A_1 = \langle x\rangle \cap A_1 = \{e\}$ и $G \leftthreetimes \langle x\rangle = G \leftthreetimes \langle \tau\rangle$ (см. [29, (9-1)]). Следовательно, либо $s = \tau \in K$, либо $s = x \in K$. Предположим, что $q \neq 3^t$. В первом случае из известного строения картеровых подгрупп в группе из множества $\Gamma G_2(q)$, полученного в теореме 3.3.5, следуют утверждения (б) или (в) теоремы, во втором случае $K \leq C_A(x)$. Ввиду [29, (9-1)] $C_G(x) \simeq \mathbf{P}\mathrm{GL}_3^{\varepsilon}(q)$, где $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 3$, $\varepsilon = \pm$ и $\mathbf{P}\mathrm{GL}_3^{+}(q) = \mathbf{P}\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathbf{P}\mathrm{GL}_3^{-}(q) = \mathbf{P}\mathrm{GU}_3(q)$. Тогда $K = (K \cap G) \times \langle y, \varphi\rangle$, где φ — полевой автоморфизм группы $O^{p'}(G)$, порядок которого есть степень 2, y — графовый автоморфизм, порядок которого есть степень 3 и $x \in \langle y\rangle$. В силу нильпотентности K мы получаем, что $y\varphi = \varphi y$, откуда $C_{C_G(\varphi)}(x) = C_{C_G(x)}(\varphi)$. Теперь мы имеем, что

$$O^{p'}(C_G(\varphi)) = \begin{cases} D_4(q^{1/|\varphi|}), & \text{если } O^{p'}(G) \simeq D_4(q), \\ {}^3D_4(q^{3/|\varphi|}), & \text{если } G \simeq {}^3D_4(q^3). \end{cases}$$

Значит, $C_{C_G(x)}(\varphi) = C_{C_G(\varphi)}(x) \simeq \mathbf{P}\mathrm{GL}_3^{\mu}(q^{1/|\varphi|})$, причём $q^{1/|\varphi|} \equiv \mu 1 \pmod 3$, где $\mu = \pm$ (заметим, что ε и μ могут быть различны). Как мы отмечали выше, $K \cap G$ является 2-группой. С другой стороны, в силу [6, теорема 4],

существует элемент z порядка 3, централизующий силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x) = \mathbf{P}\mathrm{GL}_3^{\varepsilon}(q)$ и лежащий в $C_{C_G(x)}(\varphi) \simeq \mathbf{P}\mathrm{GL}_3^{\mu}(q^{1/|\varphi|})$. Таким образом, элемент z централизует K, следовательно, лежит в K. Но $K \cap G$ не содержит элементов нечётного порядка, следовательно, этот второй случай невозможен.

Предположим теперь, что $q = 3^t$. Тогда $C_G(\tau) \simeq G_2(q)$ и мы получаем утверждения (б) или (в) теоремы. Во втором случае $C_G(x) \simeq \mathrm{SL}_2(q) \leftthreetimes U$, где U является 3-группой и $Z(C_G(x)) \cap U \neq \{e\}$; противоречие с леммой 2.4.2. $\square$

§4 Классификационная теорема

Теорема 6.4.1. *Пусть G — конечная присоединённая группа лиева типа (G не обязательно простая) над полем характеристики p и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Предположим также, что $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$. Выберем подгруппу A группы $\mathrm{Aut}(O^{p'}(\overline{G}_\sigma))$, для которой выполнено равенство $A \cap \overline{G}_\sigma = G$, и, если $O^{p'}(G) = D_4(q)$, предположим, что A содержится в подгруппе A_1, определённой в формулировке теоремы* 6.3.1. *Пусть K — картерова подгруппа группы A и $A = KG$.*

Тогда выполнено в точности одно из следующих утверждений:

(а) *G определена над полем характеристики 2, $A = \langle G, \zeta g, t\rangle$, где t — 2-элемент, K содержится в нормализаторе некоторой t-инвариантной подгруппы Бореля группы G и $K \cap \langle G, \zeta g\rangle$ удовлетворяет одному из утверждений* (а)–(е) *леммы* 5.3.4;

(б) *$G \simeq \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A, порядок $|\zeta| = t$ нечётен, и, с точностью до сопряжения в G, выполнено равенство $K = Q \rtimes \langle\zeta\rangle$, где Q является силовской* 3*-подгруппой группы $G_{\zeta_{3'}}$;*

(в) *$A = {}^2G_2(3^{2n+1}) \rtimes \langle\zeta\rangle$, $|\zeta| = 2n+1$ и с точностью до сопряжения в G выполнено равенство $K = (K \cap G) \rtimes \langle\zeta\rangle$ и $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, где Q порядка* 2 *и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$;*

(г) *p не делит $|K \cap G|$ и K содержит силовскую* 2*-подгруппу группы A, ввиду леммы* 5.3.3 *группа A удовлетворяет* **(ESyl2)** *тогда и только тогда, когда G удовлетворяет* **(ESyl2)**.

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены.

Замечание. Существует некоторая дихотомия для картеровых подгрупп в группах автоморфизмов конечных групп лиева типа, несодержащих графовый или полево-графовый автоморфизм порядка 3. Они либо содержатся в нормализаторе некоторой подгруппы Бореля, либо характеристика нечётна и картерова подгруппа содержит силовскую 2-подгруппу всей группы.

Предположим, что утверждение теоремы неверно и A — контрпример к утверждению теоремы, для которого $|F^*(A)|$ минимален. Среди контрпримеров с минимальным $|F^*(A)|$ выберем тот, для которого $|A|$ минимален. В этом случае для любой почти простой группы A_1, для которой $|F^*(A_1)| < |F^*(A)|$, $F^*(A_1)$ — простая группа лиева типа и A_1 удовлетворяет условиям теоремы 6.4.1, картеровы подгруппы сопряжены. Действительно, заметим, что лишь одно утверждение теоремы может быть выполнено, поскольку при выполнении утверждений (б) или (в) условие $N_A(Q) = QC_A(Q)$ для силовской 2-подгруппы Q группы A не выполнено, т. е. не выполнено утверждение (г) теоремы (то, что никакие другие два утверждения не могут быть выполнены одновременно, очевидно). Таким образом, картеровы подгруппы группы A_1 сопряжены. Отметим также, что отсюда следует неравенство $|F^*(A)| \leqslant \mathbf{Cmin}$. Действительно, если $A_2 \in \mathcal{A}$ и $F^*(A_2) = \mathbf{Cmin}$, то либо A_2 удовлетворяет условиям теоремы 6.3.1, либо A_2 удовлетворяет условиям теоремы 6.4.1. Как мы отмечали в теореме 6.3.1, первый случай невозможен. Второй случай, как мы только что заметили, возможен лишь в том случае, если $|F^*(A)| \leqslant |F^*(A_2)| = \mathbf{Cmin}$ (поскольку A — контрпример к утверждению теоремы для которого $|F^*(A)|$ минимален).

Мы докажем теорему следующим образом. Если $F^*(A) \simeq \mathbf{P}\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, то теорема следует из теоремы 6.2.3. Если $A = G$, то теорема следует из [23], [24] и результатов глав 3 и 4 настоящей работы. Таким образом, можно считать, что $A/(A \cap G)$ нетривиальна. Пусть K — картерова подгруппа группы A. Мы покажем сначала, что если p делит $|K \cap G|$, то выполнено одно из утверждений (а)–(в) теоремы. Затем мы покажем, что если p не делит $|K \cap G|$, то K содержит силовскую 2-подгруппу группы A. Поскольку оба этих шага достаточно запутанные, мы разделили их на два параграфа. Заметим, что по [13] для любого полупростого элемента $t \in G$, все неабелевы композиционные факторы группы $C_G(t)$, значит, группы $C_A(t)$, являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем $|F^*(A)|$, а значит, меньшего, чем $\mathbf{Cmin}$. Поэтому $C_A(t)$ удовлетворяет условию **(C)**. Для того, чтобы применять леммы 2.4.1 и 2.4.2, мы будем использовать этот факт без дальнейших ссылок.

§5 Картеровы подгруппы порядка, делящегося на характеристику

Обозначим $K \cap G$ через K_G. Для любой группы A, удовлетворяющей условиям теоремы 6.4.1, факторгруппа A/G является абелевой и, для некоторого натурального t, изоморфна подгруппе группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_t$, где $\mathbb{Z}_t$ обозначает циклическую группу порядка t. Если факторгруппа A/G не является циклической, то группа $O^{p'}(G)$ является расщеплённой и A содержит элемент τa, где τ — графовый автоморфизм группы $O^{p'}(G)$ и $a \in \overline{G}_\sigma$. Тогда любой полупростой элемент нечётного порядка сопряжён со своим обратным в A (см. лемму 5.2.7). По лемме 2.4.2 мы получаем, что $|K_G|$ делится только на 2 и p. Если $p = 2$, то K_G является 2-группой, она содержится в собственной K-инвариантной параболической подгруппе P группы G и по лемме 2.4.1 факторгруппа $KO_2(P)/O_2(P)$ является картеровой подгруппой группы $KP/O_2(P)$. Поскольку $K_G \leq O_2(P)$, то $(KO_2(P)/O_2(P)) \cap (P/O_2(P)) = \{e\}$. Значит, P является подгруппой Бореля группы G, в противном случае мы бы имели $C_{P/O_2(P)}(KO_2(P)/O_2(P)) \neq \{e\}$; противоречие с тем, что $KO_2(P)/O_2(P)$ является картеровой подгруппой группы $KP/O_2(P)$. Таким образом, P является подгруппой Бореля, и теорема следует из леммы 5.3.4. Далее, если $p \neq 2$, то вновь K_G содержится в собственной параболической подгруппе P группы G такой, что $O_p(K_G) \leq O_p(P)$ и $O_2(K_G) \leq L$. Тогда леммы 5.2.5 и 5.2.6 влекут, $H_2 \leq O_2(K \cap G) \leq K$, где H_2 — силовская 2-подгруппа группы H. Далее, лемма 3.2.12 влечёт, что $O_p(K_G) \leq C_U(H_2) = \{e\}$. Следовательно, $K \cap G$ является 2-группой. По леммам 5.2.5 и 5.2.6 любой элемент $x \in A \setminus G$ нечётного порядка такой, что $\langle x \rangle \cap G = \{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G. Значит, K содержит силовскую 2-подгруппу группы A, т. е. K удовлетворяет утверждению (д) теоремы. Поэтому факторгруппа A/G является циклической, и мы можем предполагать, что $A = \langle G, \zeta g \rangle \in \Gamma G$.

Напомним, что мы находимся в условиях теоремы 6.4.1, $A = \langle G, \zeta g \rangle$ предполагается контрпримером к утверждению теоремы, для которого $|O^{p'}(G)|$ и $|A|$ минимальны, и K является такой картеровой подгруппой группы $\langle G, \zeta g \rangle$, что p делит $|K_G|$. Мы имеем, что $K = \langle \zeta^k g, K_G \rangle$. Поскольку $|O^{p'}(G)| \leqslant$ **Cmin**, лемма 2.4.1 влечёт, что KG/G является картеровой подгруппой группы A/G. Следовательно, $|\zeta^k| = |\zeta|$, и мы можем предполагать, что $k = 1$ и $K = \langle K_G, \zeta g \rangle$.

Ввиду леммы 5.2.1 существует такая собственная σ- и $\bar{\zeta} g$- инвариантная параболическая подгруппа $\overline{P}$ группы $\overline{G}$, что $O_p(K_G) \leq R_u(\overline{P})$ и $K_G \leq \overline{P}$.

В частности, $\overline{P}$ и $\overline{P}^{\bar\zeta}$ сопряжены в $\overline{G}$. Пусть Φ — корневая система группы $\overline{G}$ и Π — множество фундаментальных корней корневой системы Φ. Ввиду [11, предложение 8.3.1], $\overline{P}$ сопряжена с некоторой $\overline{P}_J = \overline{B}\cdot\overline{N}_J\cdot\overline{B}$, где J является подмножеством множества Π и $\overline{N}_J$ — полный прообраз подгруппы W_J в $\overline{N}$ относительно естественного гомоморфизма $\overline{N}/\overline{T}\to W$. Далее, $\overline{P}_J$ является $\bar\varphi$-инвариантной, значит, $\overline{P}_J^{\bar\zeta} = \overline{P}_J^{\bar\gamma^\varepsilon}$ (напомним, что $\bar\zeta = \bar\gamma^\varepsilon\bar\varphi^k$ по определению). Рассмотрим симметрию ρ диаграммы Дынкина корневой системы Φ, соответствующую $\bar\gamma$. Пусть $\overline{J}$ — образ множества J относительно ρ. Ясно, что $\overline{P}_J^{\bar\gamma} = \overline{P}_{\overline{J}}$. Поскольку $\overline{P}$ и $\overline{P}^{\bar\zeta}$ сопряжены в $\overline{G}$, мы получаем, что $\overline{P}_J$ и $\overline{P}_J^{\bar\zeta}$ сопряжены в $\overline{G}$. Из [11, теорема 8.3.3] следует, что либо $\varepsilon=0$, либо $J=\overline{J}$; т. е. $\overline{P}_J$ является $\bar\zeta$-инвариантной.

Далее, мы имеем, что $\overline{P}^{\bar y} = \overline{P}_J$ для некоторого $\bar y\in\overline{G}$. Значит, $\langle\bar\zeta g,\overline{P}\rangle^{\bar y} = \langle(\bar\zeta g)^{\bar y},\overline{P}_J\rangle$ и $\overline{P}_J^{(\bar\zeta g)^{\bar y}} = \overline{P}_J$. Отсюда следует, что

$$(\bar\zeta g)^{\bar y} = \bar y^{-1}\bar\zeta g\bar y = \bar\zeta\left(\bar\zeta^{-1}\bar y^{-1}\bar\zeta g\bar y\right) = \bar\zeta\cdot h,$$

где $h = \left(\bar\zeta^{-1}\bar y^{-1}\bar\zeta g\bar y\right)\in\overline{G}$. Поскольку $\overline{P}_J^{\bar\zeta} = \overline{P}_J = \overline{P}_J^{h^{-1}}$, получаем, что $h\in N_{\overline{G}}(\overline{P}_J)$. По [11, теорема 8.3.3], $N_{\overline{G}}(\overline{P}_J) = \overline{P}_J$, таким образом, $\langle\bar\zeta g,\overline{P}\rangle^{y} = \langle\bar\zeta,\overline{P}_J\rangle$. Далее обе группы $\overline{P}$ и $\overline{P}_J$ являются σ-инвариантными. Значит, мы имеем $\bar y\sigma(\bar y^{-1})\in N_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{P}$. Следовательно, по теореме Ленга-Стейнберга [41, теорема 10.1], можно предполагать, что $\bar y = \sigma(\bar y)$, т. е. $\bar y\in\overline{G}_\sigma$. Поскольку $\overline{G}_\sigma = \overline{T}_\sigma\cdot O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ и $\overline{T}\le\overline{P}_J$, то мы можем предполагать, что $\bar y\in O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Таким образом, с точностью до сопряжения в G, можно предполагать, что $\overline{K}\le\langle\bar\zeta,\overline{P}_J\rangle = \overline{P}_J\leftthreetimes\langle\bar\zeta\rangle$ и

$$K\le\langle(\overline{P}_J\cap G),\zeta g\rangle = \langle P_J,\zeta g\rangle,$$

в частности, $g\in(\overline{P}_J)_\sigma$. Более того, если $\overline{L}_J = \langle\overline{T},\overline{X}_r\mid r\in J\cup -J\rangle$, то $\overline{L}_J$ есть σ- и $\bar\zeta$- инвариантный фактор Леви группы $\overline{P}_J$ и $L_J = \overline{L}_J\cap G$ есть ζ-инвариантный фактор Леви группы P_J. Поскольку все факторы Леви сопряжены относительно $O_p(P_J)$, можно считать, что L_J является ζg-инвариантным фактором Леви. Лемма 2.4.1 влечёт, что

$$KO_p(P_J)/O_p(P_J) = X$$

является картеровой подгруппой группы $\langle P_J,\zeta g\rangle/O_p(P_J)$ и

$$KZ(L_J)O_p(P_J)/Z(L_J)O_p(P_J) = \widetilde{X}$$

является картеровой подгруппой группы $\langle P_J,\zeta g\rangle/Z(L_J)O_p(P_J)$. Напомним, что $K = \langle\zeta g,K_G\rangle$, значит, если v и $\tilde v$ — образы элемента g относительно

естественных гомоморфизмов

$$\omega : \langle P_J, \zeta g\rangle \to \langle L_J, \zeta v\rangle \simeq \langle P_J, \zeta g\rangle / O_p(P_J),$$
$$\tilde{\omega} : \langle P_J, \zeta g\rangle \to \langle P_J, \zeta g\rangle / Z(L_J)O_p(P_J) \simeq \langle L_J, \zeta v\rangle / Z(L_J),$$

то $X = \langle \zeta v, K_G^{\omega}\rangle$ и $\widetilde{X} = \langle \zeta\tilde{v}, K_G^{\tilde{\omega}}\rangle$. Заметим, что $O_p(P)$ и $Z(L_J)$ — характеристические подгруппы групп P и L_J соответственно, значит, мы можем рассматривать ζ как автоморфизм факторгрупп $L_J \simeq P/O_p(P)$ и $\widetilde{L} = L_J/Z(L_J)$. Заметим также, что все неабелевы композиционные факторы группы P являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**, значит, $\langle P, \zeta g\rangle$ удовлетворяет **(C)**. Таким образом, мы можем применять лемму 2.4.1 к $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle$, $\langle L_J, \zeta v\rangle$ и $\langle P, \zeta g\rangle$.

Если P_J — подгруппа Бореля группы G, то утверждение теоремы следует из леммы 5.3.4. Поэтому мы можем предполагать, что $L_J \neq Z(L_J)$, т. е. что P_J не является подгруппой Бореля группы G. Тогда $L_J = H(G_1 * \ldots * G_k)$, где G_i — подсистемные подгруппы группы G, $k \geqslant 1$, и H — подгруппа Картана группы G. Пусть $\zeta g = (\zeta_2 g_2)\cdot(\zeta_{2'} g_{2'})$ — разложение в произведение 2- и $2'$-частей элемента ζg (причём $g_2, g_{2'} \in (\overline{P}_J)_\sigma$). Далее, $\zeta_{2'} = \varphi^k$, для некоторого k, является полевым автоморфизмом (напомним, что мы не рассматриваем тройственный автоморфизм) и он нормализует каждую G_i, поскольку φ нормализует каждую G_i. Более того, ввиду леммы 5.2.5, мы имеем, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы H. В частности, он централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(L_J) \leq H$. Следовательно, любой элемент нечётного порядка группы $\langle L_J, \zeta_{2'} v_{2'}\rangle$ централизует силовскую 2-подгруппу $Z(L_J)$ (здесь $v_{2'}$ — образ элемента $g_{2'}$ относительно ω).

Далее, $\widetilde{L} = (\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_k)\widetilde{H}$, где $\widetilde{H} = H^{\tilde{\omega}}$ и $\mathbf{P}G_1, \ldots, \mathbf{P}G_k$ — канонические конечные группы лиева типа с тривиальным центром. Положим $M_i = C_{\widetilde{L}}(\mathbf{P}G_i)$, очевидно, что $M_i = (\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_{i-1} \times \mathbf{P}G_{i+1} \times \ldots \times \mathbf{P}G_k)C_{\widetilde{H}}(\mathbf{P}G_i)$; обозначим через L_i факторгруппу $\widetilde{L}/M_i$ и через π_i соответствующий естественный гомоморфизм. Тогда L_i — конечная группа лиева типа и $\mathbf{P}G_i \leq L_i \leq \widehat{\mathbf{P}G}_i$.

Положим $M_{i,j} = C_{\widetilde{L}}(\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$ и обозначим через $\pi_{i,j}$ соответствующий естественный гомоморфизм $\widetilde{L} \to \widetilde{L}/M_{i,j}$. Если M_i (соотв. $M_{i,j}$) является ζ-инвариантной, то M_i (соотв. $M_{i,j}$) нормальна в $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle$ и мы обозначим через π_i (соотв. $\pi_{i,j}$) естественный гомоморфизм $\pi_i : \langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle \to \langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle/M_i$ ($\pi_{i,j} : \langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle \to \langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle/M_{i,j}$).

Теперь рассмотрим ζ. Поскольку ζ^2 — полевой автоморфизм, могут выполняться два случая: либо ζ нормализует $\mathbf{P}G_i$, либо ζ^2 нормализует $\mathbf{P}G_i$ и $\mathbf{P}G_i^{\zeta} = \mathbf{P}G_j$ для некоторого $j \neq i$. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

Пусть ζ нормализует $\mathbf{P}G_i$. Тогда ζ нормализует M_i, и лемма 2.4.1 влечёт, что $\widetilde{X}^{\pi_i} = K_i$ есть картерова подгруппа группы $\langle L_i, (\zeta\tilde{v})^{\pi_i}\rangle$. Поскольку $\langle L_i, (\zeta\tilde{v})^{\pi_i}\rangle$ — полулинейная группа лиева типа, удовлетворяющая условиям теоремы 6.4.1 (по построению ζ^2 является полевым автоморфизмом и потому мы не попадаем в условия теоремы 6.3.1), $|L_i| < |G|$, и p не делит $|K_i|$, мы имеем, что K_i содержит силовскую 2-подгруппу Q_i группы $\langle L_i, (\zeta\tilde{v})^{\pi_i}\rangle$ (в частности, $p \neq 2$) и по лемме 2.4.3 группа $\langle L_i, (\zeta\tilde{v})^{\pi_i}\rangle$ удовлетворяет **(ESyl2)**.

Пусть ζ^2 нормализует $\mathbf{P}G_i$ и $\mathbf{P}G_i^{\zeta} = \mathbf{P}G_j$. Тогда подгруппа $M_{i,j}$ нормальна в $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle$. Мы хотим показать, что $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$ удовлетворяет **(ESyl2)**. Поскольку $M_{i,j}$ является нормальной подгруппой группы $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle$, то по лемме 2.4.1 $(\widetilde{X})^{\pi_{i,j}}$ является картеровой подгруппой группы $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$. Рассмотрим подгруппу

$$\langle (\mathbf{P}G_i)^{\pi_{i,j}} \times (\mathbf{P}G_j)^{\pi_{i,j}}, \widetilde{X}^{\pi_{i,j}}\rangle$$

группы $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$ (отметим, что $(\mathbf{P}G_i)^{\pi_{i,j}} \simeq \mathbf{P}G_i$ и $(\mathbf{P}G_j)^{\pi_{i,j}} \simeq \mathbf{P}G_j$, и до конца данного абзаца для сокращения обозначений мы будем отождествлять эти группы). Далее мы находимся в условиях леммы 2.2.3, а именно, мы имеем конечную группу $\widetilde{G} = (\widetilde{X})^{\pi_{i,j}}(\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$, где $\mathbf{P}G_i \simeq \mathbf{P}G_j$ имеет тривиальный центр. Тогда $\mathrm{Aut}_{(\widetilde{X})^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) \simeq \mathrm{Aut}_{\widetilde{X}}(\mathbf{P}G_i)$ является картеровой подгруппой группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$. Далее, $\mathbf{P}G_i$ — каноническая конечная группа лиева типа и

$$\mathbf{P}G_i \leq \mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i) \leq \mathrm{Aut}(\mathbf{P}G_i),$$

т. е. $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.4.1 (по построению ζ^2 является полевым автоморфизмом и потому мы не попадаем в условия теоремы 6.3.1) и $(\widetilde{X})^{\pi_{i,j}} \cap (\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$ не делится на характеристику. По индукции, $\mathrm{Aut}_{\widetilde{X}}(\mathbf{P}G_i)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ (в частности, $p \neq 2$). Такие же рассуждения показывают, что $\mathrm{Aut}_{\widetilde{X}}(\mathbf{P}G_j)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_j)$. Следовательно, $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_j)$ удовлетворяют условию **(ESyl2)**. Поскольку справедливы неравенства $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i) \leq \mathrm{Aut}_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_j) \leq \mathrm{Aut}_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$, леммы 5.3.1 и 5.3.3 влекут, что группы индуцированных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\mathrm{Aut}_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$ удовлетворяют условию **(ESyl2)**. Рассмотрим $N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$. Поскольку

$$|\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}} : N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)| = |\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}} : N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)| = 2,$$

нетрудно убедиться, что для любого элемента h из $\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$ справедливо равенство смежных классов $hN_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) = hN_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$, откуда следует, что $N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) = N_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$. По построению $C_{\langle \widetilde{L}, \zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) \cap$

$C_{\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)=\{e\}$, поэтому лемма 2.4.5 (с $C_{\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $C_{\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$ в качестве нормальных подгрупп) влечёт, что нормализатор $N_{\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Далее, $|\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}:N_{\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_1)|=2$, таким образом лемма 2.4.6 влечёт, что группа $\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle^{\pi_{i,j}}$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**.

Теперь мы покажем, что группа $\langle L_J,\zeta v\rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $\widetilde{L}\neq\{e\}$, то, как мы заметили выше, $p\neq 2$. Пусть Q — силовская 2-подгруппа группы $\langle L_J,\zeta v\rangle$. Рассмотрим элемент $x\in N_{\langle L_J,\zeta v\rangle}(Q)$ нечётного порядка. Нам нужно доказать, что x централизует Q. Как мы заметили выше, любой элемент нечётного порядка группы $\langle L_J,\zeta v\rangle$ централизует $Q\cap Z(L_J)$, значит, если $\tilde{x}=x^{\tilde{\omega}}$ централизует $\widetilde{Q}=Q^{\tilde{\omega}}\simeq Q/(Q\cap Z(L_J))$, то x централизует Q. Далее, либо M_i нормальна в $\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle$, либо $M_{i,j}$ нормальна в $\langle\widetilde{L},\zeta\tilde{v}\rangle$ и $(\cap_i M_i)\bigcap(\cap_{i,j}M_{i,j})=\{e\}$. Более того, как мы доказали выше, $\tilde{x}^{\pi_i}$ централизует $\widetilde{Q}M_i/M_i$, и $\tilde{x}^{\pi_{i,j}}$ централизует $\widetilde{Q}M_{i,j}/M_{i,j}$. По лемме 2.4.5 (с нормальными подгруппами M_i и $M_{i,j}$) мы получаем, что $\tilde{x}$ централизует $\widetilde{Q}$.

Таким образом, $\langle L,\zeta v\rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и по лемме 2.4.3 существует картерова подгруппа F группы $\langle L,\zeta v\rangle$, содержащая Q. Поскольку $\langle L,\zeta v\rangle$ удовлетворяет условию **(C)**, теорема 2.1.4 влечёт, что $X=K^{\omega}$ и F сопряжены, т. е. X содержит силовскую 2-подгруппу группы $\langle L,\zeta v\rangle$ и, с точностью до сопряжения в $\langle P_J,\zeta g\rangle$, K содержит силовскую 2-подгруппу группы $\langle P_J,\zeta v\rangle$. В частности, силовская 2-подгруппа H_2 подгруппы Картана H лежит в K и H_2 централизует $K\cap O_p(P_J)\neq\{e\}$; противоречие с леммой 3.2.12.

§6 Картеровы подгруппы, порядок которых не делится на характеристику

Напомним, что пересечение $K\cap G$ обозначено через K_G. Мы вновь находимся в условиях теоремы 6.4.1. Как мы отмечали в предыдущем параграфе, для любой группы A, удовлетворяющей условиям теоремы 6.4.1, факторгруппа A/G является абелевой и, для некоторого натурального t, изоморфна подгруппе группы $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_t$. Если факторгруппа A/G не является циклической, то группа $O^{p'}(G)$ является расщеплённой и A содержит элемент τa, где τ — графовый автоморфизм группы $O^{p'}(G)$ и $a\in\overline{G}_{\sigma}$. Таким образом, если группа A/G не является циклической или $\Phi(\overline{G})\neq A_n,D_{2n+1},E_6$, то по леммам 3.2.3 и 5.2.7 любой полупростой элемент группы G сопряжён со своим обратным. По лемме 2.4.2 мы имеем, что $K_G=K\cap G$ является 2-

группой. В условиях теоремы 6.4.1 группа A/G абелева и, если $\overline{A}_1$ — холлова $2'$-подгруппа группы A/G, то $\overline{A}_1$ — циклическая группа. Пусть x — прообраз порождающего элемента группы $\overline{A}_1$, взятый в K. Тогда $\langle x\rangle \cap G \leq \langle x\rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq K \cap \overline{G}_\sigma = K \cap (A \cap \overline{G}_\sigma) = K \cap G$. Как мы заметили выше, $K \cap G$ является 2-группой, следовательно $\langle x\rangle \cap \overline{G}_\sigma = \{e\}$. По лемме 5.2.6 элемент x относительно группы $\overline{G}_\sigma$ сопряжён с некоторым полевым автоморфизмом нечётного порядка и по лемме 5.2.5 элемент x централизует силовскую 2-подгруппу группы G. Значит, K_G является силовской 2-подгруппой группы G (в частности, $p \neq 2$) и, так как A/G абелева, лемма 2.4.5 влечёт, что K содержит силовскую 2-подгруппу группы A. Таким образом, в этом случае выполняется теорема 6.4.1. Поэтому мы можем предполагать, что $A = \langle \zeta g, G\rangle$ — полулинейная группа лиева типа, $K = \langle \zeta^k g, K_G\rangle$ — картерова подгруппа группы A, и $\Phi(\overline{G}) \in \{A_n, D_{2n+1}, E_6\}$. Как и в предыдущем параграфе, мы можем предполагать, что $k = 1$. Поскольку G_ζ нетривиальна, то централизатор $C_G(\zeta g)$ нетривиален, следовательно, подгруппа K_G также нетривиальна. Поэтому, $Z(K) \cap K_G \neq \{e\}$. Рассмотрим элемент $x \in Z(K) \cap K_G$ простого порядка. Тогда $K \in C_A(x) = \langle \zeta g, C_G(x)\rangle$. Далее, $C_{\overline{G}}(x)^0 = \overline{C}$ является связной σ-инвариантной редуктивной подгруппой максимального ранга группы $\overline{G}$. Более того, $\overline{C}$ является характеристической подгруппой группы $C_{\overline{G}}(x)$ и $C_{\overline{G}}(x)/\overline{C}$ изоморфна подгруппе группы Δ (см. [31, предложение 2.10]). Таким образом, K содержится в $\langle K, C\rangle$, где $C = \overline{C} \cap G$. Более того, по лемме 5.1.1 подгруппа $C = \overline{C} \cap G = T(G_1 * \ldots * G_m)$ нормальна в $C_A(x)$ и K_GC/C изоморфна подгруппе группы Δ. Предположим, что $|K_G|$ не делится на 2.

Если $m = 0$, то $C = T = Z(C)$ — максимальный тор. Тогда тор $\overline{T}$ является $\bar{\zeta} g$-инвариантным. Ввиду леммы 5.2.4 получаем, что $N_A(C_A(x)) \neq C_A(x)$. Поскольку $C_A(x)$ в этом случае является разрешимой группой это даёт противоречие с леммой 2.4.2.

Если $m \geqslant 1$, то $Z(C)$ и $G_1 * \ldots * G_m$ — нормальные подгруппы группы $\langle K, C\rangle$. Значит, мы можем рассмотреть $\widetilde{G} = \langle K, G_1 * \ldots * G_m * Z(C)\rangle/Z(C) \leq \langle K, C\rangle/Z(C)$. Тогда $\widetilde{G} = \widetilde{K}(\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m)$, где $\widetilde{K} = KZ(C)/Z(C)$ — картерова подгруппа группы $\widetilde{G}$ (см. лемму 2.4.1) и $Z(\mathbf{P}G_i)$ тривиален. Группа $\widetilde{K}$ действует сопряжениями на $\{\mathbf{P}G_1, \ldots, \mathbf{P}G_m\}$ и без ограничения общности можно предполагать, что $\{\mathbf{P}G_1, \ldots, \mathbf{P}G_m\}$ является $\widetilde{K}$-орбитой. Таким образом, мы находимся в условиях леммы 2.2.3, и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ — картерова подгруппа группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$. Более того $|\widetilde{K} \cap \mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m|$ не делится на характеристику. По индукции либо $\mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$, либо $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.3.1 и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_1) \cap \mathbf{P}G_1$ — нетривиальная 2-группа, в частности

характеристика p нечётна. В любом случае $|K \cap G|$ делится на 2, что противоречит нашему предположению. Следовательно, порядок $|K_G|$ чётен и можно считать, что $x \in Z(K) \cap K_G$ является инволюцией.

Запишем $\zeta g = \zeta_2 g_1 \cdot \zeta_{2'} g_2$, где $\zeta_2 g_1$ является 2-частью и $\zeta_{2'} g_2$ является $2'$-частью элемента ζg. По лемме 5.2.5 элемент $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу Q_G группы G, поэтому можно считать, что порядок элемента g_2 нечётен. С точностью до сопряжения в группе G можно считать, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы K_G. В частности, $\zeta_{2'}$ централизует x. Пусть Q — некоторая силовская 2-подгруппа группы $C_G(x)$, содержащая силовскую 2-подгруппу группы K_G. Тогда существует $y \in G$ такой, что $Q^y \leq Q_G$. Заменяя подгруппу K на сопряженную подгруппу K^y, можно считать, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$. Так как $\zeta_{2'} g_2$ централизует x, мы получаем, что $g_2 \in C_{\overline{G}_\sigma}(x)$. Более того, по лемме 3.2.1 следует, что $g_2 \in C_{\overline{G}}(x)^0$. В частности, g_2 нормализует каждую из G_i и централизует $Z(C)$ и $Z(C_G(x))$.

Заметим, что $\zeta_{2'}$ нормализует каждую из G_i и централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(C_G(x))$ (напомним, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$). Действительно, $\zeta_{2'}$ нормализует C, значит, нормализует характеристические подгруппы $O^{p'}(C) = G_1 * \ldots * G_m$ и $Z(C)$ группы C. Поэтому можно рассмотреть индуцированный автоморфизм $\zeta_{2'}$ группы

$$O^{p'}(C)/(Z(C) \cap O^{p'}(C) = \mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m.$$

Поскольку каждая группа $\mathbf{P}G_i$ имеет тривиальный центр и неразложима в прямое произведение собственных подгрупп, следствие из теоремы Крулля-Ремака-Шмидта [37, 3.3.10] влечёт, что $\zeta_{2'}$ переставляет различные $\mathbf{P}G_i$. Поскольку $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$ и $C \trianglelefteq C_G(x)$, то $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы C, значит, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу $Q_1 \times \ldots \times Q_m$ группы $\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m$, где Q_i — силовская 2-подгруппа группы $\mathbf{P}G_i$. Если бы $\zeta_{2'}$ индуцировал нетривиальную подстановку на множестве $\{\mathbf{P}G_1, \ldots, \mathbf{P}G_m\}$, то он бы индуцировал нетривиальную подстановку на множестве $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Поскольку каждая группа Q_i нетривиальна, это невозможно. Таким образом, любой элемент нечётного порядка группы $\langle K, C\rangle$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(C)$ и нормализует каждую из G_i.

Если $\Phi(\overline{G}) = E_6$, то по лемме 3.2.1 централизатор любой инволюции группы G в группе $\overline{G}$ связен. По лемме 5.2.2 любая инволюция группы G содержится в таком максимальном торе T, что $N(G, T)/T \simeq W$, где W — группа Вейля группы $\overline{G}$. Хорошо известно, что $\overline{C}$ порождается тором $\overline{T}$ и

$\overline{T}$-корневыми подгруппами. Запишем $\overline{C} = \overline{T}(\overline{G}_1 * \ldots * \overline{G}_k)$. Поскольку $\overline{T}_\sigma$ либо получен из максимального расщеплённого тора $\overline{H}$ скручиванием элементом w_0 порядка 2, либо совпадает с $\overline{H}_\sigma$, и любой полевой автоморфизм действует тривиально на факторгруппе $N_{\overline{G}}(\overline{H})/\overline{H}$, то $\bar{\zeta}_{2'}$ нормализует каждую подгруппу $\overline{G}_i$ и индуцирует тривиальную симметрию корневой системы $\Phi(\overline{G}_i)$. Значит, если $\Phi(\overline{G}_i) = D_4$, то $\bar{\zeta}_{2'}$ индуцирует полевой (а не графовый или графово-полевой) автоморфизм группы $\overline{G}_i$. Более того, поскольку σ действует тривиально на факторгруппе $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ (см. лемму 5.2.5), то [13, предложение 6] влечёт, что σ нормализует каждую подгруппу $\overline{G}_i$ и индуцирует симметрию порядка $\leqslant 2$ на $\Phi(\overline{G}_i)$. Следовательно, никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Если $\Phi(\overline{G})$ совпадает с A_n или D_n, то [14, предложения 7, 8, 10] влекут, что никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Следовательно, в любом случае никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Кроме того, лемма 3.2.1 влечёт, что $|K_G : (K_G \cap C)|$ делит $|C_{\overline{G}}(x)/C_{\overline{G}}(x)^0|$ и $C_{\overline{G}}(x)/C_{\overline{G}}(x)^0$ является 2-группой. В [14] доказано, что если корневая система Φ имеет тип D_n и Ψ — её подсистема типа D_4, то никакой элемент из $N_{W(\Phi)}(W(\Psi))$ не индуцирует симметрию порядка 3 диаграммы Дынкина корневой системы Ψ. Поскольку ζ^2 — полевой автоморфизм, отсутствие симметрии порядка 3 вместе с [13, предложение 6] влечёт, что для каждой из G_i автоморфизм $\zeta_{2'}$ является полевым (а не графовым или графово-полевым). Следовательно, группа индуцированных автоморфизмов $\langle \mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_i), \mathbf{P}G_i\rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 6.4.1 для всех i.

Далее рассмотрим $\widetilde{G} = \widetilde{K}(\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m) \leq \langle K, C\rangle/Z(C)$ (возможно, $m = 0$), где $\widetilde{K} = KZ(C)/Z(C)$ является картеровой подгруппой группы $\widetilde{G}$ (см. лемму 2.4.1); для всех i, группа $\mathbf{P}G_i$ неразложима в прямое произведение собственных подгрупп и $Z(\mathbf{P}G_i) = \{e\}$. По лемме 2.2.3 мы имеем, что $\mathrm{Aut}_{\widetilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ является картеровой подгруппой группы $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$. Поскольку $\mathbf{P}G_1$ является конечной группой лиева типа, и $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.4.1, по индукции мы получаем, что $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Аналогично мы имеем, что $\mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** для всех i. Поскольку

$$\mathrm{Aut}_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_i) \geq \mathrm{Aut}_{\widetilde{G}}(\mathbf{P}G_i),$$

леммы 5.3.1 и 5.3.3 влекут, что $\mathrm{Aut}_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $C_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1 \times \ldots \times \mathbf{P}G_m) = \{e\}$, лемма 2.4.5 с нормальными подгруппами

$$C_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1) \cap N_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1), \ldots, C_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_m) \cap N_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1)$$

влечёт, что $N_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Далее,

$$|\langle K,C\rangle/Z(C) : N_{\langle K,C\rangle/Z(C)}(\mathbf{P}G_1)| = 2^t$$

и любой элемент нечётного порядка группы $\langle K,C\rangle/Z(C)$ нормализует $\mathbf{P}G_1$, таким образом, по лемме 2.4.6, мы получаем, что факторгруппа $\langle K,C\rangle/Z(C)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и по лемме 2.4.5 группа $\langle K,C\rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $|\mathbf{P}G_i| < \mathbf{Cmin}$ для всех i, то $\langle K,C\rangle$ удовлетворяет условию **(C)**. По лемме 2.4.3 мы получаем, что существует картерова подгруппа F группы $\langle K,C\rangle$, содержащая силовскую 2-подгруппу группы $\langle K,C\rangle$. По теореме 2.1.4 подгруппы F и K сопряжены в $\langle K,C\rangle$, таким образом, K содержит силовскую 2-подгруппу Q группы $\langle K,C\rangle$. Поскольку $|C_G(x) : C|$ является степенью двойки и $\langle K,C\rangle$ нормализует централизатор $C_G(x)$, мы получаем, что $|\langle K,C_G(x)\rangle : \langle K,C\rangle|$ есть степень двойки. Кроме того, по построению любой элемент нечётного порядка группы $\langle K,C_G(x)\rangle$ лежит в $\langle K,C\rangle$. Таким образом, по лемме 2.4.6 $\langle K,C_G(x)\rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и K содержит силовскую 2-подгруппу Q группы $\langle K,C_G(x)\rangle$.

Пусть Q_A — силовская 2-подгруппа группы $A = \langle G,\zeta g\rangle$, содержащая Q, и $t \in Z(Q_A)\cap G$. Тогда $t \in C_G(x)$, значит, $t \in Z(Q)$, поэтому $t \in Z(K)$. Таким образом, мы можем заменить x на t в предыдущих рассуждениях и получить, что $Q = Q_A$, т. е. K содержит силовскую 2-подгруппу группы $A = \langle G,\zeta g\rangle$, что завершает доказательство теоремы 6.4.1.

§7 Картеровы подгруппы конечных групп сопряжены

До формулировки основной теоремы, отметим следствие из теоремы 6.4.1.

Следствие 6.7.1. Cmin $= \infty$, *т. е.* $\mathcal{A} = \varnothing$.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{A} \neq \varnothing$ и группа $A \in \mathcal{A}$ такова, что выполнено равенство $|F^*(A)| = \mathbf{Cmin}$. Поскольку $F^*(A) = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ для некоторой присоединённой простой связной линейной алгебраической группы $\overline{G}$ и некоторого отображения Фробениуса σ, обозначим пересечение $A \cap \overline{G}_\sigma$ через G. Как мы отмечали в начале § 1 настоящей главы, можно считать, что $A = KF^*(A) = KG$. Следовательно, группа A либо удовлетворяет условиям теоремы 6.3.1, либо удовлетворяет условиям теоремы 6.4.1. В обоих случаях мы доказали, что картеровы подгруппы группы A сопряжены, что противоречит выбору группы A. □

Для того, чтобы сформулировать следующую теорему без использования

классификации конечных простых групп, мы дадим следующее определение. Говорят, что конечная группа является *K-группой*, если все её композиционные факторы являются известными простыми группами.

Теорема 6.7.2. *Пусть G — конечная K-группа. Тогда картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

Доказательство. По теоремам 3.3.5, 4.1.1, 6.2.3, 6.3.1 и 6.4.1 из настоящей работы, а также [23] мы получаем, что для любой известной простой группы S и любой нильпотентной подгруппы N из группы её автоморфизмов, картеровы подгруппы группы $\langle N, S\rangle$ сопряжены. Поэтому G удовлетворяет условию **(C)**. Значит, по теореме 2.1.4, картеровы подгруппы группы G сопряжены. $\square$

Из леммы 2.4.1 и основной теоремы 6.7.2 следует, что гомоморфный образ картеровой подгруппы является картеровой подгруппой.

Теорема 6.7.3. *Пусть G — конечная K-группа, H — картерова подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа группы G. Тогда HN/N является картеровой подгруппой группы G/N.*

Глава 7. Критерий существования

§1 Краткий обзор результатов главы

В данной главе мы получим критерий существования картеровых подгрупп в конечной группе в терминах её нормального ряда. Заметим, что существуют конечные группы без картеровых подгрупп, минимальным примером является группа Alt_5. Будет построен пример, показывающий, что существенное улучшение критерия невозможно. В конце главы мы, для удобства читателя приведём классификацию картеровых подгрупп в конечных почти простых группах, полученную в настоящей работе.

Напомним, что ввиду теоремы 6.7.2 в любой почти простой группе с известным простым цоколем картеровы подгруппы сопряжены. Таким образом, по модулю классификации конечных простых групп, в любой конечной группе картеровы подгруппы сопряжены. В настоящей главе под конечной группой мы всегда имеем ввиду конечную группу, удовлетворяющую **(C)**, таким образом, результаты главы не зависят от классификации конечных простых групп.

Определение 7.1.1. Пусть $G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_n = \{e\}$ — главный ряд группы G (напомним, что предполагается, что G удовлетворяет **(C)**). Тогда $G_i/G_{i+1} = T_{i,1} \times \ldots \times T_{i,k_i}$, где $T_{i,1} \simeq \ldots \simeq T_{i,k_i} \simeq T_i$ и T_i — простая группа. Если $i \geqslant 1$, то обозначим через $\overline{K}_i$ картерову подгруппу группы G/G_i (если она существует) и через K_i её полный прообраз в G/G_{i+1}. Если $i = 0$, то $\overline{K}_0 = \{e\}$ и $K_0 = G/G_1$ (отметим, что $\overline{K}_0$ всегда существует). Мы говорим, что конечная группа G удовлетворяет условию **(E)**, если для любых i, j, либо $\overline{K}_i$ не существует, либо $\mathrm{Aut}_{K_i}(T_{i,j})$ содержит картерову подгруппу.

Из теоремы 7.2.2 и из теоремы 6.7.3 следует, что если конечная группа удовлетворяет **(E)**, то для любого i подгруппа $\overline{K}_i$ существует, так что, на самом деле, первая часть условия **(E)** никогда не выполняется. Напомним, что по теореме 6.7.3 гомоморфный образ картеровой подгруппы является картеровой подгруппой. Мы будем постоянно использовать этот факт.

§2 Критерий

Далее нам потребуется знание дополнительной информации о строении картеровых подгрупп в группах специального вида. Пусть A' — группа с нормальной подгруппой T'. Рассмотрим прямое произведение $A_1 \times \ldots \times A_k$, где $A_1 \simeq \ldots \simeq A_k \simeq A'$ и его нормальную подгруппу $T = T_1 \times \ldots \times T_k$, где $T_1 \simeq \ldots \simeq T_k \simeq T'$. Рассмотрим симметрическую группу Sym_k, действующую на $A_1 \times \ldots \times A_k$ по правилу $A_i^s = A_{i^s}$ для всех $s \in S$ и определим X равным полупрямому произведению $(A_1 \times \ldots \times A_k) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_k$ (подстановочное сплетение групп A' и Sym_k). Обозначим через A прямое произведение $A_1 \times \ldots \times A_k$ и через π_i проекцию $\pi_i : A \to A_i$. Во введённых обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма 7.2.1. *Пусть G — такая подгруппа группы X, что $T \leq G$, $G/(G \cap T)$ нильпотентна и $(G \cap A)^{\pi_i} = A_i$. Предположим также, что A разрешима. Пусть K — картерова подгруппа группы G.*

Тогда $(K \cap A)^{\pi_i}$ является картеровой подгруппой группы A_i.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и пусть G — контрпример минимального порядка с минимальным k. Тогда $S = G/(G \cap A)$ транзитивна и примитивна. Действительно, если S не является транзитивной, то $S \leq \mathrm{Sym}_{k_1} \times \mathrm{Sym}_{k-k_1}$, значит, $G \leq G_1 \times G_2$. Если мы обозначим через $\psi_i : G \to G_i$ естественный гомоморфизм, то $G^{\psi_i} = G_i$ удовлетворяет условиям леммы и $K^{\psi_i} = K_i$ является картеровой подгруппой группы G_i. Очевидно, $(G \cap A)^{\pi_j} = (G_i \cap A^{\psi_i})^{\pi_j}$, где $i = 1$ если $j \in \{1, \ldots, k_1\}$ и $i = 2$ если $j \in \{k_1 + 1, \ldots, k\}$, т. е. следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} G \cap A \arrow[rr, "\pi_j"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & & A_j, \\ & G_1 \cap A^{\psi_1} \arrow[ur, "\pi_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \cap A \arrow[rr, "\pi_j"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & & A_j. \\ & G_2 \cap A^{\psi_2} \arrow[ur, "\pi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Таким образом, мы получаем утверждение по индукции. Если S транзитивна, но непримитивна, пусть

$$\Omega_1 = \{T_1, \ldots, T_m\}, \Omega_2 = \{T_{m+1}, \ldots, T_{2m}\}, \ldots, \Omega_l = \{T_{(l-1)m+1}, \ldots, T_{lm}\}$$

система импримитивности. Тогда она содержит нетривиальную нетранзитивную нормальную подгруппу

$$F' \leq \underbrace{\mathrm{Sym}_m \times \ldots \times \mathrm{Sym}_m}_{l \text{ раз}},$$

где $k = m \cdot l$. Рассмотрим полный прообраз F группы F' в X. Тогда $G \cap F \leq F_1 \times \ldots \times F_l$. Обозначим через $\psi_i : F \to F_i$ естественную проекцию, тогда $(G \cap F)^{\psi_i} = F_i$. Заметим, что все F_i удовлетворяют условиям леммы и, если мы определим $T'_i = T_{(i-1)m+1} \times \ldots \times T_{im}$, то G удовлетворяет условиям леммы с $T' = T'_1 \times \ldots \times T'_l$ и $A' = F$. По индукции мы имеем, что $(K \cap F)^{\psi_i}$ является картеровой подгруппой группы F_i и, если $j \in \{m \cdot (i-1)+1, \ldots m \cdot i\}$, то $\left((K \cap F)^{\psi_i} \cap A^{\psi_i}\right)^{\pi_j}$ является картеровой подгруппой группы A_j. Поскольку $(G \cap A)^{\pi_j} = \left((K \cap F)^{\psi_i} \cap A^{\psi_i}\right)^{\pi_j}$ (для подходящего i), мы получаем утверждение по индукции.

Пусть Y' — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в T (если Y' тривиальна, то T тривиальна и доказывать нечего, поскольку в этом случае G нильпотентна). Таким образом, Y' является нормальной элементарной абелевой p-группой. Пусть $Y_i = (Y')^{\pi_i}$, тогда $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_k$ — нетривиальная нормальная подгруппа группы G (Y является подгруппой группы G поскольку $T \leq G$). Пусть $\bar{\pi}_i : (G \cap A) \to A_i/Y_i = \overline{A}_i$ — проекция, соответствующая проекции π_i. Обозначим через $\overline{K} = KY/Y$ соответствующую картерову подгруппу группы $\overline{G} = G/Y$. Тогда $\overline{G}$ удовлетворяет условиям леммы. По индукции, $(\overline{K} \cap \overline{A})^{\bar{\pi}_i}$ является картеровой подгруппой группы $\overline{A}_i$. Пусть K_1 — полный прообраз группы $\overline{K}$ в G и пусть Q — холлова p'-подгруппа группы K_1. Тогда $(Q \cap A)^{\pi_i}$ является холловой p'-подгруппой группы $(K_1 \cap A)^{\pi_i}$. В виду доказательства [4, теорема 20.1.4], мы получаем, что $K = N_{K_1}(Q)$ является картеровой подгруппой группы G и $(N_{K_1 \cap A}(Q \cap A))^{\pi_i}$ является картеровой подгруппой группы A_i. Таким образом, нам нужно показать, что $(N_{K_1 \cap A}(Q \cap A))^{\pi_i} = (N_{K_1 \cap S}(Q))^{\pi_i}$. По индукции, равенство $(N_{\overline{K} \cap \overline{A}}(\overline{A} \cap \overline{Q}))^{\bar{\pi}_i} = (N_{\overline{K} \cap \overline{G}}(\overline{Q}))^{\bar{\pi}_i}$ выполнено. Таким образом, нам необходимо доказать, что $(N_Y(Q \cap A))^{\pi_i} = (N_Y(Q))^{\pi_i}$. Заметим также, что $(N_Y(Q \cap A))^{\pi_i} \leq N_{Y_i}((Q \cap A)^{\pi_i})$.

Поскольку S является транзитивной и примитивной подгруппой группы Sym_k, то $k = r$ является простым и $S = \langle s \rangle$ является циклической. Если $r = p$, то $Q \cap A = Q$ и доказывать нечего. В противном случае пусть h — r-элемент из K, порождающий S по модулю $K \cap A$. Очевидно $Q = (Q \cap A)\langle h \rangle$. Пусть $t \in Y_i$ — элемент группы $N_{Y_i}((Q \cap A)^{\pi_i})$. Тогда $(t \cdot t^h \cdot \ldots \cdot t^{h^{r-1}}) \in N_Y(Q)$ и $t^{\pi_i} = (t \cdot t^h \cdot \ldots \cdot t^{h^{r-1}})^{\pi_i}$, значит, $(N_Y(Q \cap A))^{\pi_i} \leq N_{Y_i}((Q \cap A)^{\pi_i}) \leq (N_Y(Q))^{\pi_i} \leq (N_Y(Q \cap A))^{\pi_i}$. $\square$

Теорема 7.2.2. *Пусть G — конечная группа. Тогда G содержит картерову подгруппу если и только если G удовлетворяет условию* **(E)**.

Доказательство. Докажем сначала часть «только тогда». Пусть H — ми-

нимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $H = T_1 \times \ldots \times T_k$, где $T_1 \simeq \ldots \simeq T_k \simeq T$ — простые группы.

Если H элементарная абелева (т. е., T циклическая простого порядка), то $\mathrm{Aut}(T)$ разрешима и содержит картерову подгруппу. Предположим, что T — неабелева простая группа. Очевидно, K является картеровой подгруппой группы KH. По лемме 2.2.3 мы получаем, что $\mathrm{Aut}_{KH}(T_i)$ содержит картерову подгруппу для всех i. Индукция по порядку группы завершает доказательство необходимости.

Теперь докажем часть «тогда». Вновь предположим противное, что G — контрпример минимального порядка, т. е., что G не содержит картерову подгруппу, но G удовлетворяет **(E)**. Пусть H — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $H = T_1 \times \ldots \times T_k$, где $T_1 \simeq \ldots \simeq T_k \simeq T$, и T — конечная простая группа.

По определению G/H удовлетворяет **(E)**, таким образом, по индукции, существует картерова подгруппа $\overline{K}$ группы $\overline{G} = G/H$. Пусть K — полный прообраз для $\overline{K}$, тогда K удовлетворяет условию **(E)**. Если $K \neq G$, то по индукции K содержит картерову подгруппу K'. Заметим, что K' является картеровой подгруппой группы G. Действительно, предположим, что $x \in N_G(K') \setminus K'$. Поскольку $K'H/H = \overline{K}$ является картеровой подгруппой группы $\overline{G}$, мы получаем, что $x \in K$. Но K' является картеровой подгруппой группы K, таким образом $x \in K'$. Значит, $G = K$, т. е. G/H нильпотентна.

Если H абелева, то G разрешима, следовательно, G содержит картерову подгруппу. Значит, предположим, что T — неабелева простая конечная группа. Покажем сначала, что $C_G(H)$ тривиален. Предположим, что $C_G(H) = M$ нетривиален. Поскольку T — неабелева простая группа, отсюда следует, что $M \cap H = \{e\}$, поэтому M нильпотентна. По лемме 2.1.2 мы получаем, что G/M удовлетворяет **(E)**. По индукции мы получаем, что G/M содержит картерову подгруппу $\overline{K}$. Пусть K' — полный прообраз группы $\overline{K}$ в G. Тогда K' разрешима, следовательно, содержит картерову подгруппу K. Как и раньше мы получаем, что K является картеровой подгруппой группы G, противоречие. Значит, $C_G(H) = \{e\}$.

Поскольку H является минимальной нормальной подгруппой группы G, мы получаем, что $\mathrm{Aut}_G(T_1) \simeq \mathrm{Aut}_G(T_2) \simeq \ldots \simeq \mathrm{Aut}_G(T_k)$. Таким образом, существует мономорфизм

$$\varphi : G \to (\mathrm{Aut}_G(T_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}_G(T_k)) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_k = G_1$$

и мы отождествляем G с G^φ. Обозначим через K_i картерову подгруппу группы $\mathrm{Aut}_G(T_i)$ и через A подгруппу $\mathrm{Aut}_G(T_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}_G(T_k)$. Поскольку

G/H нильпотентна, то $K_iT_i = \mathrm{Aut}_G(T_i)$ и $G_1 = (K_1T_1 \times \ldots \times K_kT_k) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_k$. Пусть $\pi_i : G \cap A \to (G \cap A)/C_{(G\cap A)}(T_i)$ — канонические проекции. Поскольку $G/(G \cap A)$ транзитивна, мы получаем, что $(G \cap A)^{\pi_i} = K_iT_i$.

Поскольку $\mathrm{Aut}_{G\cap A}(T_i) = K_iT_i$, то $G \cap A$ удовлетворяет **(E)**. По индукции она содержит картерову подгруппу M. По лемме 2.2.3 мы получаем, что M^{π_i} является картеровой подгруппой группы K_iT_i, следовательно, мы можем предполагать $M^{\pi_i} = K_i$. В частности, если $R = (K_1 \cap T_1) \times \ldots \times (K_k \cap T_k)$, то $M \leq N_G(R)$. В виду теорем 2.1.4 и 6.7.2, картеровы подгруппы в любой конечной группе сопряжены. Поскольку $(G \cap A)/H$ нильпотентна, мы получаем, что $G \cap A = MH$, значит, $G = N_G(M)H$. Более того, $N_G(M) \cap A = M$, значит $N_G(M)$ разрешима. Поскольку M нормализует R, и $M^{\pi_i} = K_i$, мы получаем, что $N_G(M)$ нормализует R, значит, $N_G(M)R$ разрешима. Следовательно, она содержит картерову подгруппу K. По лемме 7.2.1, $(K \cap A)^{\pi_i}$ есть картерова подгруппа группы $(N_G(M)R \cap A)^{\pi_i}$ (R играет роль подгруппы T из леммы 7.2.1 в этом случае), поэтому $(K \cap A)^{\pi_i} = K_i$. Предположим, что $x \in N_G(K) \setminus K$. Поскольку $G/H = N_G(M)H/H = KH/H$, отсюда следует, что $x \in H$. Следовательно, $x^{\pi_i} \in (N_G(K) \cap A)^{\pi_i} \leq N_{T_i}((K \cap A)^{\pi_i}) = K_i$. Поскольку $\bigcap_i \mathrm{Ker}(\pi_i) = \{e\}$, отсюда следует, что $x \in R \leq N_G(M)R$. Но K есть картерова подгруппа группы $N_G(M)R$, значит, $x \in K$. Это противоречие завершает доказательство. □

§3 Пример

В данном параграфе мы построим пример, показывающий, что мы не можем заменить условие **(E)** более слабым условием: для каждого композиционного фактора S группы G, $\mathrm{Aut}_G(S)$ содержит картерову подгруппу. Этот пример показывает также, что расширение группы, содержащей картерову подгруппу, с помощью группы, содержащей картерову подгруппу, может не содержать картерову подгруппу.

Рассмотрим $L = \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3) \leftthreetimes \langle \varphi \rangle$, где φ — полевой автоморфизм группы $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3)$. Пусть $X = (L_1 \times L_2) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_2$, где $L_1 \simeq L_2 \simeq L$ и если $\sigma = (1,2) \in \mathrm{Sym}_2 \setminus \{e\}$, $(x,y) \in L_1 \times L_2$, то $\sigma(x,y)\sigma = (y,x)$ (подстановочное сплетение группы L и Sym_2). Обозначим через $H = \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3) \times \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3)$ минимальную нормальную подгруппу группы X и через $M = L_1 \times L_2$. Пусть $G = (H \leftthreetimes \langle (\varphi, \varphi^{-1}) \rangle) \leftthreetimes \mathrm{Sym}_2$ — подгруппа группы X. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для любого композиционного фактора S группы G, $\mathrm{Aut}_G(S)$ содержит

картерову подгруппу.

2. $G \cap M \trianglelefteq G$ содержит картерову подгруппу.

3. $G/(G \cap L)$ нильпотентна.

4. G не содержит картерову подгруппу.

1. Очевидно, нам нужно проверить утверждение лишь для неабелевых композиционных факторов. Любой неабелев композиционный фактор S группы G изоморфен $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3)$ и $\mathrm{Aut}_G(S) = L$. По теореме 6.4.1, L содержит картерову подгруппу (совпадающую с силовской 3-подгруппой).

2. Поскольку $(G \cap M)/H$ нильпотентна и из предыдущего утверждения, мы получаем, что $G \cap M$ удовлетворяет **(E)**, поэтому содержит картерову подгруппу (легко убедиться, что силовская 3-подгруппа группы $G \cap M$ является картеровой подгруппой группы $G \cap M$).

3. Очевидно.

4. Предположим, что K является картеровой подгруппой группы G. Тогда KH/H является картеровой подгруппой группы G/H. Но G/H есть неабелева группа порядка 6, значит, $G/H \simeq \mathrm{Sym}_3$ и KH/H есть силовская 2-подгруппа группы G/H. По лемме 2.1.2 $\mathrm{Aut}_K(\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3))$ является картеровой подгруппой группы $\mathrm{Aut}_{KH}(\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3)) = \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3)$. Но $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(3^3)$ не содержит картеровых подгрупп ввиду теоремы 6.4.1.

§4 Классификация картеровых подгрупп

Ввиду условия **(E)** и теоремы 7.2.2, изучение картеровых подгрупп в конечных группах сводится к классификации картеровых подгрупп в почти простых группах A, удовлетворяющих дополнительному условию $A/F^*(A)$ нильпотентна. Классификация картеровых подгрупп в группах, удовлетворяющих такому условию получена в предыдущих главах и мы приведем её здесь в форме, удобной для использования.

Докажем сначала следующую теорему, которая показывает, что если для некоторой подгруппы S группы $\mathrm{Aut}(G)$ существует картерова подгруппа, то она существует и в любой бо́льшей группе $S \leq A \leq \mathrm{Aut}(G)$ (здесь G — известная конечная простая группа).

Теорема 7.4.1. *Пусть G — конечная простая группа и $G \leq A \leq \mathrm{Aut}(G)$ — почти простая группа с простым цоколем G. Предположим, что A содержит такую подгруппу S, что $G \leq S$ и S содержит картерову подгруппу.*

Тогда A содержит картерову подгруппу.

Доказательство. Пусть K — картерова подгруппа группы S. Очевидно, можно считать, что $S = KG$.

Предположим, что либо $G \simeq \mathrm{Alt}_n$ для некоторого $n \geqslant 5$, либо G является спорадической. Поскольку по лемме 3.2.14 любой элемент нечётного простого порядка группы G сопряжён со своей нетривиальной степенью, и поскольку $|\mathrm{Aut}(G) : G|$ является степенью двойки, леммы 2.4.2 и 2.4.6 влекут, что если некоторая $G \leq S \leq \mathrm{Aut}(G)$ содержит картерову подгруппу K, то K совпадает с силовской 2-подгруппой группы S. Так как $|A : S|$ является степенью двойки, утверждение теоремы в этом случае следует из леммы 2.4.6.

Предположим, что $G = {}^3D_4(q^3)$. По [42, теорема 1.2(vi)] каждый элемент группы G сопряжён со своим обратным. Если q нечётно, то лемма 5.2.5 влечёт что K является силовской 2-подгруппой группы S. Поэтому из лемм 2.4.6 и 5.2.5 следует, что A удовлетворяет условию **(ESyl2)**, т. е. содержит картерову подгруппу. Если $q = 2^t$ чётно, то из теорем 6.3.1 и 6.4.1 следует, что $S = \mathrm{Aut}(G)$ и доказывать нечего.

Предположим, что G является группой лиева типа, $G \not\simeq {}^3D_4(q^3)$ и, если $G \simeq D_4(q)$, то $S \leq A_1$, где $A_1 \leq \mathrm{Aut}(D_4(q))$ определена в теореме 6.3.1. Тогда группа S удовлетворяет одному из утверждений (а)–(г) теоремы 6.4.1. Рассмотрим все эти случаи по отдельности.

Предположим, что S удовлетворяет утверждению (а). В этом случае справедливо $|\mathrm{Aut}(G) : S| \leqslant 2$ и поэтому для любой такой группы A, что $S \leq A \leq \mathrm{Aut}(G)$ либо $A = S$, либо $A = \mathrm{Aut}(G)$. В любом случае A удовлетворяет утверждению (а) теоремы 6.4.1 и содержит картерову подгруппу.

Предположим, что S удовлетворяет утверждению (б). Тогда $|\mathrm{Aut}(G) : S| = 2$ и либо $A = S$, либо $A = \mathrm{Aut}(G)$. В первом случае доказывать нечего. Во втором случае группа $\widehat{G} = \mathbf{P}GL_2(3^t)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**, значит, по лемме 5.3.3 группа A также удовлетворяет условию **(ESyl2)** и по лемме 2.4.3 содержит картерову подгруппу.

Предположим, что S удовлетворяет утверждению (в) теоремы 6.4.1. Тогда $S = \mathrm{Aut}(G)$ и доказывать нечего.

Предположим, что S удовлетворяет условию (г) теоремы 6.4.1. По лемме 5.3.1 группа $S \cap \widehat{G}$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. По лемме 5.3.3 любая подгруппа A группы $\mathrm{Aut}G$, содержащая $S \cap \widehat{G}$ также удовлетворяет условию **(ESyl2)**, значит, по лемме 2.4.3 содержит картерову подгруппу.

Предположим теперь, что $G = D_4(q)$ и S удовлетворяет теореме 6.3.1. Поскольку графовые автоморфизмы порядка 2 и 3 не коммутируют, лишь один из них может содержаться в нильпотентной подгруппе. Таким образом, мы

можем предполагать, что лишь один из них содержится в A. Тогда любая подгруппа A, содержащая S, либо удовлетворяет теореме 6.3.1, либо удовлетворяет теореме 6.4.1, условию (а), если q чётно и условию (г), если q нечётно, т. е. содержит картерову подгруппу. □

Заметим, что из теоремы 7.4.1 и из [5] вытекает следующее интересное следствие.

Лемма 7.4.2. *Пусть S — известная конечная простая группа, $S \not\simeq J_1$ и $G = \mathrm{Aut}(S)$. Тогда группа G содержит картерову подгруппу.*

Доказательство. Ввиду [5, теоремы 2 и 3] если S не является группой лиева типа и отлична от J_1, то группа её автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S)$ удовлетворяет **(ESyl2)** и, по лемме 2.4.3, содержит картерову подгруппу. Далее, если S — группа лиева типа в чётной характеристике, то $\mathrm{Aut}(S)$ содержит картерову подгруппу ввиду теоремы 6.4.1(а). Если S — группа лиева типа в нечётной характеристике и $S \not\simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$, то $\widehat{S}$ удовлетворяет **(ESyl2)**, следовательно, содержит картерову подгруппу по лемме 2.4.3. По теореме 7.4.1 группа $\mathrm{Aut}(S)$ содержит картерову подгруппу. Наконец, если $S \simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$, то $\mathrm{Aut}(S)$ содержит картерову подгруппу ввиду теоремы 6.4.1(в). □

Таблицы, приведённые ниже, устроены следующим образом. В первом столбце указана простая группа S, в группе автоморфизмов которой классифицируются картеровы подгруппы. Во втором столбце приведены условия на подгруппу A её группы автоморфизмов, при которых A содержит картерову подгруппу. В третьем столбце приведено строение картеровой подгруппы K. Для всех подгрупп, группы $\mathrm{Aut}(S)$, несодержащих A, картеровы подгруппы не существуют. Через $P_r(G)$ обозначена силовская r-подгруппа группы G. Через φ обозначен полевой автоморфизм группы лиева типа S, через τ — графовый автоморфизм группы лиева типа S, содержащийся в K (поскольку графовые автоморфизмы порядка 2 и 3 группы $D_4(q)$ не коммутируют, лишь один из них может содержаться в K). Если A не содержит графовых автоморфизмов, то мы полагаем $\tau = e$. Через ψ обозначен полевой автоморфизм группы S максимального порядка, содержащийся в A (он является степенью φ, но $\langle\psi\rangle$ может не совпадать с $\langle\varphi\rangle$). Через $K(U_3(2))$ обозначена картерова подгруппа группы $\widehat{{}^2A_2(2^2)}$ порядка $2\cdot 3$. Если G — разрешимая группа, то через $K(G)$ обозначена картерова подгруппа группы G. В таблице 7.4.5 через ζ обозначен графово-полевой автоморфизм группы $A_2(2^{2t})$ порядка $2t$.

Таблица 7.4.3. Группы автоморфизмов знакопеременных групп, содержащие картеровы подгруппы.

Группа S	Условия на A	Строение K
Alt_5	$A = \mathrm{Sym}_5$	$K = P_2(\mathrm{Sym}_5)$
Alt_n, $n \geqslant 6$	никаких	$K = P_2(S)$

Таблица 7.4.4. Группы автоморфизмов спорадических групп, содержащие картеровы подгруппы.

Группа S	Условия на A	Строение K
J_2, J_3, Suz, HN	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = P_2(A)$
$\not\simeq J_1, J_2, J_3, Suz, HN$	никаких	$K = P_2(A)$

Таблица 7.4.5. Группы автоморфизмов классических групп, содержащие картеровы подгруппы.

Группа S	Условия на A	Строение K
$A_1(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$	никаких	$K = N_A(P_2(S))$
$A_1(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$	$\widehat{S} \leq A$	$K = N_A(P_2(\widehat{S}))$
$A_n(2^t)$, $t \geqslant 2$, если $n = 1$	$\varphi g \in A$, $g \in \widehat{S}$	$K = \langle \varphi, \tau \rangle \leftthreetimes S_{\varphi_{2'}}$
$A_2(2^{2t})$, $3 \nmid t$	$\langle\, S, \zeta g \,\rangle \leq A \leq S \leftthreetimes \langle\, \zeta \,\rangle$, $C_{A\cap\widehat{S}}(\varphi_{2'}) \simeq \mathbf{P}\mathrm{GU}_3(2)$	$K = \langle \zeta g \rangle \times K(\mathbf{P}\mathrm{GU}_3(2))$
$A_n(q)$, q нечётно, $n \geqslant 2$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
${}^2A_2(2^{2t})$, t нечётно, $3 \nmid t$	$\langle S, \varphi_{2'} g \rangle \leq A \leq \widehat{S} \leftthreetimes \langle \varphi_{2'} \rangle$ $C_{A\cap\widehat{S}}(\varphi_{2'}) \simeq \mathbf{P}\mathrm{GU}_3(2)$ $C_{A\cap\widehat{S}}(\varphi_{2'}) \simeq \mathbf{P}\mathrm{SU}_3(2)$	$K = \langle \varphi_{2'} \rangle \times K(\mathbf{P}\mathrm{GU}_3(2))$ $K = \langle \varphi_{2'} \rangle \times P_2(\mathbf{P}\mathrm{SU}_3(2))$
${}^2A_2(2^{2t})$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle \varphi \rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$
${}^2A_n(q^2)$, q нечётно	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
${}^2A_n(2^{2t})$, $n \geqslant 3$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle \varphi \rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$
$B_2(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$B_2(2^t)$, $t \geqslant 2$	$\varphi \in A$	$K = \langle \varphi, \tau \rangle \leftthreetimes P_2((S_\tau)_\varphi)$
$B_2(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$	$\widehat{S} \leq A$	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$B_n(q)$, q нечётно, $n \geqslant 3$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$C_n(q)$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$C_n(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$	$\widehat{S} \leq A$	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$C_n(2^t)$, $n \geqslant 3$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle \varphi \rangle \times P_2(S_{\varphi_{2'}})$
$D_4(q)$, q нечётно	никаких	если $\lvert\tau\rvert \leqslant 2$, то $K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$; если $\lvert\tau\rvert = 3$, то $K = \langle \tau, \psi \rangle \leftthreetimes P_2(S_\tau)$
$D_4(2^t)$	$\varphi \in A$	если $\lvert\tau\rvert \leqslant 2$, то $K = \langle \tau, \varphi \rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$; если $\lvert\tau\rvert = 3$, то $K = \langle \tau, \varphi \rangle \leftthreetimes P_2((S_\tau)_{\varphi_{2'}})$
$D_n(q)$, q нечётно, $n \geqslant 5$	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
$D_n(2^t)$, $n \geqslant 5$	$\varphi \in A$	$K = \langle \tau, \varphi \rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$

${}^2D_n(q^2)$, q нечётно	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
${}^2D_n(2^{2t})$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle\varphi\rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$

Таблица 7.4.6. Группы автоморфизмов исключительных групп лиева типа, содержащие картеровы подгруппы.

Группа S	Условия на A	Строение K
${}^2B_2(2^{2n+1})$, $n \geqslant 1$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle\varphi\rangle \times P_2({}^2B_2(2))$
$({}^2F_4(2))'$	никаких	$K = P_2(A)$
${}^2F_4(2^{2n+1})$, $n \geqslant 1$	$A = \mathrm{Aut}(S)$	$K = \langle\varphi\rangle \times P_2({}^2F_4(2))$
${}^2G_3(3^{2n+1})$	$A = \mathrm{Aut}(G)$	$\langle\varphi\rangle \leftthreetimes (2 \times P)$, где $\lvert P\rvert = 3^{\lvert\varphi\rvert_3}$
остальные, q нечётно	никаких	$K = P_2(A) \times K(O(N_A(P_2(A))))$
остальные, $q = 2^t$	$\varphi g \in A$, $g \in \widehat{S}$	$\langle\tau, \varphi\rangle \leftthreetimes P_2(S_{\varphi_{2'}})$

Указатель терминов

Предметный указатель

Литература

[1] А. Борель, Р. Картер, К. В. Кэртис, Н. Ивахори, Т. А. Спрингер, Р. Стейнберг, *Семинар по алгебраическим группам*, Москва, «Мир», 1973.

[2] Н. А. Вавилов, Нильпотентные самонормализуемые подгруппы общих линейных групп над конечным полем, *ЛОМИ*, **86**, (1979), 34–39.

[3] Е. Б. Дынкин, Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли, *Математический сборник*, **30**, № 2 (1952), 349–462.

[4] М. И. Каргополов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Москва, «Наука», Физматлит, 1996.

[5] А. С. Кондратьев, Нормализаторы силовских 2-подгрупп конечных простых групп, *Мат. заметки*, **78**, № 3 (2005), 368–376.

[6] А. С. Кондратьев, В. Д. Мазуров, 2-сигнализаторы конечных простых групп, *Алгебра и логика*, **42**, № 5 (2003), 594–623.

[7] В. М. Левчук, Я. Н. Нужин, О строении групп Ри, *Алгебра и логика*, **24**, № 1 (1985), 26–41.

[8] Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Москва, «Наука», 1980.

[9] A. Borel and J. de Siebental, Les-sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, *Comment. Math. Helv.*, **23**, (1949), 200–221.

[10] R. W. Carter, Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups, *Math. Z.*, **75**, (1961), 136–139.

[11] R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, John Wiley and Sons, 1972.

[12] R. W. Carter, Conjugacy classes in the Weyl group, *Compositio Mathematica*, **25**, № 1 (1972), 1–59.

[13] R. W. Carter, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, *Proc. London Math. Soc.* (3), **37**, № 3 (1978), 491–507.

[14] R. W. Carter, Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups, *Proc. London Math. Soc.* (3), **42**, № 1 (1981), 1–41.

[15] R. W. Carter, *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, John Wiley and Sons, 1985.

[16] R. W. Carter, P. Fong, The Sylow 2−subgroups of the finite classical groups, *J. Algebra*, **1**, (1964), 139–151.

[17] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford (1985).

[18] A. D'aniello, Sull' esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in alcuni gruppi semplici, II, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **74**, (1983), 1–6.

[19] F. Dalla Volta, A. Lucchini, and M. C. Tamburini, On the conjugacy problem for Carter subgroups, *Comm. Algebra*, **26**, № 2 (1998), 395–401.

[20] D. Deriziotis, *Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type*, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematic der Universität Essen, **11** 1984.

[21] J. Dieudonné, *La Géométrie des groupes classiques*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin-Goettingen-Heidelberg, 1963.

[22] L. Di Martino and M. C. Tamburini, I sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti di S_n e di A_n, *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **110**, (1976), 235–241.

[23] L. Di Martino and M. C. Tamburini, Carter subgroups of projective linear groups, *Boll. Un. Mat. Ital. B*, **7**, (1987), 905–915.

[24] L. Di Martino, M. C. Tamburini and A. E. Zalesskii, Carter subgroups in classical groups, *J. London Math. Soc.* (2), **55**, (1997), 264–276.

[25] H. Enomoto, The conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of characteristic 2 or 3, *Journal of the Faculty of Science University of Tokio, section I*, **16**, № 3 (1970), 497–512.

[26] W. Feit, J. Thompson, Solvability of groups of odd order, *Pacif. J. Math.*, **13**, № 3 (1963), 775–1029.

[27] W. Feit and G. Zukerman, Reality properties of conjugacy classes in spin groups and symplectic groups, *Algebraists' homage:papers in ring theory and related topics*, New Haven, 1981, 239–253.

[28] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple K-groups.* Mathematical Surveys and Monographs, **40**, № 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[29] D. Gorenstein, R. Lyons, *The local structure of finite groups of characteristic* 2 *type*, Mem. AMS, **42**, (1983), ISSN 0065-9266.

[30] B. Hartley, G. Shute, Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type, *Quart.J.Math.Oxford Ser. (2)*, **35**, № 137 (1984), 49–71.

[31] J. E. Humphreys, *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Mathematical Survey and Monographs, **43**, 1995.

[32] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Springer, Berlin, 1967.

[33] P. Kleidman, M. Liebeck, *The subgroup structure of the finite classical groups*, London mathematical Society Lecture Note Series, **129**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[34] F. Menegazzo, M. C. Tamburini, A property of the normalizers of Sylow p-subgroups in simple groups, *Quad.Sem.Mat.Brescia*, 45/02 (2002).

[35] K. Mizuno, The conjugate classes of Chevalley groups of type E_6, *Journal of the Faculty of Science University of Tokio, section IA* **24**, № 3 (1977), 525–565.

[36] R. Pierce, *Associative algebras*, Graduate texts in mathematics, **88**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[37] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer, 1996.

[38] T. Shoji, The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic $p \neq 2$, *Journal of the Faculty of Science University of Tokio, section IA* **21**, № 1 (1974), 1–19.

[39] G. M. Seitz, Unipotent elements, tilting modules, and saturation, *Inv. Math*, **141**, № 3 (2000), 467–502.

[40] R. Steinberg, Automorphisms of finite linear groups, *Canad. J. Math.*, **12**, № 4 (1960), 606–615.

[41] R. Steinberg, *Endomorphisms of algebraic groups*, Mem.AMS, **80**, 1968.

[42] P. H. Tiep, A. E. Zalesski, Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type, *J. Group Theory*, **8**, № 3 (2005), 291–315.

[43] A. O. Wagner, On the classification of classical groups, *Math.Z.*, **97**, (1967), 66–76.

[44] H. N. Ward, On Ree's series of simple groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121**, № 1 (1966), 62–80.

[45] M. J. Wonenburger, Transformations which are products of involutions, *J. Math. Mech.*, **16**, № 1 (1966), 32–38.

Работы автора по теме диссертации.

[46] M. C. Tamburini, E. P. Vdovin, Carter subgroups of finite groups, *J. Algebra*, **255**, № 1 (2002), 148–163.

[47] A. Previtali, M. C. Tamburini, E. P. Vdovin, The Carter subgroups of some classical groups, *Bull. London Math. Soc.*, **36**, № 1 (2004), 145–155.

[48] Е. П. Вдовин, О проблеме сопряжённости картеровых подгрупп, *СМЖ*, **47**, № 4 (2006), 725–730.

[49] Е. П. Вдовин, Картеровы подгруппы почти простых групп, *Алгебра и логика*, **46**, № 2 (2007) , 157–216.

[50] Е. П. Вдовин, О существовании картеровых подгрупп, *Труды ИММ УрО РАН*, **13**, № 1 (2007), 79–88.

[51] Е. П. Вдовин, Картеровы подгруппы конечных групп, *Доклады РАН*, **415**, № 3 (2007), 300–303.