**Министерство науки, высшей школы
и технической политики Российской Федерации**

Институт Математики СО РАН им. С. Л. Соболева

На правах рукописи

УДК 512.542

Вдовин Евгений Петрович[1]

АБЕЛЕВЫ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОДГРУППЫ МАКСИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

**(01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел)**

Д и с с е р т а ц и я
**на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук**

**Научный руководитель — доктор физико-
математических наук, профессор В. Д. Мазуров**

Новосибирск 2000

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦП "Интеграция проект 274; РФФИ, грант 99–01–00550; СО РАН, грант для коллективов молодых ученых, постановление Президиума N 83 от 10.03.2000.

Оглавление

Глава 1

Введение

§1 Общая характеристика основных результатов работы

После объявления о завершении классификации конечных простых групп в 1980 году одной из основных задач в теории конечных групп стала задача изучения различных свойств известных конечных простых групп. В частности, важную роль приобретает задача изучения подгруппового строения известных конечных простых групп. Особый интерес исследователей вызывают максимальные, максимальные разрешимые, максимальные нильпотентные и максимальные абелевы подгруппы. Изучению абелевых и нильпотентных подгрупп максимального порядка конечных простых групп посвящена настоящая работа.

Основной пласт известных конечных простых групп составляют конечные простые группы лиева типа. Группы лиева типа условно делятся на 16 классов. Шесть классов составляют, так называемые, классические группы, и десять — исключительные. Поскольку именно в группах лиева типа изучение подгруппового строения представляет наибольшую сложность, бо́льшая часть диссертации посвящена изучению конечных групп лиева типа. Из-за тесной связи между конечными группами лиева типа и связными простыми алгебраическими группами, определенными над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики, в данной работе получены некоторые вспомогательные результаты о подгрупповом строении линейных алгебраических групп.

Строение и порядки различных подгрупп специального вида конечных групп лиева типа интенсивно изучались рядом различных авторов. Строение силовских p-подгрупп в том случае, когда p совпадает с характеристикой поля определения получено первооткрывателем конечных групп лиева типа — Шевалле. В его честь конечные группы лиева типа часто также называют конечными группами Шевалле. Далее, Картер, Фонг, Вейр и Уонг в работах [23], [45] и [50] нашли строение силовских r-подгрупп в том случае, когда характеристика поля определения отлична от r. В 60-х годах рядом различных авторов были найдены строение и порядки максимальных торов в конечных группах Шевалле. В 1972 Картер в своей работе [21] предложил простой универсальный способ нахождения порядков максимальных торов во всех конечных группах Шевалле нескрученного типа в терминах диаграммы Дынкина и допустимых диаграмм. В конце 60-х и начале 70-х годов рядом авторов предпринимались попытки изучить строение абелевых унипотентных подгрупп максимального порядка в конечных классических группах. В период с 1979 по 1982 год вышли работы Барри и Уонга [13], [14], [48] и [49], в которых были найдены p-ранги, подгруппы Томпсона и абелевы подгруппы максимального порядка в максимальных унипотентных подгруппах конечных классических групп. Аналогичный вопрос для исключительных групп долгое время оставался нерешенным, его, в частности, отметил А. С. Кондратьев в своей обзорной работе [6].

В работе завершено изучение абелевых и нильпотентных подгрупп максимального порядка в конечных простых группах. Кроме того, удобно вместе с конечными простыми группами изучать и конечные группы, близкие к простым: симметрические группы и конечные группы лиева типа (не обязательно простые). Поэтому найдены абелевы и нильпотентные подгруппы максимального порядка и в этих группах. Для того, чтобы завершить изучение абелевых подгрупп максимального порядка, получены абелевы унипотентные подгруппы максимального порядка, p-ранги и подгруппы Томпсона максимальных унипотентных подгрупп конечных групп Шевалле, при этом решена отмеченная выше проблема, поставленная А. С. Кондратьевым. После этого доказано, что абелева подгруппа максимального порядка в простой конечной группе лиева типа совпадает либо с некоторым максимальным тором, либо с унипотентной абелевой подгруппой максимального порядка. В симметрических и знакопеременных группах мы непосредственными вычислениями указываем абелевы подгруппы максимального порядка. При изучении спорадических групп, в основном используется «Атлас конечных групп» [25]. Таким образом, в настоящей работе найдены порядки, строение и количество различных несопряженных абелевых подгрупп максимального порядка во всех конечных простых группах, за исключением нескольких спорадических групп большого порядка. В качестве следствия из этого описания получена следующая теорема, дающая оценку порядка абелевых подгрупп в конечных простых группах.

Теорема 1.1.1. *Пусть G — неабелева конечная простая группа, отличная от $L_2(q)$ и A — ее абелева подгруппа. Тогда $|A|^3 < |G|$.*

В качестве следствия получено решение вопроса 4.27 из «Коуровской тетради» [10]. Ранее решение этого вопроса было анонсировано в работе [2]. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1.2. *Неабелева конечная простая группа G представима в виде произведения ABA ее абелевых подгрупп A и B тогда и только тогда, когда $G \cong L_2(2^t)$ для некоторого $t \geqslant 2$, причем $|A| = 2^t + 1$, $|B| = 2^t$ и A является циклической группой, а B — элементарной 2-группой.*

При изучении нильпотентных групп доказано, что в большинстве случаев нильпотентная подгруппа максимального порядка совпадает с некоторой силовской подгруппой данной конечной простой группы. Также доказано, что нильпотентная подгруппа максимального порядка единственна с точностью до сопряжения и получена следующая оценка порядка нильпотентных подгрупп в конечных простых группах, которая обобщает результат В. И. Зенкова и В. Д. Мазурова [4].

Теорема 1.1.3. *Пусть G — неабелева конечная простая группа, N — ее нильпотентная подгруппа. Тогда $|N|^2 < |G|$.*

Отметим, что разрешимые подгруппы максимального порядка конечных простых групп (за исключением спорадических) найдены в работах Манна [38] и Сегева [41].

Пусть Ψ — некоторое свойство, которое наследуется всеми подгруппами Ψ-группы G (например абелевость, нильпотентность, разрешимость и т. д.). Мы обращаемся к вопросу о том, насколько велика может быть нормальная Ψ-подгруппа группы G. Более точно,

Вопрос. Если конечная группа G содержит Ψ-подгруппу индекса n, то верно ли, что G содержит нормальную Ψ-подгруппу индекс которой ограничен некоторой функцией $f(n)$.

Ясно, что для любого свойства Ψ, которое наследуется всеми подгруппами, в качестве функции $f(n)$ достаточно взять $n!$. Поэтому обычно требуют, чтобы функция $f(n)$ была полиномиальна. В работе получено решение этого вопроса (с $f(n) = n^9$) в том случае, когда свойство Ψ — нильпотентность. Отметим, что в том случае, когда свойство Ψ – разрешимость или цикличность, положительный ответ на поставленный выше вопрос дан в работе Бабаи, Гудмана и Пыбера [12]. Там же ими поставлен данный вопрос для случая, когда свойство Ψ — абелевость или нильпотентность. В том случае, когда свойство Ψ — абелевость, положительный ответ (с функцией $f(n) = n^2$) получен в неопубликованной работе Музычука.

Поскольку результаты Бабаи, Гудмана и Пыбера позволяют свести изучение вопроса к разрешимым группам, доказана следующая теорема, из которой в качестве следствия вытекает ответ на вопрос в общем случае.

Теорема 1.1.4. *Пусть G — конечная разрешимая группа, которая содержит нильпотентную подгруппу индекса n. Тогда $|G : F(G)| < n^5$.*

Работа разбита на шесть глав (включая введение). Во введении введены основные определения и известные вспомогательные результаты, которые используются далее на протяжении всей работы.

Во второй главе найдены абелевы подгруппы максимального порядка в симметрических, знакопеременных, спорадических группах, а также в максимальных унипотентных подгруппах конечных исключительных групп Шевалле. В максимальных унипотентных подгруппах конечных групп Шевалле также найдены p-ранги и подгруппы Томпсона. Для удобства читателя результаты данной главы собраны в таблицах 2.1, 2.4 и 2.5. Результаты данной главы неоднократно докладывались на семинарах «Теория групп» и « Алгебра и логика» Новосибирского Государственного Университета. Они также докладывались на МНСК (см. текст тезисов [51], [54]), на региональной конференции в Красноярске (см. [53]), на Международной алгебраической конференции памяти Д. К. Фаддеева, проходившей в Санкт-Петербурге (см. [52]), на международной алгебраической конференции «Groups and Groups Rings», проходившей в Польше (см. [57]) и на международной алгебраической конференции памяти Ю. И. Мерзлякова, проходившей в Новосибирске (см. [58]). Результаты данной главы опубликованы в работах [59] и [63]. Отметим, что Барри и Уонг в своих работах [13], [14], [48] и [49] для нахождения абелевых унипотентных подгрупп максимального порядка в классических группах использовали канонические линейные представления этих групп. Теоремы 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.4 дают простой и понятный способ для нахождения несопряженных унипотентных абелевых подгрупп максимального порядка во всех конечных нескрученных группах лиева типа. Более того, эти результаты легко переносятся на простые линейные алгебраические группы, определенные над полем произвольной характеристики. Из этих теорем, в частности, легко следуют упомянутые выше результаты Барри и Уонга для классических нескрученных групп. Для нахождения максимальных абелевых относительно p подмножеств в корневых системах исключительного типа была написана программа на языке TurboPascal. Для проверки корректности работы этой программы приведен полный список абелевых относительно p подмножеств в корневых системах G_2, D_4 и F_4.

В третьей главе доказано, что порядок произвольной абелевой подгруппы в конечной группе лиева типа не превосходит порядка некоторой полупростой или некоторой унипотентной абелевой подгруппы. В частности, найдены абелевы подгруппы максимального порядка во всех конечных группах Шевалле (а не только в простых). Порядки абелевых подгрупп конечных групп Шевалле, полученные в этой главе, объединены в таблице 3.2. Результаты данной главы докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» Новосибирского Государственного Университета. Они также докладывались на МНСК (см. [54]), на конференции памяти А. Г. Куроша, проходившей в Москве, на конференции «Groups and Groups Rings» в Польше (см. [57]) и на конференции, посвященной памяти Ю. И. Мерзлякова, проходившей в Новосибирске (см. [58]). Эти результаты составили содержание работ [59], и [61]. Группы $A_n(q)$ и $C_n(q)$ удобно изучать, используя их каноническое линейное представление, а остальные — как группы неподвижных точек простых алгебраических групп. Группы ${}^2B_2(q)$ и ${}^2G_2(q)$ изучены в [43], [44], поэтому мы приводим порядки больших абелевых подгрупп в них без дополнительных пояснений.

В четвертой главе найдены порядки и строение нильпотентных подгрупп максимального порядка во всех конечных простых группах. В частности, доказана теорема 1.1.3. Результаты данной главы докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» Новосибирского Государственного Университета, на МНСК (см. [56]), на конференции «Groups and Groups Rings» в Польше (см. [57]), и на конференции памяти Ю. И. Мерзлякова в Новосибирске (см. [58]). Эти результаты составили содержание работы [62]. Для удобства читателя строение и порядки нильпотентных подгрупп в конечных простых группах, кроме спорадических, приведены в таблицах 4.1 и 4.3.

В пятой главе обращаемся к решению вопроса Бабаи, Гудмана и Пыбера для нильпотентных групп. А именно, доказана теорема 1.1.4. Результаты данной главы докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» Новосибирского Государственного Университета, на МНСК (см. [56]), на конференции памяти А. Г. Куроша (см. [55]), на конференции «Groups and Groups Rings» в Польше (см. [57]) и на конференции памяти Ю. И. Мерзлякова (см. [58]). Они опубликованы в работе [60].

В шестой главе получены некоторые следствия из предыдущих результатов. Доказана теорема 1.1.2 и решен вопрос Бабаи, Гудмана и Пыбера для произвольной конечной группы G. Результаты данной главы докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» Новосибирского Государственного Университета, на МНСК (см. [51] и [56]), на региональной конференции в Красноярске (см. [53]), на конференции памяти Д. К. Фаддеева в Санкт-Петербурге (см. [52]), на конференции памяти А. Г. Куроша в Москве (см. [55]), на конференции «Groups and Groups Rings» в Польше (см. [57]) и на конференции памяти Ю. И. Мерзлякова в Новосибирске (см.

[58]). Эти результаты опубликованы в работах [59] и [60].

Все результаты диссертации получены автором лично. Они носят теоретический классификационный характер и могут быть использованы как в дальнейших исследованиях, так и при проведении спецкурсов по теории групп.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Виктору Даниловичу Мазурову за всестороннюю помощь и поддержку. Автор благодарен профессору Анатолию Семеновичу Кондратьеву за полезную помощь и консультации. Автор благодарит кандидата физико-математических наук Андрея Викторовича Васильева за обсуждение отдельных глав диссертации, которое помогло исправить ошибки первоначального варианта и сделать рассуждения более понятными. Автор также выражает благодарность кандидатам физико-математических наук Андрею Витальевичу Заварницину и Даниле Олеговичу Ревину за дружескую помощь на различных этапах работы над диссертацией.

§2 Обозначения из общей теории групп

Обозначения, используемые в настоящей работе, выбраны в соответствии с [40]. Если G — группа, то записи $H \leqslant G$ и $H \trianglelefteq G$ означают соответственно, что H является подгруппой и нормальной подгруппой группы G. Через $|G:H|$ обозначается индекс подгруппы H в группе G, $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G. Если подгруппа H нормальна в G, то через G/H обозначается факторгруппа группы G по H. Если M — подмножество группы G, то символом $\langle M\rangle$ обозначается подгруппа, порожденная множеством M, символом $|M|$ — мощность множества M (или порядок элемента, если вместо множества стоит один элемент). Через $C_G(M)$ обозначается централизатор множества M в группе G, через $Z(G)$ — центр группы G. Сопряжение элемента x с помощью элемента y в группе G записывается как $x^y = y^{-1}xy$, через $[x,y] = x^{-1}x^y$ обозначен коммутатор элементов x, y. Символ $[A,B]$ означает взаимный коммутант подгрупп A и B группы G. Для групп A и B выражения $A \times B$, $A * B$ и $A \leftthreetimes B$ обозначают соответственно прямое, центральное произведение и полупрямое произведение групп A и B с нормальной подгруппой B. Если A и B такие подгруппы группы G, что $A \trianglelefteq B$, то факторгруппа B/A называется секцией группы G. Подгруппа Фраттини группы G обозначена через $\Phi(G)$, подгруппа Фиттинга группы G обозначена через $F(G)$.

Множество силовских p-подгрупп конечной группы G будем обозначать $\mathrm{Syl}_p(G)$. Если φ — гомоморфизм группы G, g — элемент группы G, то G^φ, g^φ — образы группы G и элемента g относительно гомоморфизма φ соответственно. Символом G_φ обозначено множество неподвижных точек группы G относительно эндоморфизма φ. Через $\mathrm{Aut}\, G$ и $\mathrm{Out}\, G$ обозначены группы всех автоморфизмов и внешних автоморфизмов группы G соответственно.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Обозначим через π' дополнение к множеству π в множестве всех простых чисел. В том случае, когда множество π состоит из одного элемента p, мы будем использовать обозначение p и p' для множеств $\{p\}$ и $\{p\}'$ соответственно. По определению, группа G называется *π-группой*, если порядок группы G делится только на простые числа из π. Через $O_\pi(G)$ обозначена максимальная нормальная π-подгруппа группы G, через $O^\pi(G)$ — подгруппа, порожденная всеми π'-подгруппами группы G. Для любого простого числа p через $i_p(G)$

обозначим такое минимальное число k, что пересечение k силовских p-подгрупп из G равно $O_p(G)$.

Определение 1.2.1. Абелева (соответственно нильпотентная) подгруппа максимального порядка конечной группы G называется *большой.*

Множество абелевых (соответственно элементарных абелевых и нормальных абелевых) подгрупп максимального порядка конечной группы G обозначается через $\mathbf{A}(G)$ (соответственно через $\mathbf{A}_e(G)$ и $\mathbf{A}_n(G)$). Порядок любого элемента из $\mathbf{A}(G)$ (соответственно из $\mathbf{A}_e(G)$ и $A_n(G)$) обозначается $\mathbf{a}(G)$ (соответственно $\mathbf{a}_e(G)$ и $\mathbf{a}_n(G)$). Символами $J(G)$, $J_e(G)$ и $J_n(G)$ обозначены группы, порожденные элементами из $\mathbf{A}(G)$, $\mathbf{A}_e(G)$ и $\mathbf{A}_n(G)$ соответственно. Аналогично, множество нильпотентных подгрупп максимального порядка обозначено через $\mathbf{N}(G)$, а порядок любого элемента из $\mathbf{N}(G)$ — через $\mathbf{n}(G)$. Через $\mathbf{c}_a(G)$ (соответственно $\mathbf{c}_n(G)$) обозначим количество классов больших абелевых (соответственно нильпотентных) подгрупп. Символ $m_p(G)$ обозначает p-ранг группы G, т. е. максимум рангов абелевых p-подгрупп.

§3 Строение конечных групп лиева типа

Основные результаты о конечных группах лиева типа, используемые в данной работе, можно найти в [22]. Под группой Шевалле, если не оговорено противное, понимается как универсальная группа Шевалле, так и любая ее факторгруппа по подгруппе из центра. При изучении групп Шевалле $GF(q)$ будет обозначать поле порядка q, p — его характеристику, $GF(q)^*$ — мультипликативную группу поля $GF(q)$. Группа Шевалле G, соответствующая корневой системе Φ над полем $GF(q)$, обозначается через $\Phi(q)$, и поле $GF(q)$ называется *основным* полем группы G. Группа Вейля, соответствующая корневой системе Φ, обозначается $W(\Phi)$. Группа Вейля группы лиева типа G обозначается через $W(G)$.

Для любой нескрученной конечной группы лиева типа символ X_r обозначает корневую подгруппу, соответствующую некоторому корню $r \in \Phi$. Хорошо известно, что группа X_r изоморфна аддитивной подгруппе поля $GF(q)$, и символом $x_r(t)$ обозначается элемент из X_r, где t — элемент из $GF(q)$, в который переходит элемент $x_r(t)$ относительно этого изоморфизма. Любая группа Шевалле G порождается корневыми подгруппами X_r, $(r \in \Phi)$.

Определим *графовый автоморфизм* конечной группы лиева типа G. Предположим, что диаграмма Дынкина группы G допускает некоторую симметрию ρ, которая продолжается до автоморфизма φ группы G. Тогда этот автоморфизм на порождающих элементах $\{x_r(t) | r \in \Phi, t \in GF(q)\}$ определяется правилом $x_r(t)^\varphi = x_{r^\rho}(t^\lambda)$, где λ — соответствующий полевой автоморфизм, и φ естественным образом продолжается на всю группу. Далее будем обозначать r^ρ через $\overline{r}$, а r^{ρ^2} через $\overline{\overline{r}}$, для $r \in \Phi$. При этом образ любого элемента $t \in GF(q^\alpha)$ ($\alpha = 1$, 2 или 3) относительно соответствующего полевого автоморфизма λ будем обозначать $\overline{t} = t^\lambda$, $\overline{\overline{t}} = t^{\lambda^2}$ соответственно. Возникающие при графовых автоморфизмах φ группы $O^{p'}(G_\varphi)$ называются *скрученными* группами лиева типа.

Скрученные группы будут обозначаться символами ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^2E_6(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, и ${}^2F_4(q)$, при этом под основным полем для группы G понимается $GF(q)$, $GF(q^2)$, либо $GF(q^3)$, в зависимости от того, какая степень q стоит в обозначении группы. Поле $GF(q)$ для всех групп лиева типа называется *полем определения.*

Определение 1.3.1. Произвольный p-элемент x из группы Шевалле $\Phi(q)$ называется *унипотентным*, а p'-элемент называется *полупростым.* Аналогично определяются унипотентные и полупростые подгруппы конечной группы Шевалле G. Множество полупростых абелевых (соответственно нильпотентных) подгрупп максимального порядка будем обозначать $\mathbf{A}_s(G)$ (соответственно $\mathbf{N}_s(G)$). Множество унипотентных абелевых подгрупп максимального порядка обозначается $\mathbf{A}_u(G)$. Отметим, что вводить обозначение $\mathbf{N}_u(G)$ не требуется, поскольку $\mathbf{N}_u(G) = \mathrm{Syl}_p(G)$.

Напомним, что для любой корневой системы Φ существует такой набор корней $r_1, \ldots, r_n$, что каждый корень из Φ единственным образом представим в виде $\sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$, где все коэффициенты α_i целочисленны и либо все неотрицательны, либо все неположительны. Такой набор корней называется *фундаментальной системой* корневой системы Φ. При этом фундаментальная система является базисом пространства $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Размерность пространства $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ назовем *рангом* корневой системы Φ. Далее будем считать, что все фундаментальные корни положительны. Тогда корень r положителен в том и только в том случае, когда он представим в виде линейной комбинации фундаментальных корней с неотрицательными коэффициентами. Для корневой системы Φ через Φ^+ (Φ^-) обозначено множество положительных (отрицательных) корней. *Высотой* корня $r = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$ называется число $h(r) = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. В любой неприводимой корневой системе Φ существует единственный корень максимальной высоты, который в дальнейшем будет обозначаться r_0.

Мы будем говорить, что на корневой системе Φ (или на пространстве $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$) задан частичный (или линейный) порядок, если этот порядок согласован с операцией сложения корней и умножения на вещественный скаляр. Далее, если не оговорено противное, будем считать, что на пространстве $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ задан фиксированный линейный порядок $\leqslant$ (соответствующий фундаментальной системе $r_1, \ldots, r_n$), определяемый правилом $0 \leqslant v = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$ тогда и только тогда, когда либо $v = 0$, либо последний из ненулевых коэффициентов α_i больше 0. Запись $r \leqslant s$ означает, что $0 \leqslant s - r$, а запись $r < s$ означает $r \leqslant s$ и $r \neq s$. Кроме этого зафиксируем частичный порядок $\preceq$, заданный правилом $r \preceq s$ тогда и только тогда, когда $s - r = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$, и все коэффициенты α_i неотрицательны.

Для любой группы Шевалле G с полем определения $GF(q)$ характеристики p через U будет обозначен некоторый элемент из $\mathrm{Syl}_p(G)$. Без ограничения общности можно считать, что $U = \langle X_r | r \in \Phi^+ \rangle$. Хорошо известно (см., например, [22]), что если на корневой системе Φ задан некоторый линейный порядок, то любой элемент из максимальной унипотентной подгруппы единственным образом записывается в виде произведения элементов $x_r(t)$, взятых в заданном порядке. Для элементов $x_r(t)$, $x_s(u)$ справедлива следующая формула, называемая коммутаторной формулой Шевалле.

Лемма 1.3.2. *[22, 5.2.2] Пусть $x_r(t)$, $x_s(u)$ — элементы, принадлежащие корневым подгруппам X_r и X_s соответственно и $r \neq s$. Тогда*

$$[x_r(t), x_s(u)] = \prod_{ir+js \in \Phi; i,j>0} x_{ir+js}(C_{ijrs}(-t)^i u^j),$$

где константы C_{ijrs} не зависят от t и u.

Содержательно, данная формула означает, что взаимный коммутант подгрупп X_r и X_s лежит в группе, порожденной корневыми подгруппами X_{ir+js}, где $i, j > 0$ и $ir + js \in \Phi$.

Определение 1.3.3. Пусть p — характеристика поля определения конечной группы лиева типа G. Будем называть подмножество Ψ корневой системы Φ *абелевым относительно* p, если для любых двух корней $r, s \in \Psi$ либо $r + s$ не принадлежит Ψ, либо $C_{11rs} = 0$ в характеристике p. Для корневой системы Φ через $\mathbf{a}(\Phi, p)$ обозначим максимум порядков абелевых относительно p подмножеств множества Φ^+. Подмножество Ψ корневой системы Φ назовем *абелевым*, если для любых двух корней $r, s \in \Psi$ вектор $r + s$ не принадлежит Φ. Абелевы подмножества максимального порядка найдены в работе А. И. Мальцева [7].

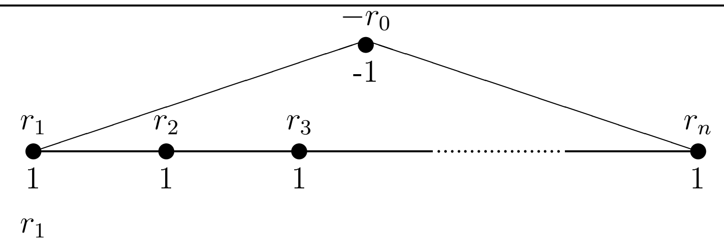
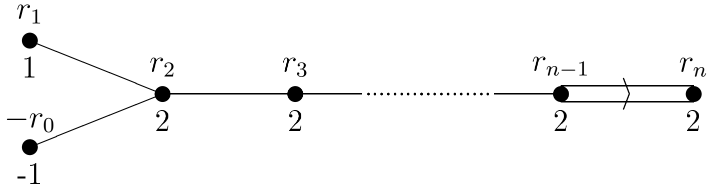
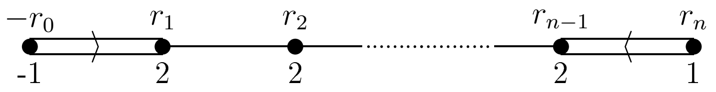
Определение 1.3.4. Пусть $x \in U$ — некоторый унипотентный элемент, тогда разложение $x = \prod_{r\in\Phi^+} x_r(t_r)$, где $t_r \in GF(q)$ и корни r выбраны в порядке возрастания относительно порядка $\leqslant$, будем называть *каноническим разложением* элемента x. (Некоторые из t_r могут быть равны 0.)

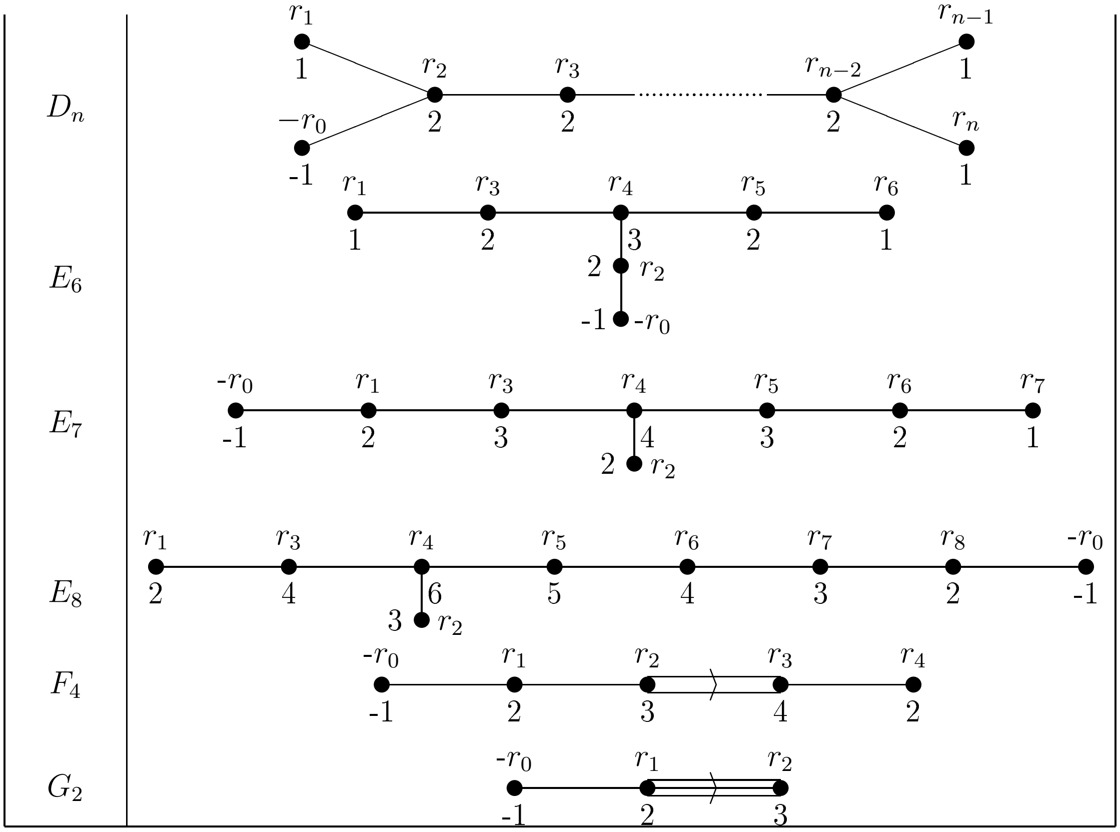
Как уже отмечалось, для любого унипотентного элемента x из U такое разложение единственно. Через $\Phi(x)$ обозначим множество таких корней r, что $t_r \neq 0$. Если $L \leqslant U$ — подгруппа унипотентной группы U, то положим $\Phi(L) = \bigcup_{x\in L} \Phi(x)$. Пусть на корневой системе Φ задан линейный порядок, тогда для унипотентного элемента x через $m(x)$ обозначим минимальный элемент множества $\Phi(x)$. Для унипотентной подгруппы $L \leqslant U$ положим $m(L) = \bigcup_{x\in L}\{m(x)\}$.

Определение 1.3.5. Определим *расширенную диаграмму Дынкина* как диаграмму, которая получается добавлением к диаграмме Дынкина корня $-r_0$ и соединения его с остальными корнями по обычному правилу.

Для дальнейшего использования приведем в таблице 1.1 расширенные диаграммы Дынкина для всех неприводимых корневых систем и коэффициенты, с которыми фундаментальные корни входят в разложение корня r_0. Нумерация в таблице 1.1 выбрана в соответствии с [26].

Таблица 1.1. Корневые системы и расширенные диаграммы Дынкина

Тип Φ	Расширенная диаграмма Дынкина
A_n	
B_n	
C_n	



§4 Линейные алгебраические группы

Необходимую информацию о строении и свойствах линейных алгебраических групп можно найти в [9]. Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться лишь линейные алгебраические группы, слово линейные, для краткости, будем опускать.

Если G — алгебраическая группа, то через G^0 обозначена компонента единицы группы G. Алгебраическая группа называется полупростой, если ее радикал тривиален, и алгебраическая группа называется редуктивной, если ее унипотентный радикал тривиален (в обоих случаях не предполагается, что алгебраическая группа связна). Хорошо известно (см., например [9]), что связная полупростая алгебраическая группа — это центральное произведение связных простых алгебраических групп, а связная редуктивная алгебраическая группа G — это произведение тора S и полупростой группы M, причем $S = Z(G)^0$, $M = [G, G]$, и группа $S \cap M$ конечна. Отметим, что данное определение полупростой группы вступает в некоторое противоречие с определением полупростых подгрупп в конечных группах лиева типа 1.3.1. Поэтому когда в дальнейшем мы будем говорить о полупростых подгруппах в алгебраических группах мы будем пользоваться только что данным определением. В том случае, когда мы будем говорить о полупростых подгруппах в конечных группах лиева типа мы будем использовать определение 1.3.1.

Если G — связная редуктивная алгебраическая группа, то пусть T — ее максимальный тор (под тором всегда понимается связная диагонализируемая (d-) группа). *Рангом* связной алгебраической группы называется размерность ее максимального тора.

Любой элемент группы G единственным образом представим в виде un_wtv, где

$v \in U$, $t \in T$, $u \in U \cap n_w U^- n_w^{-1}$ (см., например, [9, теорема 28.3]). Элементы n_w образуют полную систему представителей факторгруппы $N_G(T)/T \cong W$, элементу w из группы Вейля соответствует элемент n_w из группы $N_G(T)$. Такое представление элементов группы G называется их разложением Брюа.

Пусть G — связная простая алгебраическая группа, π — ее некоторое точное рациональное представление, Γ_π — решетка, порожденная весами представления π. Через Γ_{ad} обозначается решетка, порожденная корнями системы Φ, через Γ_{sc} — решетка, порожденная фундаментальными весами. Решетки Γ_{sc}, Γ_π и Γ_{ad} не зависят от конкретного представления группы G, и справедливы следующие включения $\Gamma_{ad} \leqslant \Gamma_\pi \leqslant \Gamma_{sc}$.

Известно, что для корневой системы данного типа существует несколько различных простых алгебраических групп, которые называются изогениями. Они различаются строением группы Γ_π и порядком конечного центра. В том случае, когда решетка Γ_π совпадает с Γ_{sc}, говорят, что группа G односвязна, и она обозначается через G_{sc}. Если решетка Γ_π совпадает с Γ_{ad}, то говорят, что группа G имеет присоединенный тип, и она обозначается через G_{ad}. Любая линейная алгебраическая группа с корневой системой Φ получается как факторгруппа группы G_{sc} по подгруппе из ее центра. Центр группы G_{ad} тривиален, и она проста как абстрактная группа.

Пусть c_i — коэффициент, с которым фундаментальный корень r_i входит в разложение корня r_0. Простые числа, делящие коэффициенты c_i, называются *плохими* простыми числами.

Далее напомним фундаментальный результат о строении алгебраических групп.

Лемма 1.4.1. *[9, 21.3 и 22.2] Пусть G — связная линейная алгебраическая группа. Тогда все подгруппы Бореля группы G сопряжены. Более того, максимальные торы и максимальные связные унипотентные подгруппы в G — это в точности максимальные торы и максимальные связные унипотентные подгруппы групп Бореля. Кроме того, все максимальные торы и максимальные связные унипотентные подгруппы сопряжены, и любой полупростой элемент лежит в некотором максимальном торе (соответственно максимальной связной унипотентной подгруппе).*

Теперь напомним, каким образом связаны конечные группы лиева типа и простые алгебраические группы. Пусть $\overline{G}$ — связная простая алгебраическая группа, определенная над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, σ — эндоморфизм группы $\overline{G}$ такой, что множество его неподвижных точек $\overline{G}_\sigma$ конечно. Эндоморфизм σ с таким условием в дальнейшем будет называться автоморфизмом Фробениуса, хотя он может и не совпадать с классическим автоморфизмом Фробениуса. Отметим, что σ является автоморфизмом, если группа $\overline{G}$ рассматривается как абстрактная группа, и σ является эндоморфизмом, если $\overline{G}$ рассматривается как алгебраическая группа. В общем случае σ имеет вид $q\sigma_0$, где $q = p^\alpha$ — возведение в q-ую степень, а σ_0 — графовый автоморфизм порядка 1, 2 или 3. Тогда $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — группа лиева типа над конечным полем характеристики p, и любую группу лиева типа (нормальную или скрученную) можно получить таким образом. Если группа $\overline{G}$ односвязна, то группа $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ универсальна. *Рангом* конечной группы лиева типа $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$, где $\overline{G}$ — связная простая алгебраическая группа, мы будем называть ранг группы $\overline{G}$. Отметим, что в том случае, когда группа $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ проста, группа $\overline{G}_\sigma$ совпадает с группой внутренне-диагональных автоморфизмов группы G, и для любого σ-инвариантного максимального тора $\overline{T}$ группы $\overline{G}$ справедливо равенство $\overline{T}_\sigma G = \overline{G}_\sigma$.

Пусть $\overline{T}$ — некоторый σ-инвариантный тор связной простой алгебраической группы $\overline{G}$. В дальнейшем *тором* группы $\overline{G}_\sigma$ (соответственно $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$) будем называть группу $\overline{T}_\sigma$ (соответственно $\overline{T}_\sigma \cap O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$). Если тор $\overline{T}$ является максимальным, то группа $\overline{T}_\sigma$ ($\overline{T}_\sigma \cap O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$) называется *максимальным тором*. Хорошо известно взаимно однозначное соответствие между различными несопряженными максимальными торами группы $\overline{G}_\sigma$ и классами сопряженных элементов группы Вейля W (см., например, [20]). Если $T_w(q)$ — максимальный тор, соответствующий элементу $w \in W$, то $|T_w(q)| = f(q)$, где $f(q)$ — характеристический многочлен элемента w. Подробную информацию о классах сопряженных элементов группы Вейля, их характеристических многочленах и централизаторах различных элементов в группах Вейля для всех простых алгебр Ли можно найти в [21].

Глава 2

Абелевы подгруппы максимального порядка некоторых конечных групп

§1 Абелевы подгруппы максимального порядка в симметрических и знакопеременных группах

Теорема 2.1.1. *Большая абелева подгруппа в знакопеременной группе A_n сопряжена с одной из следующих групп:*

1) $\langle (1,2,3),\ldots,(3k-2,3k-1,3k)\rangle$, *если* $n=3k$*;*

2) $\langle (1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(5,6,7),\ldots,(3k-1,3k,3k+1)\rangle$, *если* $n=3k+1$*;*

3) $\langle (1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(5,6)(7,8),(5,7)(6,8),(9,10,11),\ldots,(3k,\ 3k+1,\ 3k+2)\rangle$, *если* $n=3k+2,\ k\geqslant 2$*;*

4) $\langle (1,2,3,4,5)\rangle$, *если* $n=5$.

При этом порядки больших абелевых подгрупп в знакопеременных (A_n) *и симметрических* (S_n) *группах задаются равенствами:*

$\mathbf{a}(A_{3n})=3^n$; $\mathbf{a}(A_{3n+1})=4\cdot 3^{n-1}$; $\mathbf{a}(A_{3n+2})=16\cdot 3^{n-2}$; $\mathbf{a}(A_5)=5$; $\mathbf{a}(S_{3n})=3^n$; $\mathbf{a}(S_{3n+1})=4\cdot 3^{n-1}$; $\mathbf{a}(S_{3n+2})=2\cdot 3^n$.

Для любого n большая абелева подгруппа группы A_n единственна с точностью до сопряжения.

Доказательство. Отметим известное утверждение. Пусть $H\leqslant S_n$, H является абелевой и действует транзитивно на множестве $\{1,\ldots,n\}$. Тогда $|H|=n$.

Действительно, рассмотрим стабилизатор $St_H(i)$ некоторого элемента $i\in\{1,\ldots,n\}$ в группе H. Поскольку H действует транзитивно, для любого $j\in\{1,\ldots,n\}$ существует $\tau\in H$, при котором $i^\tau=j$. Поэтому для любого $\sigma\in St_H(i)$ имеем:

$$j^\sigma=i^{\tau\sigma}=i^{\sigma\tau}=i^\tau=j,$$

т. е., если $\sigma\in St_H(i)$, то $\sigma\in St_H(j)$ для всех $j\in\{1,\ldots,n\}$. Значит, $\sigma=\varepsilon$ — тождественная подстановка, т. е. $St_H(i)=\{\varepsilon\}$. Далее, $|H|=|H:St_H(i)|\cdot|St_H(i)|$, $|H:St_H(i)|=n$, следовательно, $|H|=n$.

Далее, все множество $\{1,\ldots,n\}$ разбивается на орбиты $I_1,\ldots,I_k$, на каждой из которых абелева подгруппа G группы S_n действует транзитивно. Таким образом, $|G|\leqslant\prod_{j=1}^k|I_j|$.

Обозначим $P_n = \max_{n_1+\ldots+n_k=n}\left(\prod_{j=1}^k n_j\right)$. В силу сказанного выше $\mathbf{a}(S_n) = P_n$. Нетрудно заметить, что для P_n справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$P_n = \max_{0<m\leqslant n}(P_{n-m}\cdot m),\ P_0 = 1.$$

Пользуясь указанным соотношением, по индукции получаем следующие равенства:

$$P_{3n} = 3^n; P_{3n+1} = 4\cdot 3^{n-1}; P_{3n+2} = 2\cdot 3^n.$$

Теорема для S_n доказана.

Заметим, что $A_n < S_n$, значит, $\mathbf{a}(A_n) \leqslant \mathbf{a}(S_n)$.

В группе A_{3n} существует абелева подгруппа G, которая порождается подстановками $(1,2,3)$, $(4,5,6),\ldots,(3n-2,3n-1,3n)$, т. е. G представима в виде прямого произведения циклических групп порядка 3. Ее порядок равен 3^n, поэтому $\mathbf{a}(A_{3n}) = 3^n$. Заметим, что любая большая абелева подгруппа F в группе A_{3n} представима в виде прямого произведения циклических групп порядка 3, т. е. она порождается подстановками $(k_1,k_2,k_3),(k_4,k_5,k_6),\ldots,(k_{3n-2},k_{3n-1},k_{3n})$, поэтому $G^\sigma = F$, где σ — подстановка из S_{3n}, переводящая 1 в k_1, 2 в k_2 и т. д. Если подстановка σ нечетна, то можно рассмотреть подстановку $\tau = (1,2)\sigma$, которая четна. Поскольку $G^{(1,2)} = G$, имеем $G^\tau = F$, т. е. G и F сопряжены в A_{3n}.

В группе A_{3n+1} имеется абелева подгруппа G, порожденная подстановками $(1,2)\cdot$ $\cdot(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(5,6,7),\ldots$, $(3n-1,3n,3n+1)$, ее порядок равен $4\cdot 3^{n-1}$, поэтому $\mathbf{a}(A_{3n}) = 4\cdot 3^{n-1}$. Так же, как и в случае групп A_{3n}, доказывается, что любая большая абелева группа и G сопряжены в A_{3n+1}.

Наконец, если G является абелевой подгруппой группы A_{3n+2}, то либо $|G| = 3n+2$, либо G представима в виде $G = G_1\times G_2$, где $G_1 < A_{k_1}$, $G_2 < A_{k_2}$, $k_1+k_2 = 3n+2$. При $n\geqslant 2$ для индексов k_1 и k_2 возможны следующие случаи:

1) Пусть $k_1 = 3n_1+1$, $k_2 = 3n_2+1$. Тогда

$$|G| = |G_1\times G_2| = |G_1|\cdot|G_2| \leqslant \mathbf{a}(A_{3n_1+1})\cdot\mathbf{a}(A_{3n_2+1}) = 16\cdot 3^{n-2}.$$

2) Пусть $k_1 = 3n_1$, $k_2 = 3n_2+2$. Отсюда

$$|G| = |G_1\times G_2| = |G_1|\cdot|G_2| \leqslant \mathbf{a}(A_{3n_1})\cdot\mathbf{a}(A_{3n_2+2}) = 16\cdot 3^{n-2}.$$

Применение индукции по n дает оценку $\mathbf{a}(A_{3n+2}) \leqslant 16\cdot 3^{n-2}$. С другой стороны, при $n\geqslant 2$ в группе A_{3n+2} содержится подгруппа G, порожденная подстановками $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(5,6)(7,8)$, $(5,7)(6,8)$, $(9,10,11),\ldots$, $(3n,3n+1,3n+2)$, ее порядок равен $16\cdot 3^{n-2}$, поэтому $\mathbf{a}(A_{3n}) = 16\cdot 3^{n-2}$. Как и раньше, можно доказать, что любая большая абелева подгруппа и G сопряжены в A_{3n+2}. $\boxtimes$

Сведения о больших абелевых подгруппах в симметрических и знакопеременных группах мы обобщим в одной таблице.

Таблица 2.1. Большие абелевы подгруппы знакопеременных и симметрических групп

G	$\mathbf{a}(G)$	$\mathbf{c}_a(G)$	строение
A_{3n}, S_{3n}	3^n	1	$\langle(1,2,3)\rangle\times\ldots\times\langle(3n-2,3n-1,3n)\rangle$

A_{3n+1}	$4 \cdot 3^{n-1}$	1	$\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle \times \langle(5,6,7)\rangle \times \ldots \times$ $\times\langle(3n-1,3n,3n+1)\rangle$
S_{3n+1}	$4 \cdot 3^{n-1}$	3	$\langle(1,2)\rangle \times \langle(3,4)\rangle \times \langle(5,6,7)\rangle \ldots \times \langle(3n-1,3n,3n+1)\rangle$, $A \in \mathbf{A}(A_{3n+1})$, $\langle(1,2,3,4)\rangle \times \langle(5,6,7)\rangle \times \ldots \times$ $\times\langle(3n-1,3n,3n+1)\rangle$
A_{3n+2}, $n \geqslant 2$	$16 \cdot 3^{n-2}$	1	$\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle \times \langle(5,6)(7,8),(5,7)(6,8)\rangle\times$ $\times\langle(9,10,11)\rangle \times \ldots \times \langle(3n,3n+1,3n+2)\rangle$
S_{3n+2}	$2 \cdot 3^{n}$	1	$\langle(1,2)\rangle \times \langle(3,4,5)\rangle \times \ldots \times \langle(3n,3n+1,3n+2)\rangle$
A_5	5	1	$\langle(1,2,3,4,5)\rangle$

§2 Абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле. Основные теоремы

Теорема 2.2.1. *Пусть G — конечная нескрученная группа Шевалле с полем определения $GF(q)$. Пусть $L \leqslant U$ — некоторая унипотентная подгруппа группы G. Тогда $|L| \leqslant\ q^{|m(L)|}$.*

Доказательство. Для каждого $r \in m(L)$ выберем некоторое максимальное по количеству элементов подмножество $X(r) = \{x(r,t_r)|t_r \in GF(q)\}$ элементов группы L, удовлетворяющее следующим трем условиям.

1. Для всех $x(r,t_r) \in X(r)$ имеем $m(x(r,t_r)) = r$. Это условие отражается в использовании корня r в записи элемента $x(r,t_r)$.

2. Элемент $x_r(t_r)$ входит в каноническое разложение элемента $x(r,t_r)$ Это условие отражается в использовании элемента t_r из поля $GF(q)$ в записи элемента $x(r,t_r)$.

3. Для любых двух различных элементов $x(r,t_r)$ и $x(r,u_r)$ из $X(r)$ справедливо $t_r \neq u_r$. Данное условие означает, что если x и y — два различных элемента из $X(r)$, то множители из корневой подгруппы X_r в их каноническом разложении различны.

Множество $X(r)$, определенное таким образом, является аналогом корневой подгруппы X_r группы U в группе L. Множество $X(r)$, вообще говоря, определяется не единственным образом. Однако, как будет понятно из дальнейшего доказательства, мощность множества $X(r)$ постоянна и, как нетрудно понять, не превосходит $|GF(q)| = q$. Покажем, что справедливо следующее утверждение.

Для заданного фиксированного набора множеств $\{X(r)|r \in m(L)\}$ любой элемент x из L можно записать в виде $x = \prod_{r\in m(L),r\geqslant m(x)} x(r,t_r)$, взятых в заданном порядке $\leqslant$. $(*)$

Предположим, что утверждение $(*)$ неверно, и x — максимальный по $m(x)$ контрпример к утверждению $(*)$. Предположим, что $r = m(x)$ и элемент $x_r(t_r)$ из корневой подгруппы X_r входит в каноническое разложение элемента x. Из построения множества $X(r)$ следует, что оно непусто, и существует такой элемент $x(r,u)$ из $X(r)$, что $u = t_r$. Тогда $x = x_r(t_r)\prod_{s>r} x_s(t_s)$ и $(x(r,t_r))^{-1} = x_r(-t_r)\prod_{s>r} x_s(u_s)$. Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств

$$(x(r,t_r))^{-1}\cdot x = x_r(-t_r)\cdot\prod_{s>r}x_s(u_s)\cdot x_r(t_r)\cdot\prod_{s>r}x_s(t_s) =$$

$$= x_r(-t_r)\cdot x_r(t_r)\cdot\prod_{s>r}x_s(u_s)\cdot\left[\prod_{s>r}x_s(u_s), x_r(t_r)\right]\cdot\prod_{s>r}x_s(t_s) =$$

$$= \prod_{s>r}x_s(u_s)\cdot\left[\prod_{s>r}x_s(u_s), x_r(t_r)\right]\cdot\prod_{s>r}x_s(t_s).$$

В силу коммутаторной формулы Шевалле (см. лемму 1.3.2), коммутатор

$$\left[\prod_{s>r}x_s(u_s), x_r(t_r)\right]$$

лежит в подгруппе $\langle X_s | s > r\rangle$. Элементы $\prod_{s>r}x_s(t_s)$ и $\prod_{s>r}x_s(u_s)$ также лежат в подгруппе $\langle X_s | s > r\rangle$. Следовательно, элемент $x_1 = (x(r,t_r))^{-1}\cdot x$ лежит в подгруппе $\langle X_s | s > r\rangle$. В частности, $m(x_1) > m(x)$. Поскольку $m(x_1) > m(x)$, и x — максимальный по $m(x)$ контрпример к утверждению $(*)$, элемент x_1 представим в виде $x_1 = \prod_{s\in m(L), s\geqslant m(x_1)}x(s,t_s)$. Следовательно, справедливо равенство

$$x = x(r,t_r)\prod_{s\in m(L), s\geqslant m(x_1)}x(s,t_s) = \prod_{s\in m(L), s\geqslant m(x)}x(s,t_s),$$

противоречие с выбором x.

Таким образом, справедливо неравенство $|L| \leqslant \prod_{r\in m(L)}|X(r)| \leqslant q^{|m(L)|}$. ⊠

Теорема 2.2.2. *Пусть G — некоторая конечная нескрученная группа лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики p и $U \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Пусть $x, y \in U$ — два унипотентных элемента и $[x,y] = 1$. Тогда множество $\{m(x), m(y)\}$ является абелевым относительно p. В частности, если $A \leqslant U$ — абелева унипотентная подгруппа, то множество $m(A)$ является абелевым относительно p.*

Доказательство. Пусть $m(x) = r$, $m(y) = s$. По условию $x = x_r(t)v_1x_{r+s}(t_1)v_2$ и $y = x_s(u)w_1x_{r+s}(u_1)w_2$, где
$v_1 = \prod_{f\in\Phi,\ r<f<r+s}x_f(t_f)$, $v_2 = \prod_{f\in\Phi, f>r+s}x_f(t_f)$, $w_1 = \prod_{f\in\Phi, s<f<r+s}x_f(u_f)$, $w_2 = \prod_{f\in\Phi, f>r+s}x_f(u_f)$ и $t, t_1, t_f, u, u_1, u_f \in GF(q)$.

Предположим, что $r \leqslant s$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств.

$$
\begin{aligned}
xy = x_r(t)v_1x_{r+s}(t_1)v_2 \cdot x_s(u)w_1x_{r+s}(u_1)w_2 = \\
= x_r(t)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, r<f<r+s} x_f(t_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right)\times \\
\times\, x_s(u)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(u_f)\right)\cdot x_{r+s}(u_1)\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(u_f)\right) = \\
= x_r(t)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, r<f<s} x_f(t_f)\right)\cdot x_s(u)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, s\leqslant f<r+s} x_f(t_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right)\times \\
\times\left[\left(\prod_{f\in\Phi, s\leqslant f<r+s} x_f(t_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right), x_s(u)\right]\times \\
\times\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(u_f)\right)\cdot x_{r+s}(u_1)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(u_f)\right) = \\
= x_r(t)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, r<f<s} x_f(t_f)\right)\cdot x_s(u+t_s)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(t_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1)\times \\
\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(u_f)\right)\cdot x_{r+s}(u_1)\times \\
\times\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right)\cdot\left[\left(\prod_{f\in\Phi, s\leqslant f<r+s} x_f(t_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right), x_s(u)\right]\times \\
\times\left[\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right)\cdot\left[\left(\prod_{f\in\Phi, s\leqslant f<r+s} x_f(t_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right), x_s(u)\right],\right. \\
\left.\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(u_f)\right)\cdot x_{r+s}(u_1)\right]\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(u_f)\right) = \\
= x_r(t)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, r<f<s} x_f(t_f)\right)\cdot x_s(u+t_s)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(t_f+u_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1+u_1)\times \\
\times\, z\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right)\cdot\left[\left(\prod_{f\in\Phi, s\leqslant f<r+s} x_f(t_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right), x_s(u)\right]\times \\
\times\left[\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right)\cdot\left[\left(\prod_{f\in\Phi, s\leqslant f<r+s} x_f(t_f)\right)\cdot x_{r+s}(t_1)\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right), x_s(u)\right],\right. \\
\left.\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(u_f)\right)\cdot x_{r+s}(u_1)\right]\cdot\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(u_f)\right),
\end{aligned}
$$

где элемент z определяется следующим образом. Рассмотрим сначала минимальный корень f_1 из множества $\Psi_1 = \{s < f \leqslant r+s | f \in \Phi\}$. Далее, элемент

$$\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(t_f)\right) \cdot x_{r+s}(t_1) \cdot x_{f_1}(u_{f_1})$$

равен элементу

$$x_{f_1}(u_{f_1}) \cdot \left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(t_f)\right) \cdot x_{r+s}(t_1) \cdot \left[\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(t_f)\right) \cdot x_{r+s}(t_1), x_{f_1}(u_{f_1})\right].$$

Положим

$$z_1 = \left[\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(t_f)\right) \cdot x_{r+s}(t_1), x_{f_1}(u_{f_1})\right].$$

Далее, берем минимальный корень f_2 из множества $\Psi_2 = \{f_1 < f \leqslant r+s | f \in \Phi\}$. Теперь элемент

$$\left(\prod_{f\in\Phi, f_1<f<r+s} x_f(t_f)\right) \cdot x_{r+s}(t_1) \cdot z_1 \cdot x_{f_2}(u_{f_2})$$

равен элементу

$$x_{f_2}(u_{f_2}) \left(\prod_{f\in\Phi, f_1<f<r+s} x_f(t_f)\right) x_{r+s}(t_1) z_1 \left[\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(t_f)\right) x_{r+s}(t_1) z_1, x_{f_2}(u_{f_2})\right].$$

Полагаем

$$z_2 = z_1 \cdot \left[\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(t_f)\right) \cdot x_{r+s}(t_1) \cdot z_1, x_{f_2}(u_{f_2})\right].$$

Данную процедуру продолжаем до тех пор, пока на некотором шаге не получим пустое множество Ψ_i. Поскольку множество Ψ_1 конечно, и на каждом шаге количество элементов в множестве Ψ_k уменьшается, в конце обязательно получим пустое множество. Элемент z полагаем равным z_{i-1}. Отметим, что в силу коммутаторной формулы Шевалле 1.3.2, элемент z лежит в группе $\langle X_f | f \geqslant f_1 + f_2\rangle$. Поскольку $f_1 > r$, а $f_2 > s$, имеем $m(z) > r+s$, следовательно, $z \in \langle X_f | f > r+s\rangle$.

Таким образом, в силу коммутаторной формулы Шевалле (лемма 1.3.2), все множители элемента

$$z\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right) \cdot \left[\left(\prod_{f\in\Phi, s\leqslant f<r+s} x_f(t_f)\right) \cdot x_{r+s}(t_1) \cdot \left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right), x_s(u)\right] \times$$
$$\times \left[\left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right) \cdot \left[\left(\prod_{f\in\Phi, s\leqslant f<r+s} x_f(t_f)\right) \cdot x_{r+s}(t_1) \cdot \left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(t_f)\right), x_s(u)\right],\right.$$
$$\left.\left(\prod_{f\in\Phi, s<f<r+s} x_f(u_f)\right) \cdot x_{r+s}(u_1)\right] \cdot \left(\prod_{f\in\Phi, f>r+s} x_f(u_f)\right)$$

лежат в группе $\langle X_f | f > r+s\rangle$, значит, данный элемент лежит в группе $\langle X_f | f > r+s\rangle$. Следовательно, его можно записать в виде $\prod_{f>r+s} x_f(a_f)$, где все элементы a_f взяты из $GF(q)$. Таким образом, мы получили следующий канонический вид элемента xy

$$xy = x_r(t) \cdot \left(\prod_{f \in \Phi, r < f < s} x_f(t_f) \right) \cdot x_s(u + t_s) \cdot \left(\prod_{f \in \Phi, s < f < r+s} x_f(t_f + u_f) \right) \times$$
$$\times\, x_{r+s}(t_1 + u_1) \cdot \prod_{f > r+s} x_f(a_f). \quad (2.1)$$

Аналогичными рассуждениями получаем следующий канонический вид элемента yx

$$yx = x_r(t) \left(\prod_{f \in \Phi, r < f < s} x_f(t_f) \right) x_s(u + t_s) \left(\prod_{f \in \Phi, s < f < r+s} x_f(t_f + u_f) \right) \times$$
$$\times\, x_{r+s}(t_1 + u_1 - C_{11rs} tu) \left(\prod_{f \in \Phi, f > r+s} x_f(b_f) \right), \quad (2.2)$$

где все элементы b_f лежат в $GF(q)$. Из равенств (2.1) и (2.2), следует, что в том случае, когда множество $\{m(x), m(y)\}$ не является абелевым относительно p, канонический вид элементов xy и yx не совпадает, поскольку элемент $x_{r+s}(t_1+u_1)$ отличен от элемента $x_{r+s}(t_1+u_1-C_{11rs}tu)$. В силу единственности представления любого унипотентного элемента в каноническом виде, отсюда следует, что элементы xy и yx не совпадают, что противоречит условию $[x, y] = 1$. ⊠

Следствие 2.2.3. *Пусть G — конечная нескрученная группа лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики p. Пусть A — унипотентная абелева подгруппа группы G, и Φ — корневая система группы G. Тогда $|A| \leqslant q^{\mathbf{a}(\Phi,p)}$.*

Доказательство. Поскольку A — унипотентная подгруппа, можно считать, что $A \leqslant U$. В силу теоремы 2.2.2 множество $m(A)$ является абелевым относительно p. Следовательно, по теореме 2.2.1, $|A| \leqslant q^{m(A)} \leqslant q^{\mathbf{a}(\Phi,p)}$. ⊠

Теорема 2.2.4. *Пусть G — конечная нескрученная группа лиева типа. Пусть A_1 и A_2 — две унипотентные подгруппы группы U, и $B = N_G(U)$ — подгруппа Бореля группы G. Тогда если A_1 и A_2 сопряжены в B, то $m(A_1) = m(A_2)$*

Доказательство. Пусть $A_1^g = A_2$ для некоторого $g \in B$. Тогда $g = hu$, где h — элемент из подгруппы Картана H группы B, а u принадлежит U. Для любого корня $r \in \Phi^+$ справедливо $X_r^H \subseteq X_r$, следовательно, $X_r^h \subseteq X_r$. В силу коммутаторной формулы Шевалле (лемма 1.3.2), для любого $u \in U$ выполнено включение $X_r^u \subseteq X_r \langle X_s | s > r \rangle$. Пусть $x \in A_1$ и $r = m(x)$. Тогда, в силу предыдущих рассуждений, $x^g \in X_r \langle X_s | s > r \rangle$. Следовательно, $m(x^g) = m(x) \in m(A_2)$. Значит, $m(A_1) \subseteq m(A_2)$. Поскольку справедливо равенство $A_2^{g^{-1}} = A_1$, выполнено и обратное включение $m(A_2) \subseteq m(A_1)$. Таким образом, $m(A_1) = m(A_2)$. ⊠

§3 Большие абелевы унипотентные подгруппы в группах $G_2(q)$

Строение и порядки больших абелевых унипотентных подгрупп, а также подгрупп Томпсона максимальных унипотентных подгрупп в группах $G_2(q)$ будет зависеть от характеристики p поля определения $GF(q)$ группы $G_2(q)$.

Характеристика равна 2 В этом случае все максимальные абелевы относительно 2 подмножества множества Φ^+ лежат в следующем списке.

$$\{r_1, r_1+r_2, 3r_1+r_2, 3r_1+2r_2\},$$
$$\{r_2, r_1+r_2, 3r_1+2r_2\},$$
$$\{r_2, 2r_1+r_2, 3r_1+2r_2\},$$
$$\{2r_1+r_2, 3r_1+r_2, 3r_1+2r_2\}.$$

Рассмотрим первое из этих множеств. Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что если $m(x) = r_1$, а $m(y) = r_1 + r_2$, то тогда $xy \neq yx$. Таким образом, если для некоторой абелевой подгруппы A выполнено

$$m(A) \subseteq \{r_1, r_1+r_2, 3r_1+r_2, 3r_1+2r_2\},$$

то либо

$$m(A) \subseteq \{r_1, 3r_1+r_2, 3r_1+2r_2\},$$

либо

$$m(A) \subseteq \{r_1+r_2, 3r_1+r_2, 3r_1+2r_2\}.$$

Рассмотрим первый случай. С точностью до сопряжения, A совпадает с одной из следующих групп:

$$\langle X_{r_1}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle$$

либо

$$\langle \{x_{r_1}(a)x_{r_1+r_2}(a) | a \in GF(q)\}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle.$$

В любом случае, в силу теоремы 2.2.1, $|A| \leqslant q^3$. Мы не будем приводить здесь полный список больших абелевых подгрупп. Заметим, что группы

$$\langle X_{r_1}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle$$

и

$$\langle X_{r_2}, X_{r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle$$

являются большими элементарными абелевыми подгруппами группы U и порождают всю группу U. Единственной нормальной абелевой подгруппой максимального порядка является группа

$$\langle X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle.$$

Следовательно, $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^3$, $J(U) = J_e(U) = U$,

$$J_n(U) = \langle X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle$$

и $m_2(G_2(2^\alpha)) = 3\alpha$.

Характеристика равна 3 В этом случае максимальные абелевы относительно 3 подмножества множества Φ^+ лежат в следующем списке:

$$\{r_1, 2r_1 + r_2, 3r_1 + r_2, 3r_1 + 2r_2\},$$

$$\{r_1 + r_2, 2r_1 + r_2, 3r_1 + r_2, 3r_1 + 2r_2\},$$

$$\{r_2, r_1 + r_2, 2r_1 + r_2, 3r_1 + 2r_2\}.$$

Таким образом, большая абелева унипотентная подгруппа A группы $U \in \mathrm{Syl}_p(G_2(q))$ сопряжена (в U) с

$$\langle X_{r_1}, X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle,$$

либо с

$$\langle \{x_{r_1}(a)x_{r_1+r_2}(a) | a \in GF(q)\}, X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle,$$

если $m(A)$ совпадает с первым множеством. Группа A сопряжена с

$$\langle X_{r_1+r_2}, X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle,$$

если $m(A)$ совпадает со вторым множеством. Наконец, группа A сопряжена с

$$\langle X_{r_2}, X_{r_1+r_2}X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle,$$

либо с

$$\langle \{x_{r_2}(a)x_{3r_1+r_2}(a) | a \in GF(q)\}, X_{r_1+r_2}, X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle,$$

если $m(A)$ совпадает с третьим множеством. Таким образом, $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^4$, $J(U) = J_e(U) = U$,

$$J_n(U) = \langle X_{r_1+r_2}, X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle$$

и $m_3(G_2(3^\alpha)) = 4\alpha$.

Характеристика больше 3 В этом случае максимальные абелевы относительно p подмножества множества Φ^+ являются абелевыми и лежат в следующем списке:

$$\{r_1, 3r_1 + r_2, 3r_1 + 2r_2\},$$

$$\{r_2, r_1 + r_2, 3r_1 + 2r_2\},$$

$$\{r_2, 2r_1 + r_2, 3r_1 + 2r_2\},$$

$$\{r_1 + r_2, 3r_1 + r_2, 3r_1 + 2r_2\},$$

$$\{2r_1 + r_2, 3r_1 + r_2, 3r_1 + 2r_2\}.$$

Мы не будем приводить здесь полный список больших унипотентных абелевых подгрупп. Заметим лишь, что группы

$$\langle X_{r_1}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle$$

и

$$\langle X_{r_2}, X_{r_1+r_2}X_{3r_1+2r_2}\rangle$$

являются большими унипотентными элементарными абелевыми подгруппами и порождают всю группу U. Кроме того, единственная абелева нормальная подгруппа максимального порядка — это

$$\langle X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle.$$

Следовательно, $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^3$, $J(U) = J_e(U) = U$,

$$J_n(U) = \langle X_{2r_1+r_2}, X_{3r_1+r_2}, X_{3r_1+2r_2}\rangle$$

и $m_p(G_2(p^\alpha)) = 3\alpha$.

§4 Большие абелевы унипотентные подгруппы в группах ${}^3D_4(q^3)$

Поскольку все корни корневой системы D_4 имеют одинаковую длину, все константы C_{ijrs} по модулю равны 1. Следовательно, для любого p абелево относительно p подмножество множества Φ является абелевым. Ниже в таблице 2.2 приведен список максимальных абелевых подмножеств множества D_4^+. В этой таблице корню $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4$ сопоставлена четверка $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$.

Таблица 2.2. Максимальные абелевы подмножества множества D_4^+

1000 0010 0001 1111 1211	1000 0010 1110 1111 1211	1000 0001 1101 1111 1211	1000 1100 1110 1101 1111 1211	0100 1100 0110 0101 1211	0100 1100 0110 1110 1211	0100 1100 0101 1101 1211	0100 1100 1110 1101 1211	0100 0110 0101 0111 1211	0100 0110 1110 0111 1211
0100 1110 1101 0111 1211	0010 0001 0111 1111 1211	0010 0110 1110 0111 1111 1211	0001 0101 1101 0111 1111 1211	1100 0110 0101 1111 1211	1100 0110 1110 1111 1211	1100 0101 1101 1111 1211	0110 0101 0111 1111 1211	1110 1101 0111 1111 1211	0100 0101 1101 0111 1211

Мы покажем, каким образом изучаются унипотентные абелевы подгруппы группы ${}^3D_4(q^3)$, с помощью таблицы 2.2 на примере первых двух абелевых подмножеств из данной таблицы.

Пусть A — абелева подгруппа группы ${}^3D_4(q^3)$. Тогда A является абелевой подгруппой группы $D_4(q^3)$, состоящей из неподвижных точек относительно графового автоморфизма σ, соответствующего симметрии ρ корневой системы D_4. По теореме 2.2.2, множество $m(A)$ является подмножеством в одном из множеств, указанных в таблице 2.2.

Предположим, что $m(A) \subseteq \{r_1, r_3, r_4, r_1+r_2+r_3+r_4, r_1+2r_2+r_3+r_4\}$. Определим множества $X(r)$ и их элементы $x(r,t)$ также, как в доказательстве теоремы 2.2.1. Тогда из доказательства теоремы 2.2.1 следует, что $|A| \leqslant \prod_{r\in m(A)} |X(r)|$. Предположим, что $r_1 \in m(A)$. Тогда существует такой элемент $x \in A$, что $m(x) = r_1$. Поскольку элемент x является σ-неподвижным, в каноническом разложении элемента x множители $x_{r_3}(t_{r_3})$ и $x_{r_4}(t_{r_4})$ отличны от единицы. Верно и обратное утверждение, что если множители $x_{r_3}(t_{r_3})$ или $x_{r_4}(t_{r_4})$ в разложении элемента x отличны от единицы, то и множитель $x_{r_1}(t_{r_1})$ отличен от 1. Следовательно, $r_3, r_4 \notin m(A)$. Далее заметим, что $|X(r_1)| \leqslant q^3$. Корни $r_1+r_2+r_3+r_4$ и $r_1+2r_2+r_3+r_4$ являются ρ-неподвижными, следовательно, для любого элемента $x(r,t)$ (при $r = r_1+r_2+r_3+r_4$ или $r = r_1+2r_2+r_3+r_4$) справедливо $t = \bar{t} = \bar{\bar{t}} \in GF(q)$. Таким образом, $|X(r)| \leqslant q$ (при $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ или $r = r_1 + 2r_2 + r_3 + r_4$) и, значит, $|A| \leqslant q^5$. С другой стороны, группа

$$\langle \{x_{r_1}(t), x_{r_3}(\bar{t}), x_{r_4}(\bar{\bar{t}}) | t \in GF(q^3)\}, \{x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(t), x_{r_1+2r_2+r_3+r_4}(s) | t, s \in GF(q)\}\rangle$$

абелева и ее порядок равен q^5.

Предположим теперь, что $m(A) \subseteq \{r_1, r_3, r_1+r_2+r_3, r_1+r_2+r_3+r_4, r_1+2r_2+r_3+r_4\}$. Тогда непосредственным вычислением получаем, что если $m(x) = r_1$, а $m(y) = r_1 + r_2 + r_3$, то $xy \neq yx$. Следовательно, либо r_1, либо $r_1 + r_2 + r_3$ не лежат в $m(A)$. Тогда как и раньше получаем $|A| \leqslant q^5$.

Мы не будем приводить весь список больших унипотентных абелевых подгрупп в группе ${}^3D_4(q^3)$ ввиду его громоздкости. Заметим, что группы

$$\langle \{x_{r_1}(t), x_{r_3}(\bar{t}), x_{r_4}(\bar{\bar{t}}) | t \in GF(q^3)\}, \{x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(t), x_{r_1+2r_2+r_3+r_4}(s) | t, s \in GF(q)\}\rangle$$

и

$$\langle \{x_{r_1+r_2}(t), x_{r_2+r_3}(\bar{t}), x_{r_2+r_4}(\bar{\bar{t}}) | t \in GF(q^3)\}, \{x_{r_2}(t), x_{r_1+2r_2+r_3+r_4}(s) | t, s \in GF(q)\}\rangle$$

являются большими элементарными унипотентными абелевыми подгруппами группы
${}^3D_4(q^3)$ и порождают всю максимальную унипотентную подгруппу U. Единственная нормальная абелева подгруппа — это группа A, равная

$$\langle \{x_{r_1+r_2+r_3}(t) x_{r_1+r_2+r_4}(\bar{t}) x_{r_2+r_3+r_4}(\bar{\bar{t}}) | t \in GF(q^3)\},$$
$$\{x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(t), x_{r_1+2r_2+r_3+r_4}(s) | t, s \in GF(q)\}\rangle.$$

Следовательно, $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^5$, $J(U) = J_e(U) = U$, $J_n(U) = A$ и $m_p({}^3D_4(p^{3\alpha})) = 5\alpha$.

§5 Большие абелевы унипотентные подгруппы в группах $F_4(q)$ и ${}^2F_4(q)$

Строение и порядок больших унипотентных абелевых подгрупп и подгрупп Томпсона в максимальных унипотентных подгруппах групп $F_4(q)$ зависит от четности q, поэтому необходимо рассмотреть два случая.

Характеристика четна Ниже в таблице 2.3 мы приведем список всех максимальных абелевых относительно 2 подмножеств множества F_4^+. Как и в таблице 2.2 корню $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4$ соответствует четверка $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$.

Таблица 2.3. Абелевы относительно 2 подмножества множества F_4^+

1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0100	0100	0100	0120	0111
0010	0010	0010	0001	0001	0001	0011	0011	0001	0001	0001	0121	1111
0011	1110	1110	1100	0011	1111	1120	1111	1100	0111	0111	1121	1220
1120	1120	1120	1111	1111	1121	1111	1121	0111	1111	0121	0122	1221
1121	1220	1121	1121	1121	1221	1121	1122	1111	0122	0122	1221	1231
1122	1121	1122	1221	1122	1122	1122	1231	1221	1221	0122	1231	1222
1231	1231	1231	1122	1222	1222	1231	1222	1222	1222	1222	1232	1232
1232	1232	1232	1222	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1242	1242
1242	1242	1242	1232	1242	1242	1242	1242	1342	1342	1342	1342	1342
2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0100	0100	0100	0121	1111
1100	1100	1100	1100	1110	1110	1110	1110	1100	1100	1100	1121	1121
1110	1110	1110	1110	1120	1120	1111	1111	0110	0110	1110	0122	0122
1120	1120	1111	1111	1111	1111	1220	1121	1110	0111	1111	1221	1221
1111	1111	1220	1121	1220	1121	1121	1221	1220	1220	1220	1122	1122
1220	1121	1121	1221	1121	1221	1221	1122	1221	1221	1221	1231	1231
1121	1221	1221	1122	1221	1122	1231	1231	1231	1231	1231	1222	1222
1221	1122	1231	1231	1231	1231	1222	1222	1222	1222	1222	1232	1232
1231	1231	1222	1222	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1242	1242
1232	1232	1232	1232	1242	1242	1242	1242	1342	1342	1342	1342	1342
2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	1342
0100	0100	0100	0100	0100	0010	0010	0010	0010	0010	0010	0111	0111
1100	0110	0110	0110	0110	0110	0110	0011	0011	0011	0011	1111	0121
0111	0120	0120	0111	0111	1110	0120	0120	0120	1120	0121	0122	0122
1111	0111	0111	0121	0121	0120	1120	1120	0121	0121	1121	1221	1221
1220	0121	0121	1220	0122	1120	0121	0121	1121	1121	0122	1122	1122
1221	1220	0122	1221	1221	1220	1220	1121	0122	1122	1122	1231	1231
1231	1221	1221	1231	1231	1231	1231	1231	1231	1231	1231	1222	1222
1222	1231	1231	1222	1222	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232
1232	1232	1232	1232	1232	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242
1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342
2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342
0100	0100	0010	0010	0001	0001	1100	1100	0110	0011	0011	1120	0121
0110	0111	0110	1110	1100	1100	0110	0111	1110	0120	1120	0121	1220
1110	1111	0120	1120	0111	1111	1110	1111	1220	0111	1111	1121	1121
0120	0122	0121	1121	1111	1121	1120	1221	1221	0121	1121	1121	1121
1220	1221	0122	1122	1221	1221	1220	1122	1231	0122	1122	1122	1231
1221	1231	1231	1231	1122	1122	1221	1231	1222	1231	1231	1122	1231
1231	1222	1232	1232	1222	1222	1231	1222	1232	1232	1232	1232	1232
1232	1232	1242	1242	1232	1232	1232	1232	1242	1242	1242	1242	1242
1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342
2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342
0010	0010	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	1100	1110	0120
1110	0120	0011	0011	0011	0011	0111	0111	1111	0121	1110	1111	1120
0120	1120	0111	0111	1111	0121	1111	0121	1121	1121	1120	1121	0121
1120	0121	1111	0121	1121	1121	0122	0122	0122	0122	1111	1221	1220
1220	1220	0122	0122	0122	0122	1221	1221	1221	1221	1220	1122	1121
1121	1121	1122	1122	1122	1122	1122	1122	1122	1122	1121	1231	1221

1231	1231	1222	1222	1222	1222	1222	1222	1222	1222	1221	1222	1231
1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1231	1232	1232
1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1232	1242	1242
1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342
2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342
1100	1100	1100	0110	0110	0110	0110	0110	0110	0011	0011	1110	1110
1110	1110	1110	1110	0120	0120	0120	0111	0111	0111	0111	1120	1111
1120	1111	1111	0120	0111	0111	1120	0121	0121	1111	0121	1111	1220
1111	1220	1121	1120	0121	0121	0121	1220	0122	0122	0122	1121	1121
1121	1121	1221	1220	1220	0122	1220	1221	1221	1122	1122	1221	1221
1221	1221	1122	1221	1221	1221	1221	1231	1231	1231	1231	1122	1231
1122	1231	1231	1231	1231	1231	1231	1222	1222	1222	1222	1231	1222
1231	1222	1222	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232	1232
1232	1232	1232	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242	1242
1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1342
2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342	2342
0011	0011	1110	1110									
1111	0121	0120	1120									
1121	1121	1120	1111									
0122	0122	1220	1220									
1122	1122	1121	1121									
1231	1231	1221	1221									
1222	1222	1231	1231									
1232	1232	1232	1232									
1242	1242	1242	1242									
1342	1342	1342	1342									
2342	2342	2342	2342									

Ясно, что в группе $F_4(q)$ довольно много больших абелевых подгрупп (каждому абелеву относительно 2 подмножеству максимального порядка соответствует по крайней мере одна подгруппа), и мы не будем приводить здесь полный список. Обозначим через $\Psi_{i,j}$ максимальное абелево относительно 2 подмножество множества F_4^+, которое находится на пересечении i-ой строки и j-ого столбца таблицы 2.3. Тогда группы $\langle X_r | r \in \Psi_{2,1}\rangle$, $\langle X_r | r \in \Psi_{2,9}\rangle$, $\langle X_r | r \in \Psi_{3,7}\rangle$ и $\langle X_r | r \in \Psi_{5,3}\rangle$ являются большими унипотентными элементарными абелевыми подгруппами и порождают всю группу U. В группе U существует две нормальных абелевых подгруппы максимального порядка: $A_1 = \langle X_r | r \in \Psi_{2,12}\rangle$ и $A_2 = \langle X_r | r \in \Psi_{2,13}\rangle$. Следовательно, $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^{11}$, $J(U) = J_e(U) = U$, $J_n(U) = \langle A_1, A_2\rangle$ и $m_2(F_4(2^\alpha)) = 11\alpha$.

Рассмотрим теперь группу ${}^2F_4(q)$ и докажем, что $\mathbf{a}({}^2F_4(q)) = 2q^5$. Пусть A — некоторая абелева подгруппа группы ${}^2F_4(q)$. Тогда A является абелевой подгруппой группы $F_4(q)$, состоящей из σ-неподвижных элементов относительно графового автоморфизма σ. По теореме 2.2.2 множество $m(A)$ содержится в некотором максимальном абелевом относительно 2 подмножестве множества Φ^+, указанных в таблице 2.3. Рассмотрим случай, когда $m(A) \subseteq \Psi_{1,1}$, остальные возможности рассматриваются таким же образом.

Пусть $r_1 \in m(A)$. Тогда, так как группа A состоит из σ-неподвижных элементов, для любого элемента $x(r_1, t)$ множитель $x_{r_4}(t)$ из канонического разложения элемента $x(r_1, t)$ отличен от единицы. Далее, если $r_3 \in m(A)$, то для любого элемента $x(r_3, t)$ его множитель $x_{r_2}(t_{r_2})$ отличен от единицы. Но $r_2 < r_3$, следовательно, $r_2 \in m(A)$, что невозможно. Значит, $r_3 \notin m(A)$. В силу тех же рассуждений, корни $r_3 + r_4$, $r_1 + r_2 + 2r_3 + 2r_4$, $r_1 + 2r_2 + 4r_3 + 2r_4$ и $2r_1 + 3r_2 + 4r_3 + 2r_4$ также не лежат в $m(A)$. Кроме того, непосредственным вычислением получаем, что если $r_1 + r_2 + 2r_3 \in m(A)$, то для любых элементов x, y таких, что $m(x) = r_1$ и $m(y) = r_1 + r_2 + 2r_3$ справедливо $xy \neq yx$. Значит, только один из корней r_1 и $r_1 + r_2 + 2r_3$ может лежать в $m(A)$. Следовательно, $|m(A)| \leqslant 4$ и, по теореме 2.2.1, $|A| \leqslant q^4$.

Для того, чтобы привести строение больших абелевых подгрупп введем дополнительные обозначения. Если $r + \overline{r} \notin F_4$, то через $X_{\{r\}}$ обозначим группу $(X_r X_{\overline{r}})_\sigma$. Если $r + \overline{r} \in F_4$ и r — длинный, а $\overline{r}$ — короткий корни из F_4, то через $X_{\{r\}}$ обозначим группу $(X_r X_{\overline{r}} X_{r+\overline{r}} X_{r+2\overline{r}})_\sigma$. В первом случае $X_{\{r\}}$ — абелева группа порядка q, а во втором — группа $X_{\{r\}}$ изоморфна максимальной унипотентной подгруппе группы ${}^2B_2(q)$ и содержит $q-1$ большую абелеву подгруппу порядка $2q$. Тогда большие абелевы унипотентные подгруппы группы $U \in \mathrm{Syl}_p({}^2F_4(q))$ сопряжены с одной из следующих групп:

$$\langle X_{\{r_2+r_3\}}, A_1, X_{\{r_1+2r_2+2r_3\}}, X_{\{r_1+2r_2+2r_3+r_4\}}, X_{\{r_1+2r_2+3r_3+2r_4\}} \rangle$$

или

$$\langle A_2, X_{\{r_1+r_2+r_3+r_4\}}, X_{\{r_1+r_2+2r_3+r_4\}}, X_{\{r_1+2r_2+2r_3+r_4\}}, X_{\{r_1+2r_2+3r_3+r_4\}} \rangle,$$

где $A_1 \in \mathbf{A}(X_{\{r_1+r_2+2r_3\}})$, $A_2 \in \mathbf{A}(X_{\{r_1+r_2+r_3\}})$. Ясно, что эти группы нормальны в U. Тогда $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_n(U) = 2q^5$, $\mathbf{a}_e(U) = q^5$,

$$J(U) = J_n(U) = \langle X_{\{r\}} | r \succeq r_2 + r_3 \rangle,$$

$$J_e(q) = \langle X_{\{r\}} | r \succeq r_2 + r_3, r \neq r_1 + r_2 + r_3, r \neq r_1 + r_2 + 2r_3 \rangle$$

и $m_2({}^2F_4(2^\alpha)) = 5\alpha$.

Характеристика нечетна В этом случае существует 25 абелевых подмножеств множества F_4^+ порядка 9 (см. [7]), каждому из которых соответствуют различные большие абелевы подгруппы. Единственная нормальная абелева подгруппа максимального порядка — это

$$A_1 = \langle X_{r_2+2r_3+2r_4}, X_{r_1+2r_2+2r_3+r_4}, X_{r_1+r_2+2r_3+2r_4}, X_{r_1+2r_2+3r_3+r_4},$$

$$X_{r_1+2r_2+2r_3+2r_4}, X_{r_1+2r_2+3r_3+2r_4}, X_{r_1+2r_2+4r_3+2r_4}, X_{r_1+3r_2+4r_3+2r_4}, X_{2r_1+3r_2+4r_3+2r_4} \rangle.$$

Таким образом, $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^9$, $J(U) = J_e(U) = \langle X_r | r \neq r_1 \rangle$, $J_n(U) = A$ и $m_p(F_4(p^\alpha)) = 9\alpha$.

§6 Большие абелевы унипотентные подгруппы в группах $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q^2)$

Поскольку в корневой системе E_6 все корни имеют одинаковую длину, все константы C_{ijrs} по модулю равны 1. Следовательно, для любого p абелево относительно p подмножество корневой системы E_6 является абелевым. Существует лишь два абелевых подмножества множества E_6^+, порядок которых равен 16 (см. [7]). Им соответствуют подгруппы $\langle X_r | r \succeq r_1\rangle$ и $\langle X_r | r \succeq r_6\rangle$, которые являются элементарными нормальными абелевыми подгруппами. Таким образом, $J(U) = J_e(U) = J_n(U) = \langle X_r | r \succeq r_1$ или $r \succeq r_6\rangle$, $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^{16}$ и $m_p(E_6(p^\alpha)) = 16\alpha$.

Абелевы подгруппы в группе $^2E_6(q^2)$ изучаются также, как и абелевы подгруппы группы $^3D_4(q^3)$. Существует около 2000 различных абелевых подмножеств множества E_6^+. Мы не будем их здесь приводить, запишем окончательный результат. Имеем $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^{12}$,

$$J(U) = J_e(U) = \langle X_{\{r\}} | r \succeq r_3 \text{ или } r \succeq r_4\rangle,$$
$$J_n(U) = A = \langle X_{\{r\}} | r \in \Psi\rangle,$$

где

$$X_{\{r\}} = (X_r X_{\overline{r}})_\sigma$$

и $m_p(^2E_6(p^{2\alpha})) = 12\alpha$. При этом $\Psi = \{r_1 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6, r_1 + r_2 + r_3 + 2r_4 + r_5, r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6, r_2 + r_3 + 2r_4 + r_5 + r_6, r_1 + r_2 + 2r_3 + 2r_4 + r_5, r_1 + r_2 + r_3 + 2r_4 + r_5 + r_6, r_2 + r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6, r_1 + r_2 + 2r_3 + 2r_4 + r_5 + r_6, r_1 + r_2 + r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6, r_1 + r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6, r_1 + r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_6, r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_6\}$.

§7 Большие абелевы унипотентные подгруппы в группах $E_7(q)$

Вновь для любого p абелево относительно p подмножество корневой системы E_7 является абелевым. Существует лишь одно абелево подмножество максимального порядка 27 (см. [7]). Ему соответствует единственная элементарная нормальная абелева подгруппа A порядка q^{27}. Таким образом, $J(U) = J_e(U) = J_n(U) = A = \langle X_r | r \succeq r_7\rangle$, $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^{27}$ и $m_p(E_7(p^\alpha)) = 27\alpha$.

§8 Большие абелевы унипотентные подгруппы в группах $E_8(q)$

Поскольку все корни корневой системы E_8 имеют одинаковую длину, константы C_{11rs} по модулю равны 1 для любых двух корней r и s. Таким образом, для любого простого p абелево относительно p подмножество корневой системы E_8 является абелевым. Абелевы подмножества максимального порядка приведены в работе [7]. Мы не будем приводить здесь все абелевы подмножества множества E_8^+ максимального порядка. Отметим лишь, что $\mathbf{a}(U) = \mathbf{a}_e(U) = \mathbf{a}_n(U) = q^{36}$, $J(U) = J_e(U) = \langle X_r | r \succeq r_1, r \succeq r_3, r \succeq r_4, r \succeq r_5$ или $r \succeq r_6\rangle$ и $m_p(E_8(p^\alpha)) = 36\alpha$. Из-за громоздкой записи мы также не будем приводить строение группы $J_n(U)$.

§9 Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле. Итоговая таблица

Здесь мы приведем порядки больших унипотентных абелевых подгрупп в конечных исключительных группах лиева типа (кроме групп $^2B_2(q)$ и $^3G_2(q)$), а также строение подгрупп Томпсона. Везде в таблице мы полагаем, что $q = p^\alpha$.

Таблица 2.4. Порядки больших абелевых унипотентных подгрупп, p-ранги и подгруппы Томпсона максимальных унипотентных подгрупп конечных исключительных групп лиева типа

Группа G	$\mathbf{a}(U)$	$\mathbf{a}_e(U)$	$\mathbf{a}_n(U)$	$J(U)$	$m_p(G)$
$G_2(q)$, $p \neq 3$	q^3	q^3	q^3	U	3α
$G_2(q)$, $p = 3$	q^4	q^4	q^4	U	4α
${}^3D_4(q^3)$	q^5	q^5	q^5	U	5α
$F_4(q)$, q нечетно	q^9	q^9	q^9	$\langle X_r \| r \neq r_1\rangle$	9α
$F_4(q)$, q четно	q^{11}	q^{11}	q^{11}	U	11α
${}^2F_4(q)$	$2q^5$	q^5	$2q^5$	$\langle X_{\{r\}} \| r \succeq r_2 + r_3\rangle$	5α
$E_6(q)$	q^{16}	q^{16}	q^{16}	$\langle X_r \| r \succeq r_1$ или $r \succeq r_6\rangle$	16α
${}^2E_6(q^2)$	q^{12}	q^{12}	q^{12}	$\langle X_{\{r\}} \| r \succeq r_3$ или $r \succeq r_4\rangle$	12α
$E_7(q)$	q^{27}	q^{27}	q^{27}	$\langle X_r \| r \succeq r_7\rangle$	27α
$E_8(q)$	q^{36}	q^{36}	q^{36}	$\langle X_r \| r \succeq r_1, r \succeq r_3, r \succeq r_4, r \succeq r_5$ или $r \succeq r_6\rangle$	36α

§10 Большие абелевы подгруппы спорадических групп

В данном параграфе используются обозначения и определения, принятые в [25].

Если A — абелева подгруппа некоторой спорадической группы G, то A содержится в некоторой максимальной подгруппе группы G. Строение максимальных подгрупп во всех спорадических группах, кроме групп Fi_{22}, Th, Fi_{23}, J_4, Fi'_{24}, B и M, приведено в [25]. Изучая максимальные подгруппы и строение их больших абелевых подгрупп можно получить оценку порядка больших абелевых подгрупп во всех спорадических группах, кроме пяти наибольшего порядка, отмеченных выше. Максимальные подгруппы в группе Fi_{22} описаны в работах [32] и [33]. В группе Th описание максимальных подгрупп получил Линтон в работах [35] и [36]. Максимальные подгруппы в группе Fi_{23} нашли Клейдман, Паркер и Уилсон в работе [31]. Максимальные подгруппы группы J_4 изучены в работе [34]. Группы Fi_{24} и Fi'_{24} изучили Линтон и Уилсон в работе [37]. Строение максимальных подгрупп в группе B приведено в недавней работе [46]. Строение группы M будет изучаться отдельно.

Рассмотрим группу M_{11}. Если H — максимальная подгруппа группы M_{11}, то, с точностью до сопряжения, H совпадает с одной из следующих групп: $M_{10} \cong (A_6){\cdot}2$, $L_2(11)$, $(3^2 : Q_8).2$, S_5 и $2 : S_4$. Предположим, что группа из $\mathbf{A}(M_{11})$ содержится в максимальной подгруппе, сопряженной с $M_{10} \cong (A_6){\cdot}2$. Тогда все абелевы подгруппы группы A_6 имеют порядок 2, 3, 4, 5 или 9. Если A — абелева подгруппа группы $(A_6){\cdot}2$, то в A существует подгруппа A_1 индекса не более, чем 2, которая лежит в A_6. Если

A_1 — 2-группа, то $|A| \leqslant 8$. Если A_1 — 3-группа и она не совпадает с A, то тогда группа A содержит элемент порядка 6 и лежит в централизаторе этого элемента. В группе M_{11} существует единственный элемент порядка 6 и порядок его централизатора равен 6, следовательно, в этом случае $|A| = 6$. Если A_1 — 3-группа и $A_1 = A$, то порядок группы A не превосходит 9. Наконец, если порядок A_1 равен 5 и A_1 не совпадает с A, то в A существует элемент порядка 10. Но в M_{11} нет элементов порядка 10, значит, такой случай невозможен. Таким образом, когда порядок группы A_1 равен 5, A_1 совпадает с A и порядок группы A равен 5. Следовательно, число $\mathbf{a}(M_{10})$ равно 9.

Предположим, что группа из $\mathbf{A}(M_{11})$ лежит в $L_2(11)$. Тогда, в силу таблицы 3.2 (напомним, что группа $L_n(q)$ соответствует группе $A_{n-1}(q)$ из таблицы 3.2), $\mathbf{a}(L_2(11)) = 11$ и, кроме того, группа из $\mathbf{A}(L_2(11))$ единственна с точностью до сопряжения. Значит, если группа из $\mathbf{A}(M_{11})$ лежит в $L_2(11)$, то $\mathbf{c}_a(M_{11}) = 1$.

Пусть группа из $\mathbf{A}(M_{11})$ лежит в $M_9 : 2 \cong (3^2 : Q_8)_{\cdot}2$. Порядки больших абелевых 2-подгрупп и 3-подгрупп группы $(3^2 : Q_8)_{\cdot}2$ не превосходят, соответственно 8 и 9. Если абелева группа содержит элемент порядка 2 и элемент порядка 3, то она содержит элемент порядка 6 и, как уже замечалось ранее, ее порядок не превосходит 6. Таким образом, $\mathbf{a}(M_9 : 2) = 9$.

Если группа из $\mathbf{A}(M_{11})$ лежит в S_5, то, в силу таблицы 2.1, $\mathbf{a}(S_5) = 6$, значит, в этом случае $\mathbf{a}(M_{11}) = 6$. Предположим, наконец, что группа из $\mathbf{A}(M_{11})$ лежит в группе $M_8 : S_3 \cong 2{\cdot}S_4$. Тогда, если $A \in \mathbf{A}(2{\cdot}S_4)$ — 2-группа, то ее порядок не превосходит 8, если $A \in \mathbf{A}(2{\cdot}S_4)$ — 3-группа, то ее порядок не превосходит 3. Если же в $A \in \mathbf{A}(2{\cdot}S_4)$ существует элемент порядка 2 и существует элемент порядка 3, то в ней существует элемент порядка 6, и, значит, $|A| = 6$. Таким образом, $\mathbf{a}(M_{11}) = \mathbf{a}(L_2(11))$ и $\mathbf{c}_a(M_{11}) = 1$.

Оценки порядков больших абелевых подгрупп в остальных спорадических группах получаются аналогичными рассуждениями и мы приведем их в одной таблице без такого подробного разбора, как в случае группы M_{11}. Заметим, что рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при изучении порядка большой абелевой подгруппы в группе M_{11} не всегда дают точную оценку. Более того, даже в том случае, когда полученная оценка точна, т. е., когда существует абелева подгруппа, порядок которой совпадает оценкой, не всегда удается найти количество всевозможных несопряженных больших абелевых подгрупп. Поэтому в приведенной ниже таблице в колонке строение групп из $\mathbf{A}(G)$ указано строение лишь в тех случаях, когда удалось найти все несопряженные большие абелевы подгруппы. В том случае, когда порядок большой абелевой подгруппы точно указать не удается приводится полученная оценка сверху и известная оценка снизу, т. е. наибольший известный порядок абелевой подгруппы.

Рассмотрим отдельно группу M. Пусть A — ее некоторая абелева подгруппа. В группе M существует подгруппа $(2_+^{1+24}){\cdot}Co_1$, содержащая силовскую 2-подгруппу. Порядок абелевой подгруппы в группе 2_+^{1+24} не превосходит 2^{13}, из таблицы 2.5 видно, что порядок абелевой 2-подгруппы в группе Co_1 не превосходит 2^{11}, следовательно, порядок абелевой 2-подгруппы в группе M не превосходит 2^{24}. Далее, в группе M существует подгруппа $(3_+^{1+12}){\cdot}2Suz : 2$, содержащая силовскую 3-подгруппу группы M. Порядок абелевой подгруппы в группе 3_+^{1+12} не превосходит 3^7, из таблицы 2.5 видно, что порядок абелевой 3-подгруппы группы Suz не превосходит 3^5, следовательно, порядок абелевой 3-подгруппы группы M не превосходит 3^{12}. Кроме того, в группе M существует подгруппа $5^{1+6} : 4J_{\cdot 2}2$, содержащая силовскую 5-подгруппу группы

M. Порядок абелевой подгруппы в группе 5^{1+6} не превосходит 5^4, порядок абелевой 5-подгруппы в группе J_2 не превосходит 5^2, поэтому порядок абелевой 5-подгруппы группы M не превосходит 5^6. Для всех остальных простых чисел p, делящих порядок группы M, справедливо утверждение, что $S \in \mathrm{Syl}_p(M)$, то $|S| < 2^{24}$. Поэтому если группа из $\mathbf{A}(M)$ является абелевой p-подгруппой ($p \geqslant 7$), то $\mathbf{a}(M) \leqslant 2^{24}$.

Предположим теперь, что порядок группы A делится на 2 и 3. Тогда группа A лежит в централизаторе некоторого элемента порядка 3. Из [25] следует, что A лежит в одной из следующих групп: $3{\cdot}Fi_{24}$, $(3_+^{1+12}){\cdot}2Suz : 2$ или $S_3 \times Th$. Нетрудно заметить, что и в этом случае $|A| < 2^{24}$. Если порядок группы A делится на 2 и на 5, то A содержится в централизаторе некоторого элемента порядка 10. Из [25] следует, что A содержится в одной из следующих групп: $(D_{10} \times HN){\cdot}2$, либо в $5_-^{1+6} : 4J_2{\cdot}2$. Вновь, используя информацию о больших абелевых подгруппах из таблицы 2.5, легко проверить, что $|A| < 2^{24}$. Если порядок группы A делится на два некоторых простых числа p_1 и p_2, одно из которых больше 5, то в A лежит центральный элемент порядка $p_1 \cdot p_2$ и, значит, группа A содержится в некотором централизаторе элемента порядка $p_1 \cdot p_2$. Изучение порядков централизаторов таких элементов сразу влечет, что $|A| < 2^{24}$. Если, наконец, порядок группы A делится на 3 и 5, то группа A содержит элемент порядка 15, значит, A лежит в централизаторе некоторого элемента порядка 15. Но порядки централизаторов всех таких элементов меньше, чем 2^{24}. Таким образом, $\mathbf{a}(M) \leqslant 2^{24}$. Заметим, что в группе M существует подгруппа 2^{10+16}, поэтому в группе M существует абелева подгруппа порядка 2^{18}. Таким образом, мы доказали, что $2^{18} \leqslant \mathbf{a}(M) \leqslant 2^{24}$.

Таблица 2.5. Большие абелевы подгруппы спорадических групп

группа G	$\mathbf{a}(G)$	строение	группа G	$\mathbf{a}(G)$	строение
M_{11}	$\mathbf{a}(M_{11}) = 11$	11	$O'N$	$\mathbf{a}(O'N) = 81$	3^4
M_{12}	$\mathbf{a}(M_{12}) = 16$	4^2	Co_3	$\mathbf{a}(Co_3) = 3^5$	—
J_1	$\mathbf{a}(J_1) = 19$	19	Co_2	$2^{10} \leqslant \mathbf{a}(Co_2) \leqslant 2^{11}$	—
M_{22}	$\mathbf{a}(M_{22}) = 16$	$2^4, ?$	Fi_{22}	$\mathbf{a}(Fi_{22}) = 2^{10}$	—
J_2	$\mathbf{a}(J_2) = 25$	5^2	HN	$125 \leqslant \mathbf{a}(HN) \leqslant 512$	—
M_{23}	$\mathbf{a}(M_{23}) = 23$	23	Ly	$\mathbf{a}(Ly) = 3^5$	—
HS	$\mathbf{a}(HS) = 64$	4^3	Th	$\mathbf{a}(Th) = 3^6$	—
J_3	$\mathbf{a}(J_3) = 27$	3^3 и 9×3	Fi_{23}	$\mathbf{a}(Fi_{23}) = 2^{11}$	—
M_{24}	$\mathbf{a}(M_{24}) = 64$	—	Co_1	$\mathbf{a}(Co_1) = 2^{11}$	—
M^cL	$\mathbf{a}(M^cL) = 81$	3^4	J_4	$\mathbf{a}(J_4) = 2^{11}$	—
He	$\mathbf{a}(He) = 64$	—	Fi'_{24}	$3^7 \leqslant \mathbf{a}(Fi'_{24}) \leqslant 3^9$	—
Ru	$2^7 \leqslant \mathbf{a}(Ru) \leqslant 2^9$	—	B	$2^{17} \leqslant \mathbf{a}(B) \leqslant 2^{20}$	—
Suz	$\mathbf{a}(Suz) = 3^5$	—	M	$2^{18} \leqslant \mathbf{a}(M) \leqslant 2^{24}$	—

Глава 3

Абелевы подгруппы максимального порядка конечных групп Шевалле

§1 Вспомогательные результаты

Лемма 3.1.1. *Пусть $R = S * M$ — σ-инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга связной простой алгебраической группы G, где S — центральный тор, а M — полупростая подгруппа в G. Пусть простые компоненты группы M_σ — это $G_1, \ldots, G_k$. Пусть $z_{i,j} = |Z(G_i) \cap Z(G_j)|$, $z_i = |Z(G_i) \cap S_\sigma|$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = G_1 * \ldots * G_k$, $R_1 = G_1 * \ldots * G_k * S_\sigma$ — нормальная подгруппа группы R_σ и $|R_\sigma : R_1| \leqslant \prod_{i \neq j} z_{i,j} \prod_i z_i$.*

Доказательство. Равенство $O^{p'}(R_\sigma) = G_1 * \ldots * G_k * (S_\sigma)$ и нормальность группы R_1. хорошо известно, поэтому докажем лишь второе неравенство. В работе [26, предложение 2.4.2] доказано, что $|R_\sigma| = |M_\sigma| \cdot |S_\sigma| = |G_1| \cdot \ldots \cdot |G_k| \cdot |S_\sigma|$. Поскольку $G_i \cap G_j = Z(G_i) \cap Z(G_j)$ при $i \neq j$, $|G_1 * \ldots * G_k * (S_\sigma)| \leqslant |R_\sigma| / (\prod_{i \neq j} z_{i,j} \prod_i z_i)$, откуда немедленно следует требуемое неравенство. ⊠

Далее мы докажем вспомогательный результат, который будет использоваться при изучении абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле.

Лемма 3.1.2. *Пусть G — связная редуктивная линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем характеристики p, R — ее редуктивная (не обязательно связная) подгруппа максимального ранга, причем $(|R : R^0|, p) = 1$, $s \in R^0$ — некоторый полупростой элемент, и T — произвольный максимальный тор в R^0, содержащий элемент s. Тогда группа $C_R(s)$ редуктивна (хотя не обязательно связна). Она порождается тором T вместе с теми корневыми подгруппами U_α, для которых $\alpha(s) = 1$, и теми представителями элементов группы Вейля $n_w \in N_R(T)$, которые коммутируют с s. Компонента единицы $C_R(s)^0$ порождается тором T и теми U_α, для которых $\alpha(s) = 1$. В частности, группа $C_R(s)/C_R(s)^0$ изоморфна некоторой секции группы Вейля для G. Более того, все унипотентные элементы из $C_R(s)$ лежат в $C_R(s)^0$.*

Доказательство. Зафиксируем подгруппу Бореля B группы R^0, содержащую T. Ясно, что все указанные в лемме порождающие лежат в $C_R(s)$. Докажем, что $C_R(s)$ порождается указанными в лемме элементами. Покажем сначала, что в группе R

(которая не обязательно связна) имеет место разложение Брюа. Пусть x — произвольный элемент из R. Тогда B^x — некоторая подгруппа Бореля группы R^0. В силу леммы 1.4.1 существует такой элемент $r \in R^0$, что $B^x = B^r$. Тогда элемент xr^{-1} нормализует подгруппу B. Тор $T^{xr^{-1}}$ является максимальным тором группы B. Поскольку все максимальные торы в B сопряжены (лемма 1.4.1), существует такой элемент g из B, что $T^{xr^{-1}} = T^g$. Поэтому можно считать, что xr^{-1} нормализует тор T. Тогда $xr^{-1} = n_w t$ для некоторых $n_w \in N_R(T)$, $t \in T$. Поскольку t нормализует B и xr^{-1} нормализует B, элемент n_w также нормализует B, значит, он нормализует U — максимальную (связную) унипотентную подгруппу группы B. Поскольку r лежит в R^0, для него существует разложение Брюа, т. е. он представим в виде $u_1 n_{w_1} t_1 v_1$, где $u_1 \in U \cap n_{w_1} U^- n_{w_1}^{-1}$, $n_{w_1} \in N_{R^0}(T)$, $t \in T$ и $v_1 \in U$. Поэтому элемент x представим в виде $x = n_w t u_1 n_{w_1} t_1 v_1$. Поскольку элементы t и n_w нормализуют U, мы получаем представление элемента x в виде $x = u_2 n_{w_2} t_2 v_2$, причем $u_2 \in U \cap n_{w_2} U^- n_{w_2}^{-1}$, $n_{w_2} \in N_R(T)$, $t_2 \in T$ и $v_2 \in U$. Поскольку это разложение Брюа совпадает с разложением Брюа элемента x в группе G, такое разложение единственно.

Если $x \in C_R(s)$, то с помощью разложения Брюа можно записать $x = u n_w t v$, где $v \in U$, $t \in T$, $u \in U \cap n_w U^- n_w^{-1}$. Поскольку s нормализует U, $N(T)$, U^- и коммутирует с x единственность разложения влечет, что каждый из u, n_w, v коммутирует с s. Более того, поскольку s нормализует каждую корневую подгруппу U_α, единственность разложения группы U в произведение корневых подгрупп U_α ($\alpha > 0$) влечет, что $\alpha(s) = 1$ как только u или v содержит нетривиальный множитель из U_α. Таким образом, x лежит в группе, порожденной тором T и теми U_α, n_w, которые перестановочны с s.

Поскольку T и все U_α с $\alpha(s) = 1$ связны, то подгруппа H, порожденная ими, замкнута, связна и нормальна в $C_R(s)$. Так как группа Вейля конечна, $|C_R(s) : H| < \infty$, значит, $H = C_R(s)^0$.

Так как корни группы $C_R(s)$ относительно тора T возникают парами (т. е. если $\alpha(s) = 1$, то и $-\alpha(s) = 1$), группа $C_R(s)$ редуктивна. Действительно, если $C_R(s)$ имеет нетривиальный унипотентный радикал V, то он нормализуется тором T, значит, содержит некоторую корневую подгруппу U_α. V нормализуется корневой группой $U_{-\alpha}$, что дает неунипотентный элемент в V, противоречие.

Поскольку $(|R : R^0|, p) = 1$, все унипотентные элементы из группы R лежат в R^0, поэтому все унипотентные элементы из $C_R(s)$ лежат в $C_{R^0}(s)$. Тот факт, что в связной редуктивной группе R^0 любой унипотентный элемент из $C_{R^0}(s)$ лежит в $C_{R^0}(s)^0$ хорошо известен, см. например [30, теорема 2.2]. ⊠

Пусть x — полупростой элемент в связной редуктивной линейной алгебраической группе G . Тогда, в силу предыдущей леммы, $C_G(x)^0$ — связная редуктивная подгруппа максимального ранга и $[C_G(x)^0, C_G(x)^0]$ — полупростая группа, корневая система которой является аддитивно замкнутой подсистемой корневой системы группы G. Такие подгруппы в дальнейшем будут называться *подсистемными* подгруппами. Поскольку в данной работе изучаются конечные группы, особый интерес представляют элементы простого порядка $r \neq p$. Оказывается, что имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1.3. *[29, 4.1] Пусть G — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, и элемент $x \in G$*

имеет простой порядок $r \neq p$. Пусть $C' = [C_G(x)^0, C_G(x)^0]$ — подсистемная подгруппа. Если Δ — диаграмма Дынкина корневой системы группы C', то справедливо одно из следующих утверждений:

1. *Δ получается удалением вершин из диаграммы Дынкина группы G;*

2. *Δ получается из расширенной диаграммы Дынкина группы G удалением одной вершины r_i, где $r = c_i$ — коэффициент при корне r_i в разложении корня r_0.*

В частности, если r не является плохим простым числом для группы G, то $\dim(Z(C_G(x)^0)) \geqslant 1$.

Далее напомним алгоритм нахождения всех подсистем системы корней Φ, принадлежащий Борелю и ди Зибенталю [16]. Рассматривается расширенная диаграмма Дынкина системы Φ. Диаграммы всех возможных подсистем системы Φ получаются вычеркиванием некоторого количества вершин из расширенной диаграммы Дынкина для Φ и повторением указанной процедуры для каждой полученной компоненты связности.

Лемма 3.1.4. *[22, теоремы 11.3.2, 14.5.1 и 14.5.2] Справедливы следующие изоморфизмы:*
1) $A_{n-1}(q) \cong L_n(q) \cong PSL_n(q)$, $n \geqslant 2$;
2) $B_n(q) \cong P\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geqslant 3$;
3) $C_n(q) \cong PSp_{2n}(q)$, $n \geqslant 2$;
4) $D_n(q) \cong P\Omega^+_{2n}(q)$, $n \geqslant 4$;
5) ${}^2D_n(q^2) \cong P\Omega^-_{2n}(q)$, $n \geqslant 4$;
6) ${}^2A_n(q^2) \cong PSU_{n+1}(q^2)$, $n \geqslant 2$;
7) $B_2(3) \cong {}^2A_3(2^2)$, $B_n(2^\alpha) \cong C_n(2^\alpha)$, $B_2(q) \cong C_2(q)$.

Следующая лемма объединяет результаты, полученные в [13], [14], [48] и [49]. Случаи ортогональных групп малой размерности, не указанные в ней, можно найти в [48].

Лемма 3.1.5. *Пусть $q = p^\alpha$. Тогда*
1) $\mathbf{a}_p(GL_n(q)) = q^{[\frac{n^2}{4}]}$;
2) $\mathbf{a}_p(Sp_{2n}(q)) = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$;
3) $\mathbf{a}_p(O_{2n+1}(q)) = q^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$ при $n \geqslant 3$, $p \neq 2$;
4) $\mathbf{a}_p(O^+_{2n}(q)) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ при $n \geqslant 4$;
5) $\mathbf{a}_p(O^-_{2n}(q)) = q^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+2}$ при $n \geqslant 5$;
6) $\mathbf{a}_p(O^-_8(q)) = q^6$;
7) $\mathbf{a}_p(U_n(q^2)) = q^{[\frac{n^2}{4}]}$.

Лемма 3.1.6. *[28] Пусть V — n-мерное векторное пространство над конечным полем $GF(q)$, $G \leqslant GL(V)$, $H \lhd G$, $(|G/H|, q) = 1$, ступень нильпотентности G/H не превосходит 2. Тогда*
1) $|G/H| < q^n$;
2) Если G сохраняет невырожденную билинейную форму f на V, то $|G/H| \leqslant 2^{\varepsilon(n)}\delta^{[\frac{n}{2}]}$, где

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \text{ или } n \text{ четное,} \\ 1, & \text{если } q \text{ и } n \text{ нечетные,} \end{cases} \delta = \begin{cases} 8, & \text{если } q = 3 \text{ или } 5, \\ 1+q & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 3.1.7. *[28, лемма 1.1] Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $GF(q)$. Пусть A — подгруппа группы $GL(V)$ и $(|A|, q) = 1$. Тогда пространство V разлагается в прямую сумму собственных неприводимых A-подмодулей.*

Лемма 3.1.8. *[28, лемма 1.2] Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $GF(q)$ и f — невырожденная билинейная форма на V. Если A является подгруппой группы $GL(V)$, A сохраняет f и $(|A|, q) = 1$, то $V = C_V(A) \oplus^{\perp} [V, A]$ — ортогональная прямая сумма A-подмодулей $C_V(A) = \{v \in V \mid va = v$ для всех $a \in A\}$ и $[V, A] = \{va - v \mid v \in V,\ a \in A\}$.*

Лемма 3.1.9. *Пусть G — связная редуктивная линейная алгебраическая группа, A — ее замкнутая абелева подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа A представима в виде $A_s \times A_u$ — прямого произведения своей полупростой и унипотентной частей соответственно.*

2. *Существует такая редуктивная подгруппа R максимального ранга группы G, что $A \leqslant R$, $A_u \leqslant R^0$ и $A_s \cap R^0 = A_{s0} \leqslant Z(R^0)$.*

3. *Если $W_R = N_R(T)/T$, $W_{R0} = N_{R^0}(T)/T$ для некоторого максимального тора T группы R, то группа A_s/A_{s0} изоморфно вкладывается в группу W_R/W_{R0}.*

Если A σ-инвариантна, то R σ-инвариантна.

Доказательство. 1. Доказано в [9, 15.5].

2. Пусть s — некоторый полупростой элемент из A_s. Положим $R = C_G(s)$. Ясно, что $A \leqslant R$. В силу леммы 3.1.2 $A_u \leqslant R^0$ и R^0 — связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы G. В силу леммы 3.1.2 $(|R : R^0|, p) = 1$. Если существует такой полупростой элемент $s_1 \in A_s$, что $s_1 \in R^0$, но $s_1 \notin Z(R^0)$, то рассмотрим $C_R(s_1)$. Ясно, что $A \leqslant C_R(s_1)$. В силу леммы 3.1.2, $C_R(s_1)^0$ — связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы G. Как и раньше $A_u \leqslant C_R(s_1)^0$. Заменяя группу R на $C_R(s_1)$, получим редуктивную подгруппу максимального ранга группы G, содержащую группу A, меньшей размерности. Размерность действительно уменьшается, поскольку уменьшается размерность компоненты единицы. Указанный выше процесс конечен, поскольку на каждом шаге размерность уменьшается, а размерность группы G конечна. Отметим, что если A — абелева подгруппа некоторой конечной группы лиева типа, то A состоит из неподвижных точек относительно некоторого автоморфизма Фробениуса σ, и поэтому группы, получаемые на каждом шаге указанного выше процесса, σ-инвариантны. Следовательно, если $A \leqslant G_\sigma$, то группа R является σ-инвариантной.

3. Имеем $A_s/A_{s0} \cong A_sR^0/R^0 \leqslant R/R^0$. В силу доказательства леммы 3.1.2 любой элемент из R можно представить в виде $n_w x$, где $x \in R^0$, следовательно, группа R/R^0 изоморфна группе $N_R(T)/N_{R^0}(T) \cong W_R/W_{R0}$ для любого максимального тора T из R^0. ⊠

Отметим в качестве простого следствия леммы 3.1.9, что если $\Phi_R = \Phi$, то $A_s = A_{s0} \leqslant Z(G)$. Действительно, редуктивная группа R, о которой говорится в лемме, в этом случае совпадает с G (и совпадает с R^0), но $A_s \cap R^0 = A_s \leqslant Z(R^0)$.

В лемме 3.1.9 возникают секции группы Вейля, поэтому необходимо найти порядки больших абелевых подгрупп в группах Вейля для всех классических простых алгебраических групп. Кроме того, в дальнейшем часто будет возникать ситуация, когда некоторая полупростая абелева подгруппа является множеством неподвижных точек относительно автоморфизма Фробениуса некоторого тора T размерности n. Для оценки порядков таких подгрупп нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.1.10. *Пусть S — σ-инвариантный тор связной простой алгебраической группы G, и его размерность равна n. Здесь $\sigma = q\sigma_0$ — некоторый автоморфизм Фробениуса. Пусть S^g — некоторый сопряженный с ним σ-инвариантный тор группы G. Пусть $X(S)$ — группа рациональных характеров тора S. Тогда существует такой элемент w из группы Вейля W группы G, что $X(S)^w \subseteq X(S)$, и группа $(S^g)_\sigma$ изоморфна группе $X(S)/(\sigma w - 1)X(S)$. В частности, поскольку элемент $\sigma_0 w$ имеет конечный порядок, $|(S^g)_\sigma| \leqslant (q+1)^n$.*

Доказательство. Поскольку тор S σ-инвариантен, его централизатор C в группе G — связная σ-инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга. Тогда группа C^g также σ-инвариантна. Группы C и C^g содержат некоторые σ-инвариантные максимальные торы T и T_1 [42, 10.10], без ограничения общности можно считать, что они также сопряжены с помощью элемента g. Пусть W_1 — группа Вейля группы C. В [20, следствие предложения 2] утверждается, что тогда элемент $g^\sigma g^{-1}$ лежит в $N_G(T)$, а его образ относительно канонического гомоморфизма группы $N_G(T)$ на группу Вейля лежит в $N_W(W_1)$. Предложение 8 из [20] утверждает, что тогда $(T^g)_\sigma \cong X(T)/(\sigma w - 1)X(T)$. Поскольку $S \leqslant Z(C)$, S лежит в T. В силу взаимно однозначного соответствия между замкнутыми подгруппами тора T и подгруппами его группы характеров $X(T)$ [15, глава III] имеем $(S^g)_\sigma \cong X(S)/(\sigma w - 1)X(S)$. ⊠

В таблице 3.1 ниже мы приведем порядки больших абелевых подгрупп в группах Вейля классических простых групп. Группа $W(A_n)$ изоморфна группе S_{n+1}, порядки и строение больших абелевых подгрупп в этой группе приведены в таблице 2.1, и мы приведем их в таблице 3.1 без доказательства.

Группы $W(B_n)$ и $W(C_n)$ изоморфны, поэтому мы рассмотрим лишь группу $W(B_n)$. Если Φ — корневая система типа B_n, и $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства, в котором лежит система B_n, то тогда Φ можно записать в виде $\{\pm e_i \pm e_j, i \neq j, \pm e_i; i, j = 1, \ldots, n\}$. Группа Вейля $W(B_n)$ действует точно на множестве $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ из $2n$ векторов. Пусть A — некоторая абелева подгруппа группы $W(B_n)$, тогда $I_1, \ldots, I_k$ — все A-орбиты на множестве $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$. Рассмотрим группу G преобразований евклидова пространства, натянутого на вектора $e_1, \ldots, e_n$, относительно которой множество $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ инвариантно. Ясно, что $W(B_n) \leqslant G$. Более того, сравнение порядков групп $W(B_n)$ и G показывает, что они изоморфны, но нам не требуется изоморфность этих групп. Найдем $\mathbf{a}(G)$ и докажем, что $\mathbf{a}(G) = \mathbf{a}(W(B_n))$. Из доказательства теоремы 2.1.1 следует, что $|A| \leqslant |I_1| \times \ldots \times |I_k|$. Пусть $f(2n)$ — порядок большой абелевой подгруппы в группе G.

Предположим, что среди множеств $I_1, \ldots, I_k$ имеются множества нечетного порядка. Без ограничения общности можно считать, что таким множеством является множество I_1, и базисный вектор e_1 лежит в I_1. Тогда вектор $-e_1$ не лежит в множестве I_1. Действительно, предположим, что вектор $-e_1$ лежит в I_1. Тогда в группе

A существует элемент σ, переводящий e_1 в $-e_1$. Следовательно, порядок элемента σ четен, и можно считать, что σ — 2-элемент. Кроме того, σ не лежит в стабилизаторе орбиты I_1 в A — $St_A(I_1)$. Значит, его образ относительно естественного гомоморфизма $\varphi : A \to A/St_A(I_1)$ также имеет четный порядок. Но $|A/St_A(I_1)| = |I_1|$ нечетен, противоречие. Таким образом, элемент $-e_1$ лежит в некотором другом множестве, без ограничения общности можно считать, что это множество I_2. Так как G является группой линейных преобразований евклидова пространства, для любого $\sigma \in G$ справедливо $\sigma(-e_1) = -\sigma(e_1)$. Поскольку группа A действует транзитивно на множествах $I_1, \ldots, I_k$ отсюда следует, что если $\sigma \in St_A(I_1)$, то $\sigma \in St_A(I_1) \cap St_A(I_2)$ и для любого $v \in I_1$ вектор $-v$ лежит в I_2. Пусть $m = |I_1| = |I_2|$. Тогда, в силу предыдущих рассуждений, $|A| \leqslant m \cdot f(2n - 2m)$.

Рассмотрим группу A_1, которая на орбитах $I_3, \ldots, I_k$ действует также, как группа A, а множество $I_1 \cup I_2$ относительно действия группы A_1 распадается на орбиты из двух элементов — $\pm v$. По построению группа A_1 лежит в G, и группа A_1 абелева. Кроме того, $|A| = m \cdot |St_A(I_1)| < 2^m \cdot |St_A(I_1)| = |A_1|$. Поэтому относительно действия группы $A \in A(G)$ множество $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ распадается на орбиты четного порядка. С помощью индукции по n покажем, что все орбиты имеют порядок 2 или 4 и, следовательно, $f(2n) \leqslant 2^n$. Действительно, если порядок некоторой орбиты группы A равен $2m$, $m \geqslant 3$, то тогда, как и в нечетном случае, можно построить абелеву подгруппу порядка $2^m \cdot 2^{n-m}$, откуда $|A| \leqslant 2m \cdot 2^{n-m} < 2^m \cdot 2^{n-m}$. Поэтому $f(2n) \leqslant 2^n$. С другой стороны, существует абелева подгруппа группы $W(B_n)$, и, значит, группы G, переводящая e_i в $-e_i$ для всех i. Ее порядок равен 2^n, значит, $\mathbf{a}(W(B_n)) = 2^n$.

Заметим, что $W(D_n)$ изоморфно вкладывается в группу $W(B_n)$ как подгруппа индекса 2, поэтому $\mathbf{a}(W(D_n)) \leqslant \mathbf{a}(W(B_n))$.

Таблица 3.1. Большие абелевы подгруппы в группах Вейля

тип группы G	$\mathbf{a}(W)$
A_n	3^k, если $n = 3k - 1$ $4 \cdot 3^{k-1}$, если $n = 3k$ $2 \cdot 3^k$, если $n = 3k + 1$
$B_n,\ C_n,\ D_n$	$\leqslant 2^n$

Далее напомним строение σ-неподвижных точек редуктивных σ-инвариантных подгрупп максимального ранга в линейных простых алгебраических группах.

Лемма 3.1.11. *[20, предложения 1, 2, 6 и 8] Пусть G — простая связная линейная алгебраическая группа, σ — ее автоморфизм Фробениуса, $G_1 = M * S$ — σ-инвариантная связная редуктивная подгруппа максимального ранга, где M полупроста, а S — центральный тор, G_1^g — некоторая сопряженная с ней σ-инвариантная подгруппа. Пусть Δ_1 — диаграмма Дынкина группы G_1, и W_1 — группа Вейля группы G_1. Тогда $g^\sigma g^{-1} \in N_G(G_1) \cap N_G(T) = N$ (для некоторого максимального тора T из G_1), и существует биекция $\pi : (N/N_{G_1}(T)) \to (N_W(W_1)/W_1)$.*

Пусть $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$, τ обозначает образ элемента w относительно естественного гомоморфизма $\varphi : N_W(W_1) \to Aut_W(\Delta_1)$, а также графовый автоморфизм группы M, соответствующий данной симметрии τ. Тогда $(M^g)_\sigma \cong M_{\sigma\tau}$.

Пусть $\overline{P_1}$ — подрешетка группы $X(T)$, порожденная всеми рациональными линейными комбинациями корней из Δ_1. Тогда $(S^g)_\sigma \cong (X(T)/\overline{P_1})/(\sigma w - 1)(X(T)/\overline{P_1})$.

Кроме того, $|(G_1^g)_\sigma| = |M_\sigma^g| \cdot |S_\sigma^g|$.

Отметим, что в лемме 3.1.11 рассматривается группа G_σ. В том случае, когда G не является односвязной группой, конечная группа $O^{p'}(G_\sigma)$ не совпадает с G_σ, поэтому порядок группы $(G_1^g)_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma)$ меньше, чем тот, что указан в лемме. В этом случае $G_\sigma = \widehat{H}O^{p'}(G_\sigma)$, причем $|\widehat{H} : H| = \frac{d_1}{d}$. Здесь $\widehat{H}$ — максимальный тор группы G_σ, H — максимальный тор группы $O^{p'}(G_\sigma)$, d_1 — порядок центра группы $O^{p'}(G_\sigma)$, d — порядок центра группы $(G_{sc})_\sigma$ (так называемый, универсальный центр). Поэтому для того, чтобы получить порядок подгруппы $(G_1^g)_\sigma$ в группе $O^{p'}(G_\sigma)$, порядок, указанный в лемме, необходимо умножить на дробь $\frac{d_1}{d}$. Действительно, связная редуктивная подгруппа максимального ранга содержит некоторый максимальный тор связной простой линейной алгебраической, и поэтому $(G_1^g)_\sigma = \widehat{H}((G_1^g)_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma))$. Значит, $|(G_1^g)_\sigma : ((G_1^g)_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma))| = \frac{d_1}{d}$, следовательно, $|(G_1^g)_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma)| = \frac{d_1}{d}|(G_1^g)_\sigma|$.

§2 Большие абелевы подгруппы в группах $A_n(q)$

Лемма 3.2.1. *Пусть $G \leqslant GL_n(q)$, причем G удовлетворяет следующим условиям:*

1) $G = H_s \times H_u$, где H_s, H_u — полупростая и унипотентная компоненты группы G соответственно;

2) ступень нильпотентности H_s не превосходит 2;

3) H_u абелева.

Тогда $|G| \leqslant f_1(n,q)$, где $f_1(n,q) = \max(q^n - 1, (q-1)q^{[\frac{n^2}{4}]})$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно и G — контрпример к утверждению леммы минимального порядка.

Непосредственная проверка показывает, что для любых n_1 и n_2 справедливо неравенство

$$f_1(n_1,q)f_1(n_2,q) \leqslant f_1(n_1+n_2,q).$$

В силу леммы 3.1.7, группа H_s в некоторой базе разлагается на неприводимые клетки. Поэтому можно считать, что

$$H_s = \begin{pmatrix} H_{s_1} \ldots 0 \\ 0 \ddots 0 \\ 0 \ldots H_{s_k} \end{pmatrix},$$

где все клетки H_{s_j} неприводимы и пронумерованы в порядке возрастания размерности. Такой вид группы H_s означает, что все матрицы в группе H_s имеют клеточно-диагональный вид, а каждую клетку H_{s_j} можно рассматривать как полупростую неприводимую подгруппу группы $GL_{n_j}(q)$, причем любая H_{s_j} имеет ступень нильпотентности, не превосходящую 2. Кроме того, $n_1 + \ldots + n_k = n$. Заметим, что теперь $H_s \leqslant H_{s_1} \times \ldots \times H_{s_k}$.

Далее можно считать, что все H_{s_j} совпадают, значит, $H_s \cong H_{s_1}$. Действительно, $H_u \neq \{1\}$, так как в противном случае $G = H_s$ и, в силу леммы 3.1.6, справедливо $|G| \leqslant q^n - 1 \leqslant f_1(n,q)$, а это противоречит предположению о том, что G является контрпримером к утверждению леммы. По условию $AB = BA$ для любых матриц $A \in H_s$ и $B \in H_u$. Запишем матрицу B в кусочно-клеточном виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{1_1} B_{1_2} \ldots B_{1_k} \\ B_{2_1} B_{2_2} \ldots B_{2_k} \\ \ldots \\ B_{k_1} B_{k_2} \ldots B_{k_k} \end{pmatrix},$$

где размерность клетки совпадает с размерностью соответствующей клетки в записи группы H_s, т. е. клетка B_{i_j} имеет n_j столбцов и n_i строк. В силу коммутативности выполняются равенства $H_{s_i} B_{i_j} = B_{i_j} H_{s_j}$ и $H_{s_j} B_{j_i} = B_{j_i} H_{s_i}$. По лемме Шура множества $B_{(j,i)} = \{B_{j_i} \mid B \in H_u\}$ и $B_{(i,j)} = \{B_{i_j} \mid B \in H_u\}$ образуют тело, следовательно, если размерности клеток, соответствующих группам H_{s_i}, H_{s_j} различны или эти группы не сопряжены, то $B_{(i,j)} = B_{(j,i)} = \{0\}$. Таким образом, если размерности клеток не совпадают или если какие-то клетки (группы) не сопряжены, то группа H_u в той же базе, что и группа H_s, принимает клеточно-диагональный вид:

$$H_u = \begin{pmatrix} H_{u_1} 0 & \\ & 0 H_{u_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $G \leqslant G_1 \times G_2$, где G_1, G_2 — подгруппы в $GL_{n_1}(q)$, $GL_{n_2}(q)$, причем они удовлетворяют условию леммы. Поскольку G — минимальный контрпример, имеем:

$$|G| \leqslant |G_1| \cdot |G_2| \leqslant f_1(n_1, q) \cdot f_1(n_2, q) \leqslant f_1(n_1 + n_2, q) = f_1(n, q).$$

Получили противоречие с тем, что G является минимальным контрпримером.

Таким образом, не только размерности всех клеток H_{s_j} равны, но и все подгруппы H_{s_j} сопряжены, значит, с точностью до сопряжения группа H_s имеет вид:

$$H_s = \begin{pmatrix} \\ H_{s_1} \ldots 0 \\ 0 \ddots 0 \\ \underbrace{0 \ldots H_{s_1}}_{k \text{ раз}} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Следовательно, $H_s \cong H_{s_1}$. Пусть размерность клетки H_{s_1} равняется $\frac{n}{k}$. В силу леммы 3.1.6, $|H_s| = |H_{s_1}| \leqslant (q^{\frac{n}{k}} - 1)$. Поскольку все клетки B_{i_j} матриц из H_u образуют тело, а любое конечное тело является полем, и, так как они лежат в $M_{\frac{n}{k}}(q)$, можно считать, что эти клетки образуют подполе в $GF(q^{\frac{n}{k}})$. Группа H_s имеет вид (3.1), поэтому можно считать, что $H_u \leqslant GL_k(q^{\frac{n}{k}})$. Из леммы 3.1.5 следует неравенство $|H_u| \leqslant q^{\frac{n}{k}[\frac{k^2}{4}]}$. Тогда

$$|G| \leqslant |H_s| \cdot |H_u| \leqslant (q^{\frac{n}{k}} - 1) \cdot q^{\frac{n}{k}[\frac{k^2}{4}]} \leqslant f_1(n, q).$$

Получили противоречие. ⊠

Из леммы 3.2.1 легко получить число $\mathbf{a}(A_n(q))$, указанное в таблице 3.2. Действительно, если A — некоторая абелева подгруппа группы $A_n(q)$, то ее полный прообраз A_1 относительно естественного гомоморфизма $\varphi : GL_{n+1}(q) \to A_n(q)$ удовлетворяет всем условиям леммы 3.2.1. Тогда группа $A_1 Z(GL_n(q))$ удовлетворяет всем условиям леммы, следовательно, $|A_1 Z(GL_n(q))| < f_1(n, q)$. Таким образом, $|A| \leqslant f_1(n, q)/((n + 1, q - 1)(q - 1))$, что дает число $\mathbf{a}(A_n(q))$, указанное в таблице 3.2.

§3 Большие абелевы подгруппы в группах $C_n(q)$, $n \geqslant 3$

Лемма 3.3.1. *Пусть $G \leqslant Sp_{2n}(q)$, причем G удовлетворяет следующим условиям:*

1) $G = H_s \times H_u$, где H_s, H_u — полупростая и унипотентная компоненты группы G соответственно;

2) ступень нильпотентности H_s не превосходит 2;

3) H_u абелева.

Тогда $| G |\leqslant f_2(n,q)$, где $f_2(n,q) = (2, q-1)q^{\frac{n(n+1)}{2}}$, при $n \geqslant 3$, $f_2(2,q) = (2, q-1)(q+1)q^2$, $f_2(1,q) = \max(\delta, (2, q-1)q)$ (δ из леммы 3.1.6).

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно и G — контрпример к утверждению леммы, минимальный по порядку.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для любых n_1 и n_2 справедливо

$$f_2(n_1, q) f_2(n_2, q) \leqslant f_2(n_1 + n_2, q).$$

Если группа H_s не имеет собственных подмодулей, то она является единственной неприводимой клеткой, $G = H_s$ и G не является контрпримером.

Предположим, что существует собственный H_s-подмодуль U, причем можно считать, что U — минимальный по размерности собственный H_s-подмодуль. Рассмотрим $D = C_{H_s}(U)$. Если $D = \{1\}$, то H_s действует точно на U. В силу леммы 3.1.6, $|H_s| < q^{\dim(U)} = q^k$. Как и в доказательстве предыдущей леммы, можно получить, что

$$|G| \leqslant |H_s| \cdot |H_u| \leqslant (q^k - 1)q^{k[\frac{n^2}{k^2}]} \leqslant f_2(n, q)$$

(последнее неравенство в этой цепочке имеет место при $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$). При $n = 1$ возникает уже известный случай, когда $Sp_2(q) \cong SL_2(q)$. В случае $n = 2$, $k = 2$ заметим, что $H_s * Z(GL_4(q))$ удовлетворяет оценке $|H_s * Z(GL_4(q))| \leqslant (q^2 - 1)$. Поскольку $|H_s \cap Z(GL_4(q))| \leqslant (2, q-1)$, то $|H_s| \leqslant (2, q-1)(q+1)$, т. е. и в этом случае неравенство $|G| \leqslant f_2(n, q)$ выполняется. Если $k = 1$, то $|H_s| = (2, q-1)$. По утверждению 2 леммы 3.1.5, $|H_u| \leqslant q^{\frac{n(n+1)}{2}}$, и поэтому $|G| \leqslant (2, q-1)q^{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant f_2(n,q)$.

Таким образом, можно считать, что $D > \{1\}$. Тогда $C_V(D)$, $[V, D]$ — собственные нетривиальные H_s-подмодули. По лемме 3.1.8, $V = C_V(D) \oplus^{\perp} [V, D]$, значит, H_s представима в виде подгруппы в группе $H_{s_1} \times H_{s_2}$, где H_{s_1}, H_{s_2} — полупростые двуступенно нильпотентные подгруппы в группах $Sp_{2n_1}(q)$, $Sp_{2n_2}(q)$ соответственно. Повторяя приведенные выше рассуждения для групп H_{s_1}, H_{s_2}, получаем $H_s \leqslant H_{s_1} \times \ldots \times H_{s_k}$, где все H_{s_j} — неприводимые, полупростые, двуступенно нильпотентные подгруппы в $Sp_{2n_j}(q)$.

Воспользуемся уже полученной оценкой из леммы 3.2.1 и тем, что H_u можно рассматривать как подгруппу группы $GL_k(q^{\frac{2n}{k}})$, т. е. $|H_u| \leqslant q^{\frac{2n}{k}[\frac{k^2}{4}]}$. Как было показано, группа H_s имеет вид:

$$H_s = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} H_{s_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{s_1} \end{matrix}}_{k \text{ раз}} \end{pmatrix},$$

т. е. $H_s \cong H_{s_1}$, значит, по лемме 3.1.6, $|H_s| \leqslant \delta^{\frac{n}{k}}$. Тогда

$$|G| \leqslant \delta^{\frac{n}{k}} \cdot q^{\frac{2n}{k}[\frac{k^2}{4}]} \leqslant q^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}} \leqslant f_2(n,q)$$

при $n \geqslant 3$. При $n = 2$, $k = 2$ выполняется неравенство

$$|G| \leqslant \delta \cdot q^2 \leqslant f_2(n,q).$$

Противоречие с выбором группы G. ⊠

Число $\mathbf{a}(C_n(q))$, указанное в таблице 3.2, находится также, как и в группах $A_n(q)$.

§4 Большие абелевы подгруппы в группах ${}^2A_n(q^2)$

Пусть далее до конца главы мы находимся в обозначениях леммы 3.1.11. Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа с системой корней Φ, σ — ее автоморфизм Фробениуса ($\sigma = q\sigma_0$, $q = p^\alpha$) и $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Пусть $A = A_s \times A_u$ — некоторая абелева подгруппа группы G. Можно считать, что $A_s \nleqslant Z(G)$. По лемме 3.1.9 в G есть связная редуктивная σ-инвариантная подгруппа R (R^0 в обозначениях леммы 3.1.9) максимального ранга, содержащая группу $A_0 = A_u \times A_{s0}$ ($A_{s0} = A_s \cap R$), причем группа A/A_0 изоморфна некоторой секции группы Вейля $W(\Phi)$, $A_{s0} \leqslant Z(R)$. Положим $S = Z(R)^0$.

Лемма 3.4.1. *[19, предложение 8] В обозначениях леммы 3.1.11, пусть $\overline{G}$ — группа типа A_n, и пусть $\overline{G}_\sigma$ — скрученный вид группы G. Пусть G_1 — σ-инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга в группе $\overline{G}$, соответствующая разбиению λ числа $n+1$. Пусть G_1^g — σ-инвариантная редуктивная подгруппа группы $\overline{G}$, полученная скручиванием группы G_1 элементом $w \in W$, определенным правилом $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Предположим, что w переходит в τ относительно гомоморфизма $N_W(W_1) \to Aut_W(\Delta_1)$. Пусть n_i — количество частей разбиения λ, равных i, так что $Aut_W(\Delta_1) \cong S_{n_2} \times S_{n_3} \times \ldots$. Предположим, что $\sigma_0\tau$ ($|\sigma_0| = 2$) дает разбиения $\mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \ldots$ чисел $n_2, n_3, \ldots$, соответственно. Тогда простые компоненты полупростой группы $(M^g)_\sigma$ имеют тип $A_{i-1}(q^{\mu_j^{(i)}})$ для четных $\mu_j^{(i)}$, и они имеют тип $A_{i-1}(q^{2\mu_j^{(i)}})$ для нечетного $\mu_j^{(i)}$.*

Порядок полупростой части $(S^g)_\sigma$ группы $(G_1^g)_\sigma$ дается формулой

$$(q+1)|(S^g)_\sigma| = \prod_{i,j \text{ если } \mu_j^{(i)} \text{ четно}} (q^{\mu_j^{(i)}} - 1) \prod_{i,j \text{ если } \mu_j^{(i)} \text{ нечетно}} (q^{\mu_j^{(i)}} + 1).$$

Поскольку группа A/A_0 изоморфна некоторой секции группы Вейля $W(A_n) \cong S_{n+1}$, из таблицы 3.1 следует, что $|A/A_0| \leqslant 3^{(n+1)/3}$. Поэтому, используя леммы 3.1.5, 3.4.1 и таблицу 3.1, можно записать следующую оценку.

$$(q+1)|A| \leqslant \frac{d_1}{d} 3^{(n+1)/3} \prod_{i,j\ \mu_j^{(i)} \text{ четно}} (q^{\mu_j^{(i)}} - 1) \prod_{i,j\ \mu_j^{(i)} \text{ нечетно}} (q^{\mu_j^{(i)}} + 1) \prod_{i,j} (i, q^{\mu_j^{(i)}} - 1) q^{\mu_j^{(i)}[i^2/4]}. \tag{3.2}$$

Положим $S = Z(R)^0$. Поскольку для корневой системы типа A_n нет плохих простых чисел, из леммы 3.1.3 следует, что $\dim(S) \geqslant 1$. Рассмотрим сначала случай, когда $\dim(S) = 1$. Тогда группа R имеет лишь две простые компоненты, поскольку в противном случае размерность центрального тора будет больше 1. Следовательно, $R = A_{m_1-1}(K) * A_{m_2-1}(K) * S$, причем $m_1 + m_2 = n + 1$. Покажем, что в этом случае $R = C_{A_n(K)}(S)$. Действительно, включение $R \leqslant C_{A_n(K)}(S)$ очевидно. Централизатор любого тора в связной редуктивной алгебраической группы связен. Единственная подсистемная связная подгруппа, содержащая $A_{n_1-1}(K) * A_{n_2-1}(K)$, — это $A_n(K)$. Поскольку ее центр имеет размерность 0, он не совпадает с S. Следовательно, $A_n(K) \neq C_{A_n(K)}(S)$ и поэтому $R = C_{A_n(K)}(S)$. Таким образом, любой элемент из $A_n(K)$, централизующий S, лежит в R.

Предположим, что $A_s \neq A_{s0}$. Поскольку группа A_s нормализует S и $A_{s0} \in R$, мы получаем действие группы A_s/A_{s0} на группе характеров $X(S)$ тора S (как группы автоморфизмов) по следующему правилу. Если $x \in A_s/A_{s0}$ и $\chi \in X(S)$, то для любого $s \in S$ $\chi^x(s) = \chi(s^x)$. Здесь под s^x понимается сопряжение любым представителем элемента x в группе A_s. Ясно, что это сопряжение не зависит от выбора представителя, поскольку A_{s0} централизует S. Действие элемента x является автоморфизмом группы $X(S)$. Действительно, сохранение операции очевидно, так что x является гомоморфизмом группы $X(S)$. Поскольку у каждого элемента в группе существует обратный, действие элемента x биективно, значит, является автоморфизмом группы $X(S)$. Поскольку размерность тора S равна единице, группа $X(S)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Единственный нетривиальный автоморфизм группы $\mathbb{Z}$ — это автоморфизм порядка 2. Таким образом, если группа A_s/A_{s0} нетривиальна, то ее порядок равен 2.

Кроме того, в этом случае $|A_{s0} \cap S| \leqslant 2$. Действительно, A_s — абелева группа, поэтому любой элемент из A_{s0} неподвижен относительно действия элемента x. В силу определения действия элемента x на $X(S)$, отсюда следует, что для порождающего характера χ группы $X(S)$ и любого $t \in A_{s0} \cap S$ выполняется равенство $\chi(t) = \chi^{-1}(t^x) = \chi^{-1}(t) = \chi(t^{-1})$, т. е. $t^{-1} = t$, в частности, $|A_{s0} \cap S| \leqslant 2$. Поскольку $\frac{d_1}{d} \leqslant 1$, множитель $\frac{d_1}{d}$ можно заменить на единицу. Множитель $3^{(n+1)/3}$ возникал при оценке порядка группы A/A_0. Поскольку в нашем случае $|A/A_0| = 2$ множитель $3^{(n+1)/3}$ заменяется на 2. Кроме того, поскольку $|S \cap A_0| \leqslant 2$, вместо $|S|$, участвующего в неравенстве (3.2) также можно оставить 2. Таким образом, ввиду (3.2) либо

$$|A| \leqslant 4 \cdot (m_1, q+1) q^{[m_1^2/4]} \cdot (m_2, q+1) q^{[m_2^2/4]},$$

либо

$$|A| \leqslant 4 \cdot ((n+1)/2 - 1, q^2 - 1) q^{2[(n+1)/16]}$$

(вторая возможность возникает, когда $m_1 = m_2$, т. е. $n+1$ четно). Покажем, что при $n \neq 2$ и $q \neq 3$ в обоих случаях $|A| \leqslant q^{[(n+1)^2/4]}$.

При $n \geqslant 14$ имеем

$$\begin{array}{lcccc}
 & 4 \cdot (m_1, q+1) q^{[m_1^2/4]} \cdot (m_2, q+1) q^{[m_2^2/4]} & \leqslant 4 \cdot (q+1)^2 \cdot q^{m_1^2/4 + m_2^2/4} & \leqslant \\
\leqslant & q^6 \cdot q^{m_1^2/4 + m_2^2/4} & \leqslant & q^{m_1^2/4 + m_2^2/4 + 7 - 1} & \leqslant \\
\leqslant & q^{m_1^2/4 + m_2^2/4 + n/2 - 1} & \leqslant & q^{m_1^2/4 + m_2^2/4 + m_1 m_2/2 - 1} & \leqslant \\
\leqslant & q^{[(n+1)^2/4]}. & & &
\end{array}$$

Если $8 \leqslant n \leqslant 13$, $m_1, m_2 > 1$, то

$$\begin{array}{rccc} & 4\cdot(m_1,q+1)q^{[m_1^2/4]}\cdot(m_2,q+1)q^{[m_2^2/4]} & \leqslant 4\cdot(q+1)^2\cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} & \leqslant \\ \leqslant & q^6\cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} & \leqslant \quad q^{m_1^2/4+m_2^2/4+8-2} & \leqslant \\ \leqslant & q^{m_1^2/4+m_2^2/4+n-2} & \leqslant \quad q^{m_1^2/4+m_2^2/4+m_1m_2/2-1} & \leqslant \\ \leqslant & q^{[(n+1)^2/4]}. & & \end{array}$$

Если $6 \leqslant n \leqslant 7$, $q > 2$ и $m_1, m_2 > 1$, то

$$\begin{array}{rccc} & 4\cdot(m_1,q+1)q^{[m_1^2/4]}\cdot(m_2,q+1)q^{[m_2^2/4]} & \leqslant 4\cdot(q+1)^2\cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} & \leqslant \\ \leqslant & q^4\cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} & \leqslant \quad q^{m_1^2/4+m_2^2/4+6-2} & \leqslant \\ \leqslant & q^{m_1^2/4+m_2^2/4+n-2} & \leqslant \quad q^{m_1^2/4+m_2^2/4+m_1m_2/2-1} & \leqslant \\ \leqslant & q^{[(n+1)^2/4]}. & & \end{array}$$

Если $8 \leqslant n \leqslant 13$, $q > 2$ и $m_1 = 1$, то

$$\begin{array}{rccc} & 4\cdot(n,q+1)q^{[n^2/4]} & \leqslant 4\cdot(q+1)\cdot q^{n^2/4} & \leqslant \\ \leqslant & q^3\cdot q^{n^2/4} & \leqslant \quad q^{n^2/4+4-1} & \leqslant \\ \leqslant & q^{[(n+1)^2/4]}. & & \end{array}$$

Если $n = 7$, $q > 2$ и $m_1 = 1$, то $4\cdot(7,q+1)q^{12} < q^{16}$. Если $n = 6$, $q > 2$ и $m_1 = 1$, то $4\cdot(6,q+1)q^9 < q^{12}$. Если $n = 5$, $q > 2$ и $m_1 = 1$, то $4\cdot(5,q+1)q^6 < q^9$. Если $n = 5$, $q > 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, то $4\cdot(2,q+1)q(4,q+1)q^4 < q^9$. Если $n = 5$, $q > 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 3$ то $4\cdot(3,q+1)q^2(3,q+1)q^2 < q^9$. Аналогичным образом разбираются оставшиеся случаи. Далее в подобных ситуациях мы будем опускать вычисления и записывать лишь результат.

Рассмотрим отдельно группу ${}^2A_2(3^2)$, при этом $m_1 = 1, m_2 = 2$. Порядок ее большой абелевой подгруппы равен 16 (это некоторый максимальный тор, который изоморфен $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ и единственен с точностью до сопряжения). Группа ${}^2A_2(3^2)$ содержится в группе $A_2(K)$, где K — алгебраически замкнутое поле характеристики 3, причем $A_2(K)$ односвязна, т. е. $\Gamma_\pi = \Gamma_{sc}$. Группа R равна $M * S$, где M — полупростая группа типа A_1, S — тор размерности 1 и $M \cap S$ конечна. Если M — группа присоединенного типа, то ее центр тривиален и тогда $|A| \leqslant |S|\cdot|\mathbf{a}_u(A_1(3))| \leqslant 4\cdot 3 < 16$. Если M односвязна, то ее центр нетривиален и его порядок равен 2. Покажем, что в этом случае пересечение $M \cap S$ совпадает с центром группы M. Действительно, $M = \langle X_r, X_{-r}\rangle$, r — некоторый корень корневой системы типа A_2. Пусть P — решетка, порожденная корнем r, $\overline{P}$ — подрешетка решетки Γ_{sc}, порожденная всеми возможными рациональными комбинациями корня r. Тогда

$$S = \overline{P}^{\perp} = \{t | \forall l \in \overline{P}, t^l = 1\}.$$

В алгебраической группе типа A_2 справедливо $|\Gamma_{sc} : \Gamma_{ad}| = 3$. Группа $\overline{P}$ циклическая, пусть χ — ее порождающий элемент. Тогда либо $\chi \in P$, либо $\chi^3 \in P$, так как $P = \overline{P} \cap \Gamma_{ad}$. Пусть x — нетривиальный элемент из центра группы M. Поскольку $|Z(M)| = 2$, $x^2 = 1$. Тогда $x^r = 1$, значит, $1 = x^{\chi^3} = x^{\chi^2}x^\chi = (x^2)^\chi x^\chi = x^\chi = 1$, поэтому $x \in S$. Следовательно, и в этом случае $|A| \leqslant 4\cdot 3 < 16$.

Пусть теперь $A_s = A_{s0}$. В силу леммы 3.1.9 A_{s0} содержится в центре группы R, поэтому порядок группы A оценивается следующим образом $|A| \leqslant (q+1)(m_1, q+$

$1)q^{[m_1^2/4]}(m_2,q+1)q^{[m_2^2/4]}$, либо $|A| \leqslant (q-1)((n+1)/2, q^2-1)q^{2[(n+1)^2/16]}$. Справедливо неравенство $|A| \leqslant q^{[(n+1)^2/4]}$, когда $n \geqslant 5$. Случаи $n=2$, $n=3$ нужно разбирать отдельно, а при $n=4$ возможны следующие исключения $m_1=1,\ m_2=4,\ q=3$ и $m_1=2,\ m_2=3,\ q=2$.

Рассмотрим случай $n=2$. Если $(3,q+1)=3$, то либо центр группы ${}^2A_2(q^2)$ нетривиален, и тогда $|A| \leqslant (q+1)(m_1,q+1)q^{[m_1^2/4]}(n_2,q+1)q^{[m_2^2/4]} \leqslant 3q^2$, либо $|A| \leqslant \frac{1}{3}(q+1)(m_1,q+1)q^{[m_1^2/4]}(m_2,q+1)q^{[m_2^2/4]} \leqslant q^2$. Если $(3,q+1)=1$, то группа ${}^2A_2(q^2)$ односвязна, но ее центр тривиален. Большая абелева подгруппа в этом случае — это максимальный тор порядка $(q+1)^2$, изоморфный $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$, который единственен с точностью до сопряжения. Вновь нужно разобрать случай, когда $m_1=1, m_2=2$. Как в случае группы ${}^2A_2(3^2)$, $M \cap S$ совпадает с центром группы M, поэтому $|A| \leqslant (q+1)q < (q+1)^2$, где $(q+1)^2$ — порядок большой абелевой подгруппы.

Пусть теперь $n=3$. Если $m_1=m_2=2$, то тогда $|A| \leqslant (q+1)(2,q+1)(2,q+1)q^2 \leqslant q^4$ при $q \neq 3$. В группе ${}^2A_3(3^2)$ имеются три возможности для центра. Центр может быть тривиален и тогда ${}^2A_3(3^2)$ имеет присоединенный тип. Поэтому $|A| \leqslant \frac{1}{4}4\cdot 2\cdot 2\cdot 3^2 \leqslant 3^4$. Центр может быть порядка 2 и тогда $|A| \leqslant \frac{1}{2}4\cdot 2\cdot 2\cdot 3^2 \leqslant 2\cdot 3^4$. И, наконец, центр может быть порядка 4 и тогда $|A| \leqslant 4\cdot 2\cdot 2\cdot 3^2 \leqslant 4\cdot 3^4$. Если $m_1=1, m_2=3$, то как в случае ${}^2A_2(3^2)$, $M \cap S$ совпадает с центром группы M, поэтому $|A| \leqslant (q+1)q^2 \leqslant q^4$.

Последние два случая ${}^2A_4(2^2)$ и ${}^2A_4(3^2)$ рассматриваются аналогично. Таким образом, случай, когда размерность центрального тора равна 1, разобран.

Пусть теперь размерность тора S больше 1. Для всех m и k справедливо неравенство

$$(q^k+(-1)^{k+1})(m,q^k+(-1)^{k+1})q^{k[m^2/4]} \leqslant (q+1)(mk,q+1)q^{[m^2k^2/4]} \tag{3.3}$$

Кроме того, при $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2$, кроме случаев $m_1=1$, $m_2=1$; $m_1=1$, $m_2=2$ и $m_1=1$, $m_2=3$, $q=2$, справедливо неравенство

$$(q+1)(m_1,q+1)q^{[m_1^2/4]}(q+1)(m_2,q+1)q^{[m_2^2/4]} \leqslant (q+1)(m_1+m_2,q+1)q^{[(m_1+m_2)^2/4]} \tag{3.4}$$

Используя неравенства (3.3) и (3.4), выражение (3.2) приводится к одному из следующих видов

$$(q+1)^2 3^{(n+1)/3}(m_1,q+1)q^{[m_1^2/4]}(m_2,q+1)q^{[m_2^2/4]}(m_3,q+1)q^{[m_3^2/4]} \quad (m_1+m_2+m_3=n+1) \tag{3.5}$$

$$(q+1)^{n-1}3^{(n+1)/3}(2,q+1)q \tag{3.6}$$

$$(q+1)^{n-3}3^{(n+1)/3}(2,q+1)^2q^2 \tag{3.7}$$

$$3^{n+(n+1)/3}2^2 \tag{3.8}$$

$$3^{n+(n+1)/3-2}2^4 \tag{3.9}$$

Последние два случая возможны лишь при $q=2$. Выражения (3.5)–(3.9) не превосходят порядка большой абелевой подгруппы при $n \geqslant 5$. Таким образом, необходимо рассмотреть лишь группы ${}^2A_n(q^2)$ при $n \leqslant 4$ (при $n=4$ — лишь группу ${}^2A_4(2^2)$). Все случаи разбираются однотипно, поэтому мы рассмотрим лишь случай $n=3$. При $n=3$ для связной редуктивной группы R существуют две различных возможности. Группа R либо является максимальным тором, либо равна центральному произведению тора размерности 2 и группы типа A_1.

Пусть группа R является максимальным тором, т. е. $A = A_s$. Тогда R — это гомоморфный образ группы диагональных матриц относительно естественного гомоморфизма $SL_4(K) \to SL_4(K)/Z$, где $Z \leqslant Z(SL_4(K))$. Поскольку группа A_s нормализует R, определим действие группы A_s/A_{s0} на R правилом $s^{\overline{x}} = s^x$, где $s \in R$, $x \in A_s$ и $\overline{x} \in A_s/A_{s0}$ — образ элемента x в A_s/A_{s0} относительно естественного гомоморфизма. Элементы из A_s/A_{s0} переставляют диагональные элементы группы R. Относительно действия группы A_s/A_{s0} множество $\{1, 2, 3, 4\}$ (множество диагональных мест) разбивается на орбиты. Поскольку группа A_s абелева, элементы из A_s/A_{s0} централизуют элементы из A_{s0}, следовательно, элементы, стоящие на местах, соответствующих одной орбите могут отличаться лишь на множитель из Z. Значит, в группе A_{s0} существует подгруппа A_{s1} индекса не более, чем $|Z|$ (а $|Z| \leqslant 4$), которая содержится в торе, размерность которого на единицу меньше количества орбит группы A_s/A_{s0}. Если существует четыре орбиты, то $A_s = A_{s0}$ и, в силу леммы 3.1.10, $|A|$ не превосходит $(q+1)^3$, что не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 2. Если существует три орбиты, то тогда порядок группы A_s/A_{s0} равен 2, $|A_{s0}/A_{s_1}| \leqslant (4, q+1)$, $|A_{s1}| \leqslant (q+1)^2$, т. е. $|A_s| \leqslant 2(4, q+1)(q+1)^2$, что вновь не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 3.2. Если существует две орбиты, то $|A_s/A_{s0}| \leqslant 4$, $|A_{s0}/A_{s1}| \leqslant (4, q+1)$, $|A_{s1}| \leqslant q+1$, откуда следует, что $|A_s| \leqslant 4(4, q+1)(q+1)$, т. е. порядок группы A_s вновь не превосходит порядка большой абелевой подгруппы. Если, наконец, существует лишь одна орбита, то $|A_s/A_{s0}| \leqslant 4$, $A_{s0}/A_{s1} = A_{s0} \leqslant Z$ и, значит, $|A_s| \leqslant 4(4, q+1)$.

Пусть теперь R — это центральное произведение тора S размерности 2 и простой связной группы M типа A_1. В силу леммы 3.1.9 группа A_s лежит в $N(R)$. Из [20, предложение 4] следует, что группа $N(R)/R$ изоморфно вкладывается в группу $K \leftthreetimes (W_R^{\perp})$, где K — группа симметрий диаграммы Дынкина группы $[\overline{R}, \overline{R}]$, а группа $W_R^{\perp}$ порождена отражениями в корнях, ортогональных всем корням из $\Phi([\overline{R}, \overline{R}])$. Так как в нашем случае rank M равен 1 и dim $Z(R^0)^0$ равна 2, получаем, что группа K тривиальна, а $W_R^{\perp} \leqslant S_3$. Следовательно, $|A_s/A_{s0}| \leqslant 3$, в частности группа A_s/A_{s0} циклическая. Как и при доказательстве леммы 3.1.2 в R можно найти максимальный тор T, который нормализует группа A_s. Тор S содержится во всех максимальных торах, следовательно, он содержится в T. В некоторой базе пространства K^4 тор T диагонализируем и группа A_s/A_{s0} переставляет элементы, стоящие по диагонали. Если группа A_s/A_{s0} нетривиальна, то в группе A_{s0} существует подгруппа индекса не более, чем порядок группы Z, которая лежит в торе размерности не более 1. Поэтому $|A| = |A_s| \cdot |A_u| \leqslant 4(4, q+1)(q+1)q$, что не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 3.2. Если A_s совпадает с A_{s0}, то $|A| \leqslant (q+1)^2 \cdot q$, что вновь не превосходит порядка большой абелевой подгруппы.

§5 Большие абелевы подгруппы в группах $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q^2)$

Применение леммы 3.1.11 в случае алгебраической группы типа D_l дает следующий результат.

Лемма 3.5.1. *[19, предложение 10] Пусть в обозначениях леммы 3.1.11 G — группа типа D_l над алгебраически замкнутым полем характеристики p и G_1 —*

σ-инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга в G, определенная парой разбиений λ, μ с условием $|\lambda|+|\mu|=l$. Пусть k_i — количество частей разбиения λ, равных i, и n_i — количество частей разбиения μ, равных i ($n_1=0$). Тогда

$$Aut_W(\Delta_1)\cong\begin{cases}S_{k_2}\times(\mathbb{Z}_2\wr S_{k_3})\times(\mathbb{Z}_2\wr S_{k_4})\times\ldots\times(\mathbb{Z}_2\wr S_{n_2})\times(\mathbb{Z}_2\wr S_{n_3})\times\ldots & \text{если } k_1>0,\\ \text{подгруппе индекса 2 в ней если } k_1=0.\end{cases}$$

Пусть G_1^g — σ-инвариантная подгруппа группы G, полученная скручиванием группы G_1 элементом $w\in W$, определенного правилом $\pi(g^\sigma g^{-1})=w$. Предположим, что w переходит в $\tau\in Aut_W(\Delta_1)$. Предположим, что $\sigma_0\tau$ ($\sigma=q\sigma_0$) дает пары разбиений $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ с условием $|\xi^{(i)}|+|\eta^{(i)}|=k_i$ (где $\eta^{(i)}$ пусто если $i=2$) и пару разбиений $\zeta^{(i)}$, $\omega^{(i)}$ с условием $|\zeta^{(i)}|+|\omega^{(i)}|=n_i$. Тогда простые компоненты полупростой группы $(M^g)_\sigma$ имеют тип $A_{i-1}(q^{\xi_j^{(i)}})$, ${}^2A_{i-1}(q^{2\eta_j^{(i)}})$, $D_i(q^{\zeta_j^{(i)}})$, ${}^2D_i(q^{2\omega_j^{(i)}})$ по одной компоненте для каждой части каждого из разбиений $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$, $\zeta^{(i)}$, $\omega^{(i)}$.

Если $k_1=0$, общее количество компонент типа ${}^2A_{i-1}$ с нечетным i и типа ${}^2D_i$ четно, если $\sigma_0=1$, и нечетно, если $\sigma_0\neq 1$.

Порядок тора $(S^g)_\sigma$ дается формулой $|(S^g)_\sigma|=\prod_{i,j}(q^{\xi_j^{(i)}}-1)\prod_{i,j}(q^{\eta_j^{(i)}}+1)$.

Ввиду таблицы 3.1 и лемм 3.1.5, 3.5.1 справедливо следующее неравенство.

$$\begin{aligned}|A|\leqslant 2^l\prod_{i,j}(q^{\xi_j^{(i)}}-1)\prod_{i,j}(q^{\eta_j^{(i)}}+1)\prod_{i,j}(i,q^{\xi_j^{(i)}}-1)q^{\xi_j^{(i)}[i^2/4]}\prod_{i,j}(i,q^{\eta_j^{(i)}}+1)q^{\eta_j^{(i)}[i^2/4]}\times\\ \times\prod_{i,j}(4,q^{\zeta_j^{(i)}}-1)q^{\zeta_j^{(i)}\frac{i(i-1)}{2}}\prod_{4,j}(4,q^{\omega_j^{(4)}}+1)q^{\omega_j^{6(4)}}\prod_{i>5,j}(4,q^{\omega_j^{(i)}}+1)q^{\omega_j^{(i)}\frac{(i-1)(i-2)+2}{2}}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Для любого $m\geqslant 3$ справедливо неравенство

$$(q^k-1)(\frac{m}{k},q^k-1)q^{k[m^2/4k^2]}\leqslant q^{\frac{m(m-1)}{2}},\tag{3.11}$$

и для любого $m\geqslant 4$ справедливо неравенство

$$(q^k+1)(\frac{m}{k},q^k+1)q^{k[m^2/4k^2]}\leqslant q^{\frac{m(m-1)}{2}}.\tag{3.12}$$

Далее, для любого m выполняются неравенства

$$(4,q^k-1)q^{k\frac{m/k(m/k-1)}{2}}\leqslant q^{\frac{m(m-1)}{2}},\tag{3.13}$$

$$(4,q^k+1)q^{k\frac{(m/k-1)(m/k-2)+2}{2}}\leqslant q^{\frac{(m-1)(m-2)+2}{2}}.\tag{3.14}$$

Кроме того, для любых m_1, m_2 выполняются неравенства

$$(4,q-1)q^{\frac{m_1(m_1-1)}{2}}q^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}}\leqslant q^{\frac{(m_1+m_2)(m_1+m_2-1)}{2}},\tag{3.15}$$

$$(4,q+1)q^{\frac{(m_1-1)(m_1-2)+2}{2}}q^{\frac{(m_2-1)(m_2-2)+2}{2}}\leqslant q^{\frac{(m_1+n_2-1)(m_1+m_2-2)+2}{2}},\tag{3.16}$$

и

$$(4,q+1)q^6\cdot q^{\frac{(m-1)(m-2)+2}{2}}\leqslant q^{\frac{(m+4-1)(m+4-2)+2}{2}}.\tag{3.17}$$

Пусть $\sigma_0 = 1$, т. е. $O^{p'}((D_l(K))_\sigma)$ — группа нормального типа. Тогда используя неравенства (3.11)–(3.16), правая часть выражения (3.10) приводится к виду

$$2^l(2(q-1)q)^{m_1}(2(q+1)q)^{m_2}((3,q+1)(q+1)q^2)^{m_3}(4,q-1)q^{\frac{m_4(m_4-1)}{2}}\times \\ \times(4,q-1)q^{\frac{m_5(m_5-1)}{2}}(4,q+1)q^{\frac{(m_6-1)(m_6-2)+2}{2}}, \qquad (3.18)$$

где $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6 = l$, $m_4, m_5, m_6 \geqslant 2$, (некоторые из m_i могут быть равны 0). При любых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 правая часть выражения (3.18) не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 3.2.

Пусть $\sigma_0 \neq 1$, т. е. $O^{p'}((D_l(K))_\sigma)$ — группа скрученного типа. Используя неравенства (3.11)–(3.17) правая часть выражения (3.10) приводится к виду (3.18), но, в силу леммы 3.5.1, $m_6 \neq 0$. Вновь при любых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 правая часть выражения (3.18) не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 3.2.

§6 Большие абелевы подгруппы в группах $B_n(q)$, q нечетно

В качестве следствия из леммы 3.1.11 получается следующий результат.

Лемма 3.6.1. *[19, предложение 11] Пусть G — группа типа B_l над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$. Пусть G_1 — редуктивная подгруппа максимального ранга группы G, определенная тройкой (λ, μ, ν), где λ, μ — разбиения, ν — ненулевое целое, и $|\lambda| + |\mu| + \nu = l$. Пусть k_i — количество частей разбиения λ, равных i, и n_i — количество частей разбиения μ, равных i ($n_1 = 0$). Тогда*

$$Aut_W(\Delta_1) \cong S_{k_2} \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{k_3}) \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{k_4}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{n_2}) \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{n_3}) \times \ldots .$$

Пусть G_1^g — σ-инвариантная редуктивная подгруппа группы G, полученная скручиванием группы G_1 элементом $w \in W$, определенным правилом $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Предположим, w переходит в $\tau \in Aut_W(\Delta_1)$. Предположим, что τ дает пару разбиений $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$, с условием $|\xi^{(i)}| + |\eta^{(i)}| = k_i$ и пару разбиений $\zeta^{(i)}$, $\omega^{(i)}$ с условием $|\zeta^{(i)}| + |\omega^{(i)}| = n_i$ таких, что части этих разбиений дают длины положительных и отрицательных циклов на компонентах τ. Тогда простые компоненты полупростой группы $(M^g)_\sigma$ имеют тип $A_{i-1}(q^{\xi_j^{(i)}})$, ${}^2A_{i-1}(q^{2\eta_j^{(i)}})$, $D_i(q^{\zeta_j^{(i)}})$, ${}^2D_i(q^{2\omega_j^{(i)}})$, $B_\nu(q)$ с одной компонентой для каждой части разбиений $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$, $\zeta^{(i)}$, $\omega^{(i)}$.

Порядок тора $(S^g)_\sigma$ дается формулой $|(S^g)_\sigma| = \prod_{i,j}(q^{\xi_j^{(i)}} - 1)\prod_{i,j}(q^{\eta_j^{(i)}} + 1)$.

Из таблицы 3.1 и лемм 3.1.5, 3.6.1 вытекает следующее неравенство.

$$|A| \leqslant 2^l \prod_{i,j}(q^{\xi_j^{(i)}} - 1)\prod_{i,j}(q^{\eta_j^{(i)}} + 1)\prod_{i,j}(i, q^{\xi_j^{(i)}} - 1)q^{\xi_j^{(i)}[i^2/4]}\prod_{i,j}(i, q^{\eta_j^{(i)}} + 1)q^{\eta_j^{(i)}[i^2/4]}\times \\ \times\prod_{i,j}(4, q^{\zeta_j^{(i)}} - 1)q^{\zeta_j^{(i)}\frac{i(i-1)}{2}}\prod_{4,j}(4, q^{\omega_j^{(4)}} + 1)q^{6\omega_j^{(4)}}\prod_{i>5,j}(4, q^{\omega_j^{(i)}} + 1)q^{\omega_j^{(i)}\frac{(i-1)(i-2)+2}{2}}2q^{\frac{\nu(\nu-1)+1}{2}}. \qquad (3.19)$$

Используя неравенства (3.11)–(3.17), правая часть выражения (3.19) приводится к следующему виду

$$2^l(2(q-1)q)^{m_1}(2(q+1)q)^{m_2}((3,q+1)(q+1)q^2)^{m_3}(4,q-1)q^{\frac{m_4(m_4-1)}{2}}\times \\ \times(4,q+1)q^{\frac{(m_5-1)(m_5-2)+2}{2}}2q^{\frac{m_6(m_6-1)+1}{2}}, \tag{3.20}$$

где $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6=l$, $m_4, m_5 \geqslant 2$. При любых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 правая часть выражения (3.20) не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 3.2.

§7 Большие абелевы подгруппы в группах $B_2(2^n)$

Поскольку характеристика поля K равна 2, в группе $B_2(K)$ нет полупростых элементов, порядок которых является плохим числом и ее центр тривиален. Кроме того, $W(B_2)$ — 2-группа, поэтому $A_0 = A$. Следовательно, центральный тор S группы R имеет размерность не менее 1 и $A \leqslant R$. Тогда возможны два случая.

Пусть $\dim S = 1$. Тогда $R = S * A_1(K)$, причем $Z(A_1(K))$ тривиален. Следовательно, в силу лемм 3.1.5 и 3.1.10, $|A| \leqslant (q+1)q \leqslant q^3$, т. е. не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 3.2.

Пусть $\dim S = 2$. Тогда $R = S$ и, в силу леммы 3.1.10, $|A| \leqslant (q+1)^2 < q^3$, т. е. вновь меньше, чем порядок большой абелевой подгруппы, указанный в таблице 3.2.

§8 Большие абелевы подгруппы в группах $G_2(q)$.

Из доказательства леммы 3.1.9 следует, что группа A лежит в централизаторе некоторого полупростого элемента. Так как группа $G_2(K)$ односвязна, централизатор любого ее полупростого элемента связен (см., например, [30, теорема 2.11]). Следовательно, группа A лежит в множестве неподвижных относительно морфизма Фробениуса σ точек некоторой максимальной σ-инвариантной связной редуктивной подгруппе максимального ранга группы $G_2(K)$. В силу алгоритма Бореля и ди Зибенталя, существует лишь две максимальные связные редуктивные подгруппы R максимального ранга группы $G_2(K)$ — это группы $A_2(K)$ и $A_1(K) * A_1(K)$.

Пусть $R = A_2(K)$. Тогда, по лемме 3.1.1, группа A содержит подгруппу A_0 индекса 3, которая лежит в группе $A_2(q)$ или в ${}^2A_2(q^2)$ (в силу [26, таблица 4 на стр. 138] возможны оба этих случая). Отметим, что оценка индекса, указанная в лемме 3.1.1 довольно грубая (особенно для небольшого числа простых множителей), так как на некоторые числа мы делим несколько раз. Так и в нашем случае, если группа $A_2(q)$ или ${}^2A_2(q^2)$ односвязна, то тогда она совпадает с R_σ, и потому подгруппа A целиком лежит в $A_2(q)$ (или ${}^2A_2(q^2)$). Если же $A_2(q)$ (или ${}^2A_2(q^2)$) имеет присоединенный тип, то тогда A содержит подгруппу индекса не более 3, которая лежит в $A_2(q)$ (или ${}^2A_2(q^2)$), но та, в свою очередь имеет тривиальный центр. Приведенные рассуждения и результаты, полученные ранее для классических групп показывают, что в любом случае порядок группы A не превосходит одного из следующих чисел $3q^2$ или $(q+1)^2$, которые, очевидно, не превосходят числа $\mathbf{a}(G_2(q))$, указанного в таблице 3.2. Далее мы будем опускать подробный разбор в аналогичных ситуациях, ссылаясь на лемму 3.1.1 и понимая под этим не столько само утверждение леммы, сколько метод доказательства, с помощью которого в каждом конкретном случае можно получить значительно более точную оценку, чем та, что указана в лемме.

Пусть $R = A_1(K) * A_1(K)$. Тогда в силу леммы 3.1.1 $|A| \leqslant (2, q-1)q^2$ либо $|A| \leqslant (q+1)^2$, что не превосходит числа $\mathbf{a}(G_2(q))$, указанного в таблице 3.2.

§9 Большие абелевы подгруппы в группах $F_4(q)$ и ${}^2F_4(q)$

Поскольку группа $F_4(K)$ односвязна, централизатор любого полупростого элемента связен, поэтому группа A содержится в некоторой собственной связной редуктивной подгруппе группы $F_4(K)$ максимального ранга. Рассмотрим сначала группу $F_4(q)$.

В силу алгоритма Бореля и ди Зибенталя максимальные по включению собственные σ-инвариантные редуктивные связные подгруппы максимального ранга группы $F_4(K)$ — это $B_4(K)$, $A_2(K) * A_2(K)$, $A_1(K) * A_3(K)$ и $C_3(K) * A_1(K)$.

Пусть группа A лежит в группе $R = B_4(K)$. Следовательно, по лемме 3.1.1 $|R_\sigma : O^{p'}(R_\sigma)| \leqslant 2$. Таким образом, группа A содержит подгруппу индекса не более, чем 2, которая лежит в группе $B_4(q)$. Поскольку число $\mathbf{a}(B_4(q))$ уже найдено, имеем $|A| \leqslant 2q^7$, если q нечетно и $|A| \leqslant q^{10}$, если q четно. В обоих случаях порядок группы A не превосходит числа $\mathbf{a}(F_4(q))$.

Пусть теперь группа A лежит в группе $R = A_1(K) * C_3(K)$. Тогда из леммы 3.1.1 следует, что $|A| \leqslant 4q^7$, т. е. порядок группы A меньше $\mathbf{a}(F_4(q))$.

Пусть A лежит в группе типа $R = A_1(K) * A_3(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп $A_1(q) * A_3(q)$ или $A_1(q) * {}^2A_3(q^2)$ (из [26, таблица 2, стр. 133] следует, что могут быть выполнены оба случая). Отсюда (вновь с использованием леммы 3.1.1 и известных результатов для классических групп) следует, что $|A| \leqslant 8q^5$, что меньше $\mathbf{a}(F_4(q))$.

Пусть A лежит в группе типа $R = A_2(K) * A_2(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ изоморфна группе $A_2(q) * A_2(q)$, либо ${}^2A_2(q^2) * {}^2A_2(q^2)$ (вновь пользуемся информацией из [26, таблица 2, стр. 133]). Отсюда вытекает следующая оценка $|A| \leqslant 9q^4$, что меньше числа $\mathbf{a}(F_4(q))$.

Рассмотрим теперь группу ${}^2F_4(q)$. Группа A содержится в некоторой связной редуктивной подгруппе максимального ранга группы $F_4(K)$, которая инвариантна относительно графового автоморфизма. Тогда из [26, таблица 3, стр. 137] следует, что либо $A \leqslant {}^2B_2(q) * S$, либо $A \leqslant {}^2A_2(q^4)$ и, как нетрудно убедиться, в любом случае $|A|$ меньше числа $\mathbf{a}({}^2F_4(q))$, указанного в таблице 3.2.

§10 Большие абелевы подгруппы в группах $E_6(q)$

Хорошо известно (см. [11, лекция Ивахори, предложение 5]), что для любого полупростого элемента s из связной простой алгебраической группы G присоединенного типа группа $C_G(s)/C_G^0(s)$ изоморфно вкладывается в группу $\Gamma_{sc}/\Gamma_\pi = \Omega_\pi$. Поскольку для корневой системы типа E_6 справедливо $|\Gamma_{sc} : \Gamma_\pi| = 3$, в группе A существует подгруппа A_0 индекса не более, чем 3, которая содержится в некоторой собственной связной редуктивной подгруппе группы $E_6(K)$ максимального ранга. В $E_6(K)$ существуют следующие максимальные по включению связные редуктивные подгруппы максимального ранга: $A_1(K) * A_5(K)$, $A_2(K) * A_2(K) * A_2(K)$ и $S * D_5(K)$.

Пусть A_0 лежит в группе $R = A_1(K) * A_5(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = A_1(q) * A_5(q)$ (см. [26, случай $E_6(q)$]). Тогда, по лемме 3.1.1, $|A_0| \leqslant 12q^{10}$, откуда $|A| \leqslant 36q^{10}$, что меньше числа $\mathbf{a}(E_6(q))$,

Пусть A_0 лежит в группе $R = A_2(K) * A_2(K) * A_2(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп $A_2(q) * A_2(q) * A_2(q)$, $A_2(q^2) * {}^2A_2(q^2)$, или $A_2(q^3)$ (см [26, случай $E_6(q)$]). Во всех случаях лемма 3.1.1 дает оценку $|A_0| \leqslant 27q^9$ (при $q = 2$ — $9 \cdot 2^6$). Отсюда следует, что $|A|$ меньше числа $\mathbf{a}(E_6(q))$.

Пусть, наконец, A_0 лежит в группе $R = S * D_5(K)$. Тогда $R_1 = (S_\sigma) * D_5(q)$ (R_1 из леммы 3.1.1). Из леммы 3.1.1 следует, что $|A_0| \leqslant 4(q-1)q^{10}$. Отсюда $|A|$ меньше числа $\mathbf{a}(E_6(q))$.

§11 Большие абелевы подгруппы в группах ${}^2E_6(q^2)$

Индекс $|\Gamma_{sc} : \Gamma_{ad}| = 3$, поэтому группа A содержит подгруппу A_0 индекса не более 3, которая лежит в некоторой собственной связной σ-инвариантной редуктивной подгруппе R группы $E_6(K)$ максимального ранга. Максимальными σ-инвариантными связными редуктивными подгруппами группы $E_6(K)$ в этом случае будут группы $A_1(K) * A_5(K)$, $S * D_5(K)$ и $A_2(K) * A_2(K) * A_2(K)$. Если характеристика поля K четна, то в $E_6(K)$ не существует полупростого элемента, централизатор которого совпадал бы с $A_1(K) * A_5(K)$, в этом случае необходимо рассмотреть две дополнительных связных редуктивных σ-инвариантных подгруппы максимального ранга группы $E_6(q)$ — это группы $A_5(K) * S$ и $A_4(K) * A_1(K) * S$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_1(K) * A_5(K)$ (напомним, что в этом случае q нечетно). Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = A_1(q) * {}^2A_5(q^2)$ (см. [26, таблица 1, стр. 127]). В силу леммы 3.1.1 $|A| \leqslant 24q^{10}$, что меньше $\mathbf{a}({}^2E_6(q^2))$ при $q > 3$. При $q = 3$ замечаем, что группу $E_6(K)$ можно взять односвязной (так как группы ${}^2E_6(3^2)_{sc}$ и ${}^2E_6(3^2)_{ad}$ в этом случае изоморфны). Поэтому группа A содержится в R (а не ее подгруппа индекса 3). Кроме того, лемма 3.1.1 в данном случае дает следующую оценку $|A| \leqslant 4q^{10}$, что меньше $\mathbf{a}({}^2E_6(q^2))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = S * D_5(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = (S_\sigma) * {}^2D_5(q^2)$ (см. [26, таблица 1, стр. 127]). Следовательно, $|A| \leqslant 12(q+1)q^8$ ($|A| \leqslant 3q^8$, если q четно), т. е. порядок группы A не превосходит числа $\mathbf{a}({}^2E_6(q^2))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_2(K) * A_2(K) * A_2(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ совпадает с одной из следующих групп $A_2(q^2) * A_2(q)$, ${}^2A_2(q^6)$, либо с ${}^2A_2(q^2) * {}^2A_2(q^2) * {}^2A_2(q^2)$ (см. [26, таблица 1, стр. 127]). В любом случае справедлива следующая оценка $|A| \leqslant 27q^6$, что меньше, чем $\mathbf{a}({}^2E_6(q^2))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_5(K) * S$ (этот случай мы рассматриваем лишь для поля K характеристики 2). Тогда R_1 совпадает с группой ${}^2A_5(q^2) * S_\sigma$. Отсюда следует, что порядок группы A не превосходит $6(q+1)q^9$ ($3q^9$ если $q = 2$), что меньше $\mathbf{a}({}^2E_6(q^2))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_4(K) * A_1(K) * S$ (вновь предполагается, что характеристика поля K четна). Тогда R_1 совпадает с ${}^2A_4(q^2) * A_1(q) * S_\sigma$, откуда $|A| \leqslant 15(q+1)^2q^6$ ($|A| \leqslant 3^2 \cdot 2^6$ если $q = 2$), что меньше, чем $\mathbf{a}({}^2E_6(q^2))$.

§12 Большие абелевы подгруппы в группах $E_7(q)$

Индекс $|\Gamma_{sc} : \Gamma_{ad}| = 2$, поэтому группа A содержит подгруппу A_0 индекса 2, которая лежит в собственной связной редуктивной подгруппе R группы $E_7(K)$. Максимальная по включению связная редуктивная подгруппа максимального ранга в $E_7(K)$ — это одна из следующих групп: $A_7(K)$, $A_1(K)*D_6(K)$, $A_1(K)*A_3(K)*A_3(K)$, $A_2(K)*A_5(K)$, $S*E_6(K)$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_7(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = A_7(q)$, либо $O^{p'}(R_\sigma) = {}^2A_7(q^2)$ (см [27, таблица 1]). Из леммы 3.1.1 следует, что $|A| \leqslant 16q^{16}$, т. е. порядок группы A не превосходит числа $\mathbf{a}(E_7(q))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_1(K)*D_6(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ совпадает с $A_1(q)*D_6(q)$ (см [27, таблица 1]). Следовательно, $|A| \leqslant 16q^{16}$, что меньше числа $\mathbf{a}(E_7(q))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_1(K)*A_3(K)*A_3(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп $A_1(q)*A_3(q)*A_3(q)$ либо $A_1(q)*A_3(q^2)$ (см. [27, таблица 1]). В любом случае лемма 3.1.1 дает $|A| \leqslant 64q^9$, что не превосходит числа $\mathbf{a}(E_7(q))$.

Пусть группа A_0 лежит в $A_2(K)*A_5(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп $A_2(q)*A_5(q)$ либо ${}^2A_2(q^2)*{}^2A_5(q^2)$ (см. [27, таблица 1]). Следовательно, справедливо неравенство $|A| \leqslant 36q^{11} < \mathbf{a}(E_7(q))$.

Пусть, наконец, группа A лежит в $R = S*E_6(K)$. Тогда R_1 изоморфна одной из групп в следующем списке $(S_\sigma)*E_6(q)$ или $(S_\sigma)*{}^2E_6(q^2)$. В любом случае $|A| \leqslant 6(q-1)q^{16} < \mathbf{a}(E_7(q))$.

§13 Большие абелевы подгруппы в группах $E_8(q)$

Поскольку $\Gamma_{sc} = \Gamma_{ad}$, централизатор любого полупростого элемента связен, следовательно, группа A содержится в некоторой собственной связной редуктивной подгруппе группы $E_8(K)$ максимального ранга. Максимальная связная редуктивная подгруппа в $E_8(K)$ — это одна из следующих групп: $D_8(K)$, $A_8(K)$, $A_1(K)*A_2(K)*A_5(K)$, $A_4(K)*A_4(K)$, $A_3(K)*D_5(K)$, $A_2(K)*E_6(K)$, $A_1(K)*E_7(K)$.

Пусть группа A лежит в $R = D_8(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = D_8(q)$ (см. [27, таблица 2]). Из леммы 3.1.1 следует, что $|A| \leqslant 4q^{27} < \mathbf{a}(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_8(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = A_8(q)$ либо $O^{p'}(R_\sigma) = {}^2A_8(q^2)$ (см. [27, таблица 2]). Применяя лемму 3.1.1, получаем $|A| \leqslant 9q^{20} < \mathbf{a}(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_1(K)*A_2(K)*A_5(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ — это одна из следующих групп: $A_1(q)*A_2(q)*A_5(q)$ либо $A_1(q)*{}^2A_2(q^2)*{}^2A_5(q^2)$ (см. [27, таблица 2]). Вновь из леммы 3.1.1 следует, что $|A| \leqslant 36q^{12} < \mathbf{a}(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_4(K)*A_4(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$— это одна из следующих групп: $A_4(q)*A_4(q)$, ${}^2A_4(q^2)*{}^2A_4(q^2)$ или ${}^2A_4(q^4)$ (см. [27, таблица 2]). Из леммы 3.1.1 вытекает, что $|A| \leqslant 25q^{12} < \mathbf{a}(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_3(K)*D_5(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп $A_3(q)*D_5(q)$ или ${}^2A_3(q^2)*{}^2D_5(q^2)$ (см. [27, таблица 2]). Применяя лемму 3.1.1, получаем $|A| \leqslant 16q^{19} < \mathbf{a}(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_2(K)*E_6(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma)$ — это одна из следующих групп: $A_2(q)*E_6(q)$ или ${}^2A_2(q^2)*{}^2E_6(q^2)$. Справедливо неравенство $|A| \leqslant 9q^{18} < \mathbf{a}(E_8(q))$.

Пусть, наконец, группа A лежит в $R = A_1(K) * E_7(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = A_1(q) * E_7(q)$. В силу леммы 3.1.1, $|A| \leqslant 4q^{28} < \mathbf{a}(E_8(q))$.

§14 Большие абелевы подгруппы в группах ${}^3D_4(q^3)$

В $D_4(K)$ существуют лишь две максимальные связные σ-инвариантные редуктивные подгруппы максимального ранга: $A_1(K) * A_1(K) * A_1(K) * A_1(K)$ и $T * A_2(K)$, где T — тор размерности 2.

Пусть группа A лежит в $R = A_1(K) * A_1(K) * A_1(K) * A_1(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = A_1(q) * A_1(q^3)$ (см. [26, таблица 7, стр. 140]). Из леммы 3.1.1 следует, что $|A| \leqslant 4q^4$ ($|A| \leqslant 27$ если $q = 2$ и $|A| \leqslant 2q^4$, если $q = 3$), что меньше, чем $q^5 = \mathbf{a}({}^3D_4(q^3))$.

Пусть группа A лежит в $R = T * A_2(K)$. Тогда $O^{p'}(R_\sigma) = (T_\sigma) * A_2(q)$ или $O^{p'}(R_\sigma) = (T_\sigma) * {}^2A_2(q^2)$ (см. [26, таблица 7, стр. 140]). Из леммы 3.1.1 следует, что $|A| \leqslant 3(q^2 + q + 1)q^2$ ($|A| \leqslant 28$ при $q = 2$ и $|A| \leqslant 117$ при $q = 3$), что вновь не превосходит $q^5 = \mathbf{a}({}^3D_4(q^3))$.

§15 Итоговая таблица

В таблице 3.2 мы приведем порядки больших абелевых подгрупп во всех конечных группах лиева типа. В колонке ист. указан источник, в котором изучались абелевы подгруппы данного порядка.

Таблица 3.2. Большие абелевы подгруппы в конечных простых группах лиева типа

группа G	$\mathbf{a}(G)$	ист.
$A_n(q)$ кроме $A_1(q)$, $q = 2^\alpha$ и $A_2(q)$, $(3, q-1) = 1$	$q^{[(n+1)^2/4]}$	[13]
$A_1(q)$, $q = 2^\alpha$	$q + 1$	[59]
$A_2(q)$, $(3, q-1) = 1$	$q^2 + q + 1$	[59]
$B_n(q)$, $n \geqslant 4$, $q \neq 2^\alpha$	$q^{n(n-1)/2+1}$	[13], [48]
$B_3(q)$, $q \neq 2^\alpha$	q^5	[13], [48]
$C_n(q)$, кроме $C_2(2)$	$q^{n(n+1)/2}$	[13], [14]
$D_n(q)$	$q^{n(n-1)/2}$	[13], [48]
${}^2A_n(q^2)$, кроме ${}^2A_2(q^2)$, $(3, q+1) = 1$ и ${}^2A_3(2^2)$	$q^{[(n+1)^2/4]}$	[49]
${}^2A_2(q^2)$, $(3, q+1) = 1$	$(q+1)^2$	[59]
${}^2A_3(2^2)$	27	[59]

группа G	$\mathbf{a}(G)$	ист.
${}^2D_n(q^2)$, $n \geqslant 5$	$q^{(n-1)(n-2)/2+2}$	[48]
${}^2D_4(q^2)$	q^6	[48]
$G_2(q)$, $q \neq 3^\alpha$ кроме $G_2(2)$	q^3	[61]
$G_2(q)$, $q = 3^\alpha$	q^4	[61]
$F_4(q)$, $q = 2^\alpha$	q^{11}	[63]
$F_4(q)$, $q \neq 2^\alpha$	q^9	[63]
$E_6(q)$,	q^{16}	[63]
$E_7(q)$,	q^{27}	[63]
$E_8(q)$,	q^{36}	[63]
${}^2B_2(q)$	$2q$	[43]
${}^2G_2(q)$	q^2	[44]
${}^3D_4(q^3)$	q^5	[61]
${}^2E_6(q^2)$	q^{12}	[63]
${}^2F_4(q)$	$2q^5$	[63]

Глава 4

Большие нильпотентные подгруппы конечных простых групп

§1 Большие нильпотентные подгруппы симметрических и знакопеременных групп

Докажем сначала следующую техническую лемму.

Лемма 4.1.1. *Пусть N — нильпотентная подгруппа группы S_n и $I_1, I_2, \ldots$ — множество орбит центра $Z(N)$ группы N на множестве $\{1, \ldots, n\}$ Пусть J_1 — набор множеств I_m порядка 1, J_2 — набор множеств I_m порядка 2 и т. д. Пусть $K_1 = \bigcup_{|I_m|=1} I_m$, $K_2 = \bigcup_{|I_m|=2} I_m$ и т. д. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа $N/Z(N)$ переставляет множества одного порядка и, следовательно, $N \leqslant N_1 \times N_2 \times \ldots$, где $N_1 \leqslant S_{K_1}$, $N_2 \leqslant S_{K_2}$ и т. д.*

2. *Если k_i — количество орбит относительно действия группы $N/Z(N)$ на множестве J_i, то $|Z(N) \cap N_i| = i^{k_i}$.*

3. *Если $p_1, \ldots, p_s$ — все простые числа, на которые делится i, то порядок группы N_i делится только на простые числа $p_1, \ldots, p_s$.*

Доказательство. 1. Пусть σ — некоторый элемент из группы N, который переводит некоторый элемент i из множества I_1 в элемент из некоторого множества I_k. Тогда для любого $\tau \in Z(N)$ справедливо $i^{\sigma\tau} = i^{\tau\sigma} \in I_k$. Поскольку $Z(N)$ на множестве I_1 действует транзитивно, мы имеем $\{i^\tau : \tau \in Z(N)\} = I_1$, следовательно, $I_1^\sigma \subseteq I_k$, т. е. $|I_1| \leqslant |I_k|$. С другой стороны, элемент σ^{-1} переводит некоторый элемент множества I_k в элемент i из множества I_1, следовательно, $I_k^{\sigma^{-1}} \subseteq I_1$, т. е. $|I_k| \leqslant |I_1|$. Объединяя полученные неравенства, получаем, что $|I_1| = |I_k|$.

2. Можно считать, что $K_i = \{1, \ldots, n\}$, и группа $N/Z(N)$ действует транзитивно на орбитах (относительно действия центра $Z(N)$) множества J_i. В противном случае N распадается в подпрямое произведение таких групп, поэтому можно рассмотреть соответствующие проекции. Пусть $\{I_1, \ldots, I_k\}$ — множество всех орбит множества J_i относительно действия группы $Z(N)$. Тогда порядок каждой из них равен i и

$i \cdot k = n$. Пусть $l \in I_1$ — некоторый элемент из орбиты I_1. Рассмотрим стабилизатор элемента l в центре $Z(N)$ — $St_{Z(N)}(l)$, и предположим, что $\tau \in St_{Z(N)}(l)$. Пусть $m \in K_i$ — некоторый элемент, лежащий в некоторой орбите I_j. Поскольку группа $N/Z(N)$ действует транзитивно на орбитах $I_1, \ldots, I_k$, существует такой элемент $\sigma \in N$, что $I_j^\sigma = I_1$. Далее, группа $Z(N)$ действует транзитивно на множестве I_1, поэтому существует такой элемент $\varphi \in Z(N)$, для которого $(m^\sigma)^\varphi = l$. Тогда $m^\tau = ((l^{\varphi^{-1}})^{\sigma^{-1}})^\tau = ((l^\tau)^{\varphi^{-1}})^{\sigma^{-1}} = m$, следовательно, $\tau = \varepsilon$ и $St_{Z(N)}(l) = \{\varepsilon\}$. В силу теоремы Лагранжа $|Z(N)| = |Z(N) : St_{Z(N)}(l)| \cdot |St_{Z(N)}(l)| = i$.

3. По определению, множество J_i равно $\{I_k : |I_k| = i\}$. Предположим, что существует такое простое число $q \notin \{p_1, \ldots, p_s\}$, которое делит порядок группы N_i. Поскольку N_i — нильпотентная группа, существует центральный элемент τ порядка q. Поскольку группа N является подпрямым произведением групп $N_1, N_2, \ldots$, элемент τ лежит в $Z(N)$. Из пункта 2 следует, что порядок проекции $Z(N)$ на N_i равен i^k, где $k \geqslant 1$. Но тогда $\tau \neq 1$ при проекции $Z(N)$ на N_i, противоречие. ⊠

Отметим, что группа N_1, определенная в лемме, тривиальна.

Теперь мы можем определить строение больших нильпотентных подгрупп в симметрических и знакопеременных группах.

Теорема 4.1.2. *Большая нильпотентная подгруппа в знакопеременной группе сопряжена с одной из следующих групп:*

1. $\langle(1,2,3)\rangle$, *если* $n = 3$.
2. $\langle(1,2,3,4,5)\rangle$, *если* $n = 5$.
3. $\langle(1,2,3)\rangle \times \langle(4,5,6)\rangle$, *если* $n = 6$.
4. S, *где* $S \in \mathrm{Syl}_2(A_n)$, *если* $n \neq 2(2k+1)+1$ *для некоторого натурального* k.
5. $S \times \langle(n-2, n-1, n)\rangle$, *где* $S \in \mathrm{Syl}_2(A_{n-3})$, *если* $n = 2(2k+1)+1$, $k \geqslant 1$.

Большая нильпотентная подгруппа в симметрической группе сопряжена с одной из следующих групп.

1. S, *где* $S \in \mathrm{Syl}_2(S_n)$, *если* $n \neq 2(2k+1)+1$ *для некоторого натурального* k.
2. $S \times \langle(n-2, n-1, n)\rangle$, *где* $S \in \mathrm{Syl}_2(S_{n-3})$, *если* $n = 2(2k+1)+1$ *для некоторого натурального* k.

Во всех группах большая нильпотентная подгруппа единственна с точностью до сопряжения.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и n — минимальное натуральное число, дающее контрпример к утверждению теоремы. Обозначим за P подгруппу группы S_n, строение которой совпадает со строением нильпотентной подгруппы, указанной в теореме, и пусть $N \in N(S_n)$ — некоторая большая нильпотентная подгруппа, несопряженная с P.

Относительно действия $Z(N)$ множество $\{1, \ldots, n\}$ разбивается на орбиты. Возможны следующие два случая.

1. Среди орбит центра $Z(N)$ есть подмножества разного порядка. Тогда по лемме 4.1.1 группа $N(S_n)$ является подгруппой в прямом произведении групп $N_1 \leqslant S_{n_1}$ и $N_2 \leqslant S_{n_2}$, причем $n_1 + n_2 = n$. Поскольку n — минимальное натуральное число, для которого не выполняется утверждение теоремы, группы из $N(S_{n_1})$ и $N(S_{n_2})$ имеют такое строение, как указано в теореме.

Пусть $n_1 \neq 2(2k+1)+1$, тогда $|N_1| \leqslant |S|$, где $S \in \mathrm{Syl}_2(S_{n_1})$. В зависимости от того, представимо ли число n_2 в виде $2(2k+1)+1$ или нет, мы получаем следующие оценки порядка группы N_2: $|N_2| \leqslant 3|S_1|$, либо $|N_2| \leqslant |S_2|$, где $S_1 \in \mathrm{Syl}_2(S_{n_2-3})$, а $S_2 \in \mathrm{Syl}_2(S_{n_2})$. В первом случае мы имеем $|N| \leqslant |N_1| \cdot |N_2| \leqslant |S| \cdot 3|S_1| \leqslant |P|$, причем равенство может достигаться лишь в том случае, когда $N_1 \in \mathrm{Syl}_2(S_{n_1})$, $N_2 = S_1 \times \langle (k_1, k_2, k_3) \rangle$, т. е. когда с точностью до сопряжения выполнено равенство $N = P$, что противоречит индукционному предположению. Аналогично разбирается случай, когда $N_2 \in \mathrm{Syl}_2(S_{n_2})$.

Пусть $n_1 = 2(2k_1+1)+1$, $n_2 = 2(2k_2+1)+1$. Тогда $|N(G)| \leqslant 3|S_3| \cdot 3|S_1| < |P|$, где $S_3 \in \mathrm{Syl}_2(S_{n_1-3})$, следовательно, и в этом случае мы приходим к противоречию. Таким образом, случай, когда среди орбит существуют подмножества разного порядка, невозможен.

2. Все орбиты относительно действия группы $Z(N)$ одинакового порядка k. Пусть $I_1, \ldots, I_{\frac{n}{k}}$ — все орбиты множества $\{1, \ldots, n\}$ относительно действия группы $Z(N)$. В том случае, когда действие группы $N/Z(N)$ на множестве орбит $I_1, \ldots, I_{\frac{n}{k}}$ не является транзитивным, группа N является подгруппой прямого произведения групп N_1 и N_2, каждая из которых является нильпотентной подгруппой в симметрической группе меньшей степени. Также, как в первом случае можно доказать, что тогда N не является контрпримером.

Пусть группа N на орбитах $I_1, \ldots, I_{\frac{n}{k}}$ действует транзитивно. В силу леммы 4.1.1(2) порядок центра $Z(N)$ равен k, группу $N/Z(N)$ можно рассматривать как нильпотентную подгруппу группы $S_{\frac{n}{k}}$, поэтому $|N| \leqslant k \cdot |N_3|$, где $N_3 \in N(S_{\frac{n}{k}})$. Нетрудно проверить, что в этом случае $|N| \leqslant |\mathrm{Syl}_2(S_n)|$, кроме $n = k = 3$. Теорема для симметрических групп доказана.

Рассмотрим теперь знакопеременные группы. Пусть n — минимальное натуральное число, при котором существует контрпример к утверждению теоремы и пусть $N \in N(A_n)$ — этот контрпример. Пусть R обозначает нильпотентную подгруппу группы A_n, которая совпадает с большей нильпотентной группой, указанной в теореме. Как и в случае симметрических групп возможны два случая.

1. Действие группы $N/Z(N)$ на множестве орбит центра $Z(N)$ не является транзитивным. Тогда либо группа N содержится в прямом произведении нильпотентных групп N_1 и N_2, каждая из которых является нильпотентной подгруппой в знакопеременной группе меньшей размерности, либо она лежит в прямом произведении двух нильпотентных групп N_1 и N_2, каждая из которых является нильпотентной подгруппой в симметрической группе меньшей размерности, но не совпадает с этим прямым произведением. Нетрудно проверить, используя известные порядки больших нильпотентных подгрупп в симметрических группах, что в этом случае N не является контрпримером.

2. Группа $N/Z(N)$ на множестве орбит действует транзитивно. Пусть порядок каждой из орбит равен k. Тогда в силу леммы 4.1.1 $|Z(N)| = k$ и группу $N/Z(N)$ можно рассматривать как нильпотентную подгруппу группы $S_{\frac{n}{k}}$. Нетрудно проверить, что при $n \geqslant 7$ справедливо неравенство $k|N_4| \leqslant \frac{1}{2}|S| \leqslant |R|$, где $N_4 \in N(A_{\frac{n}{k}})$ и

$S \in \mathrm{Syl}_2(S_n)$. ⊠

Таблица 4.1. Нильпотентные подгруппы максимального порядка в знакопеременных и симметрических группах

Группа G	$\mathbf{n}(G)$	Строение
A_3	3	$\langle(1,2,3)\rangle$
A_5	5	$\langle(1,2,3,4,5)\rangle$
A_6	9	$\langle(1,2,3)\rangle \times \langle(4,5,6)\rangle$
A_n, $n \neq 2(2k+1)+1$	$\frac{1}{2}2^{[n/2]+[n/2^2]+\dots}$	S, где $S \in \mathrm{Syl}_2(A_n)$
A_n, $n = 2(2k+1)+1$	$\frac{3}{2}2^{[(n-3)/2]+[(n-3)/2^2]+\dots}$	$S \times \langle(n-2,n-1,n)\rangle$, $S \in \mathrm{Syl}_2(A_{n-3})$
S_n, $n \neq 2(k+1)+1$	$2^{[n/2]+[n/2^2]+\dots}$	S, $S \in \mathrm{Syl}_2(S_n)$
S_n, $n = 2(2k+1)+1$	$3 \cdot 2^{[(n-3)/2]+[(n-3)/2^2]+\dots}$	$S \times \langle(n-2,n-1,n)\rangle$, $S \in \mathrm{Syl}_2(S_{n-3})$

§2 Общее строение нильпотентных подгрупп в простых алгебраических группах

Лемма 4.2.1. *Пусть N — замкнутая нильпотентная подгруппа связной простой алгебраической группы G, определенной над алгебраическим замыканием поля $GF(q)$. Тогда существует редуктивная подгруппа максимального ранга R группы G, содержащая группу N и справедливы следующие утверждения.*

1. *$N = N_s \times N_u$, т. е. группа N представима в виде прямого произведения своих подгрупп, состоящих из полупростых и унипотентных элементов.*

2. *$N_u \leqslant R^0$ и $\zeta(N_s) \cap R^0 \leqslant \zeta(R^0)$.*

3. *Если $N_0 = N \cap R^0$, $W_R = N_R(T)$ для некоторого максимального тора T группы R, то тогда N/N_0 изоморфно вкладывается в группу $N_W(W_1)/W_1$.*

Если N σ-инвариантна, то группа R σ-инвариантна.

Доказательство. Пусть N — некоторая замкнутая нильпотентная подгруппа связной простой алгебраической группы, определенной над алгебраическим замыканием поля $GF(q)$. Тогда группа N состоит из элементов конечного порядка и, в силу ([40, теорема 12.1.1]) представима в виде прямого произведения своих силовских p-подгрупп. В частности, группа N представима в виде $N_s \times N_u$ — прямого произведения своей полупростой и унипотентной частей, соответственно.

Если группа N_s нетривиальна, то тогда ее центр также нетривиален. Ясно, что $\zeta(N_s) = (\zeta(N))_s$. Пусть x — некоторый элемент из $\zeta(N_s)$. Тогда группа N лежит в

$C_G(x)$, причем N_u лежит в R^0. Обозначим группу $C_G(x)$ за R. В силу леммы 3.1.2 R является редуктивной подгруппой группы G максимального ранга. Предположим, что существует элемент s из $\zeta(N_s) \cap R^0$, не лежащий в $\zeta(R^0)$. Тогда рассмотрим группу $C_R(s)$. Ясно, что $N \leqslant C_R(s)$ и $N_u \leqslant R^0$. Кроме того, $C_R(s)$ — редуктивная подгруппа группы G максимального ранга. Поскольку размерность группы R на каждом шаге понижается, данный процесс конечен, так как размерность группы G конечна. Повторяя указанный выше процесс, получим редуктивную подгруппу R группы G максимального ранга, содержащую N. Заметим, что в том случае, когда N состоит из неподвижных точек относительно некоторого автоморфизма Фробениуса σ, группа R σ-инвариантна. Пункты 1 и 2 леммы доказаны.

Докажем пункт 3. Имеем $N/N_0 = NR^0/N_0R^0 \leqslant R/R^0$. Из доказательства леммы 3.1.2 следует, что любой элемент из R представим в виде nx, где $n \in N_R(T)$ для некоторого максимального тора T группы R^0, а $x \in R^0$. Отсюда получаем, что $R/R^0 \cong N_R(T)/N_{R^0}(T) \leqslant N_W(W_1)/W_1$ ⊠

Замечание. Из леммы 4.2.1 следует, что группа $N_0/\zeta(N_0)$ является нильпотентной подгруппой в прямом произведении простых алгебраических групп меньшей размерности — группе $R^0/\zeta(R^0)$. Таким образом, данная лемма обобщает результат [1] о строении полупростых нильпотентных подгрупп в обобщенных линейных группах над конечными полями, так как для $GL_n(K)$ справедливо $N_0 = N$.

Строение связных редуктивных подгрупп R группы G максимального ранга, а также подгрупп R_σ известно, см. [19], [20], [26] и [27], поэтому для изучения нильпотентных подгрупп в конечных группах лиева типа нам осталось найти порядки больших нильпотентных подгрупп в группах Вейля. Группы Вейля для типов B_n, C_n и D_n являются сплетением 2-группы и симметрической группы S_n. Используя информацию, полученную ранее о строении нильпотентных подгрупп в симметрических группах, можно легко сделать вывод, что большая нильпотентная подгруппа в группе Вейля для этих типов — это в точности силовская 2-группа. В таблице 4.2 ниже будут указаны оценки порядков больших нильпотентных подгрупп в группах Вейля для всех классических групп и их строение

Таблица 4.2. Нильпотентные подгруппы максимального порядка в группах Вейля

Тип системы Φ	Строение групп из $\mathbf{N}(W(\Phi))$	Оценка для $\mathbf{n}(W(\Phi))$
A_n	см. табл. 4.1	2^{n+1}
B_n и C_n	лежат в $\mathrm{Syl}_2(W)$	2^{2n}
D_n	лежат в $\mathrm{Syl}_2(W)$	2^{2n-1}

§3 Большие нильпотентные подгруппы конечных групп лиева типа

В этой части мы применим общие свойства нильпотентных подгрупп, полученные ранее, к конечным группам лиева типа. В частности будет доказано, что большая нильпотентная подгруппа в большинстве случаев совпадает с максимальной унипотентной подгруппой. Большие нильпотентные подгруппы в конечных группах Шевалле находятся однотипно, поэтому в качестве примера будет разобрана группа $A_n(q)$.

Пусть N — некоторая нильпотентная подгруппа группы $A_n(q)$, покажем, что ее порядок не превосходит порядка большой нильпотентной группы, указанного в таблице 4.3. Можно считать, что центр группы $A_n(q)$ тривиален. Тогда в силу леммы 4.2.1 группа N содержится в некоторой собственной редуктивной подгруппе максимального ранга связной простой алгебраической группы типа A_n.

Напомним сначала, какое строение имеют редуктивные подгруппы максимального ранга в простой связной алгебраической группе типа A_n, и как устроены их неподвижные точки относительно автоморфизма Фробениуса σ (см. [19]). Предположим, что группа G имеет тип A_n. Эндоморфизм σ группы G индуцирует эндоморфизм группы характеров X тора T, также называемый σ, который обладает свойством, что $\sigma = q\sigma_0$, где q — степень числа p и σ_0 — изометрия группы X. Изометрия σ_0 имеет порядок 1 или 2 в зависимости от того, будет ли группа G_σ нормальной или скрученной. Группа X содержит множество Φ корней, и Φ удобно записать в виде $\Phi = \{e_i - e_j : i \neq j, i, j \in \{0, 1 \ldots, n\}\}$, где $e_0, e_1, \ldots, e_n$ образуют ортонормированный базис $(n+1)$-мерного евклидова пространства. Группа Вейля W действует на этом пространстве, переставляя базисные элементы, в соответствии с симметрической группой S_{n+1}. Изометрия σ_0 действует на корнях либо тождественно, либо как элемент порядка 2, переводя e_i в e_{n-i}.

Корневая система любой σ-инвариантной редуктивной подгруппы группы G эквивалентна относительно W системе Φ_1 следующего типа. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — разбиение числа $n+1$, и пусть $I_1, I_2, \ldots$ — непересекающиеся подмножества множества $\{0, 1, \ldots, n\}$ с условием $|I_1| = \lambda_1$, $|I_2| = \lambda_2$, …. Пусть $\Phi_1 = \{e_i - e_j \in \Phi : i, j \in I_\alpha$ для некоторого $\alpha\}$. Тогда Φ_1 — подсистема системы Φ типа $A_{\lambda_1 - 1} \times A_{\lambda_2 - 1} \times \ldots$, и она будет σ-инвариантной при условии, что, когда σ_0 имеет порядок 2, Φ_1 неподвижна относительно линейного преобразования, определенного правилом $e_i \to -e_{n-i}$.

Лемма 4.3.1. *[19, предложение 7]. Пусть G — группа типа A_l, и пусть эндоморфизм σ таков, что группа G_σ нормального типа. Пусть G_1 — редуктивная подгруппа максимального ранга в G, соответствующая разбиению λ числа $l+1$. Пусть G_1^g — σ-инвариантная подгруппа группы G, получаемая скручиванием группы G_1 посредством элемента $w \in W$, определенного правилом $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Предположим, w отображается в τ относительно гомоморфизма $N_W(W_1) \to Aut_W(\Delta_1)$. Пусть m_i — количество частей разбиения λ, равных i, отсюда следует, что $Aut_W(\Delta_1) \cong S_{m_2} \times S_{m_3} \times \ldots$. Предположим, что τ дает разбиения $\mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \ldots$ чисел $m_2, m_3, \ldots$ соответственно. Тогда простые компоненты полупростой группы $(M^g)_\sigma$ имеют тип $A_{i-1}(q^{\mu_j^{(i)}})$ в точности с одной компонентой для каждого $i = 2, 3, \ldots$ и каждой части $\mu_j^{(i)}$ разбиения $\mu^{(i)}$.*

Порядок полупростой части $(S^g)_\sigma$ группы $(G_1^g)_\sigma$ дается формулой

$$(q-1)|(S^g)_\sigma| = \prod_{i,j}(q^{\mu_j^{(i)}}-1).$$

Поскольку центр группы $A_n(q)$ предполагается тривиальным, порядок централизатора, указанный в лемме 4.3.1, необходимо умножить на дробь $\frac{1}{(n+1,q-1)}$.

В силу леммы 4.3.1, существует подгруппа N_0 группы N, лежащая в некоторой σ-инвариантной связной редуктивной подгруппе R группы G максимального ранга. Кроме того, $|N : N_0| \leqslant 2^{n+1}$ (см. таблицу 2). Поскольку мы предполагаем, что центр группы $A_n(q)$ тривиален, группа R является собственной подгруппой группы G. Таким образом, группа N_0 представима в виде центрального произведения нильпотентных подгрупп из групп меньшей размерности и группы, которая является подгруппой неподвижных точек некоторого тора. Поэтому порядок группы N оценивается следующим образом

$$(q-1)|N| \leqslant \mathbf{n}(S_{n+1})\frac{1}{(n+1,q-1)}\prod_{i,j}(q^{\mu_j^{(i)}}-1)\prod_{i,j}(i,q^{\mu_j^{(i)}}-1)\mathbf{n}(A_{i-1}(q^{\mu_j^{(i)}})). \quad (4.1)$$

Здесь в качестве $A_{i-1}(q^{\mu_j^{(i)}})$ рассматривается группа с тривиальным центром.

Используя индукцию по лиеву рангу группы можно показать, что справедливы неравенства

$$(q^k-1)(i,q^k-1)\mathbf{n}(A_{i-1}(q^k)) \leqslant (q-1)(ik,q-1)\mathbf{n}(A_{ik-1}(q)), \quad (4.2)$$

$$(q-1)(i,q-1)\mathbf{n}(A_{i-1}(q))(q-1)(k,q-1)\mathbf{n}(A_{k-1}(q)) \leqslant (q-1)(ik,q-1)\mathbf{n}(A_{ik-1}(q) \quad (4.3)$$

(число $\mathbf{n}(A_k(q))$ берется из таблицы 4.2.1).

С помощью неравенств (4.2) и (4.3) правую часть выражения (4.1) можно привести к виду

$$(q-1)^2\mathbf{n}(S_{n+1})(n_1,q-1)\mathbf{n}(A_{n_1-1}(q))(n_2,q-1)\mathbf{n}(A_{n_2-1}(q)), \quad (4.4)$$

где $n_1+n_2=n+1$, либо

$$(q^2-1)\mathbf{n}(S_{n+1})((n+1)/2,q^2-1)\mathbf{n}(A_{(n+1)/2-1}(q^2)). \quad (4.5)$$

Нетрудно проверить, что выражения (4.4) и (4.5) не превосходят значений, указанных в таблице 4.3. Остальные конечные группы лиева типа изучаются таким же образом.

В приведенной ниже таблице 4.3 указано строение больших унипотентных подгрупп в том случае, когда конечная группа G данного типа имеет тривиальный центр. Для групп с произвольным центром большая нильпотентная подгруппа — это полный прообраз большой нильпотентной подгруппы в группе с тривиальным центром относительно естественного гомоморфизма.

Таблица 4.3. Нильпотентные подгруппы максимального порядка в конечных группах лиева типа

Группа G	Строение групп из $N(G)$	$n(G)$
$A_1(2^n)$	циклическая группа	2^n+1
$A_1(q)$, $q-1=2^n$	лежит в $\mathrm{Syl}_2(A_1(q))$	2^n
${}^2A_2(2^2)$	лежит в $\mathrm{Syl}_3({}^2A_2(2^2))$	27
${}^2A_2(3^2)$	лежит в$\mathrm{Syl}_2({}^2A_2(3^2))$	32
для всех остальных групп G	большая унипотентная группа	

§4 Большие нильпотентные подгруппы спорадических групп

При изучении больших нильпотентных подгрупп будет использоваться [25]. Во всех спорадических группах большая нильпотентная подгруппа — это некоторая силовская подгруппа, поэтому рассуждения, с помощью которых находятся большие нильпотентные группы однотипны. Мы опишем лишь идею.

Если N — нильпотентная подгруппа группы G, $p_1, \ldots, p_k$ — все простые числа, делящие порядок группы N, то в N существует центральный элемент порядка $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. Изучение порядков централизаторов таких элементов с помощью [25] показывает, что порядок N в этом случае меньше, чем порядок некоторой силовской подгруппы.

В качестве следствия докажем теорему 1.1.3.

Доказательство. В том случае, когда $N(G)$ совпадает с $\mathrm{Syl}_p(G)$ для некоторого простого числа p, утверждение теоремы следует из [4, теорема 2]. В том случае, когда $G = A_n$, $n = 2(2k+1)+1$ для некоторого натурального k легко заметить, что $|N(G)|^2 < 2^{2(n-1)} < |G|$. Если, наконец, группа G совпадает с $A_1(2^n)$, то группа $N(G)$ абелева и (см. [24]) справедливо неравенство $|N(G)|^2 < |G|$. ⊠

Глава 5

Большие нормальные нильпотентные подгруппы конечных групп

§1 Известные результаты

Лемма 5.1.1. *[40, теорема 5.3.3] Пусть G — группа порядка p^m, и пусть $|G : \Phi(G)| = p^r$. Тогда порядок $C_{Aut(G)}(G/\Phi(G))$ делит $p^{(m-r)r}$.*

Следствие 5.1.2. *Пусть G — конечная p-группа. Тогда, если порядок ее автоморфизма α не делится на p, и α действует тривиально на $G/\Phi(G)$, то α централизует G.*

Доказательство. Предположим, что α — нетривиальный автоморфизм, порядок которого не делится на p. Тогда, в силу леммы 5.1.1, он не лежит в $C_{Aut(G)}(G/\Phi(G))$. ⊠

Лемма 5.1.3. *[40, теорема 5.3.2] Пусть G — конечная p-группа. Тогда $\Phi(G) = [G, G]G^p$.*

Следствие 5.1.4. *Если G — конечная p-группа, то $G/\Phi(G)$ — элементарная абелева группа.*

Доказательство. Поскольку $[G, G] \leqslant \Phi(G)$, группа $G/\Phi(G)$ абелева. Кроме того, любой элемент g из G в степени p лежит в $\Phi(G)$. ⊠

Лемма 5.1.5. *[40, теорема 5.2.4] Пусть G — конечная группа. Тогда следующие свойства эквивалентны*

(i) Группа G нильпотентна.

(ii) Группа G является прямым произведением своих силовских подгрупп.

Следствие 5.1.6. *Пусть G — конечная группа, и B — ее нормальная p-подгруппа. Пусть в группе G есть элемент α, порядок которого не делится на p, и который не централизует B. Тогда группа G ненильпотентна.*

Доказательство. Группа $\langle \alpha, B \rangle$ не представима в виде прямого произведения своих силовских подгрупп, значит, она не является нильпотентной. Следовательно, вся группа G не является нильпотентной. ⊠

Лемма 5.1.7. *[40, теорема 5.4.4] Пусть G — разрешимая группа с подгруппой Фиттинга F. Тогда $C_G(F) = \zeta(F)$.*

Лемма 5.1.8. *[47, теорема 1.6] Если G — нильпотентная подгруппа группы $GL(V)$, порядка взаимно простого с характеристикой поля, над которым определено конечное векторное пространство V, то $|G| \leqslant |V|^\beta/2$, где $\beta = \log 32/\log 9$.*

Лемма 5.1.9. *[39]. Для любой конечной разрешимой группы G выполнено неравенство $i_p(G) \leqslant 3$.*

Следствие 5.1.10. *Пусть P — силовская p-подгруппа конечной нетривиальной разрешимой группы G, и пусть $O_p(G) = \{e\}$. Тогда $|G : P|^2 > |P|$.*

Доказательство. В силу леммы 5.1.9, существуют такие три силовские p-подгруппы P_1, P_2 и P_3, что $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{e\}$. Поскольку группа G не является p-группой, справедливо неравенство $|G| > \frac{|P_1|\cdot|P_2|}{|P_1 \cap P_2|}$. Далее, поскольку $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{e\}$, $|P_1 \cap P_2| \cdot |P_3| < |G|$. Таким образом, $|G| > \frac{|P_1|\cdot|P_2|}{|P_1 \cap P_2|} > \frac{|P_1|\cdot|P_2\cdot|P_3|\cdot|P_1 \cap P_2|}{|G|\cdot|P_1 \cap P_2|} = \frac{|P_1|^3}{|G|}$. Значит, $|G|^2 > |P_1|^3$ и, в силу теоремы Лагранжа [40, теорема 1.3.6] , $|G : P_1|^2 > |P_1|$. ⊠

Замечание. В [3] доказано, что утверждение леммы 5.1.9 справедливо для всех конечных групп. Однако доказательство этого факта в общем случае существенно использует классификацию конечных простых групп.

§2 Доказательство теоремы 1.1.4

В этом разделе будет доказана теорема 1.1.4, сформулированная во введении.

Пусть H — такая нильпотентная подгруппа группы G, для которой $|G : H| = n$. Рассмотрим $N = F(G)$. В силу леммы 5.1.5, $N = P_1 \times \ldots \times P_k$, где P_i — силовские p_i-подгруппы группы N.

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : G \to G/\Phi(N) = \overline{G}$ и будем в дальнейшем образы элементов и множеств относительно этого гомоморфизма обозначать той же буквой, что и сами элементы и множества, добавляя сверху черту.

Из теоремы Лагранжа следует, что $|\overline{G} : \overline{N}| = |G : N|$ и $|\overline{G} : \overline{H}| \leqslant |G : H|$, поэтому для доказательства теоремы 1.1.4 достаточно показать, что $|\overline{G} : \overline{N}| < |\overline{G} : \overline{H}|^5$.

В силу следствия 5.1.4, группу $\overline{N}$ можно представить в виде $\overline{N} = \overline{P_1} \times \ldots \times \overline{P_k}$, где $|\overline{P_i}| = p_i^{n_i}$ и $\exp(\overline{P_i}) = p_i$, т. е. в виде прямого произведения элементарных абелевых групп. Таким образом, каждое из $\overline{P_i}$ можно рассматривать как векторное пространство размерности n_i над полем $GF(p_i)$. Поскольку $N \trianglelefteq G$, можно рассмотреть гомоморфизмы $\varphi_i : G \to GL_{n_i}(p_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Эти гомоморфизмы индуцируют гомоморфизмы $\varphi_i : \overline{G} \to GL_{n_i}(p_i)$ и $\varphi_i : G/N \to GL_{n_i}(p_i)$, которые для упрощения записи обозначены теми же буквами. Пусть N_1 — подгруппа группы N, инвариантная относительно сопряжения некоторым элементом x из группы G. Элемент x действует *унипотентно на* N_1, если для всех i образ элемента x относительно гомоморфизма φ_i действует унипотентно на $\overline{N_1} \cap \overline{P_i}$. Если в качестве группы N_1 взята вся группа N, то будем говорить, что элемент x действует *унипотентно*. Аналогично определяется понятие унипотентного действия на подгруппе $\overline{N_1}$ для элемента $\overline{x} \in \overline{G}$ и для элемента $x \in G/N$. Подгруппа U группы G действует унипотентно на подгруппе N_1 группы N, если каждый ее элемент действует унипотентно на этой подгруппе (при этом, конечно, полагается, что N_1 инвариантна относительно сопряжения группой U). В том случае, когда N_1 совпадает с N, будем говорить, что группа U действует унипотентно. Как и для элементов определяется унипотентное действие для подгрупп из групп $\overline{G}$ и G/N.

В обозначениях, введенных выше, справедлива следующая лемма.

Лемма 5.2.1. *Пусть U — нормальная подгруппа группы G, которая действует унипотентно. Тогда $U \leqslant N$, следовательно, $\overline{U} \leqslant \overline{N}$, а в G/N нет нетривиальных нормальных подгрупп, действующих унипотентно.*

Доказательство. Можно считать, что $N \leqslant U$, так как в противном случае группа NU нормальна в G и действует унипотентно.

Предположим, что $U \neq N$ и V/N — минимальная характеристическая подгруппа в U/N. Тогда $V \trianglelefteq G$ и V/N — p-группа. Пусть P — силовская p-подгруппа в группе V, тогда $V = P \cdot \prod_{p_i \neq p} P_i$. Поскольку V действует унипотентно, ее образ относительно всех φ_i, при $p_i \neq p$, равен единице, поэтому $\overline{P}$ централизует все $\overline{P_i}$ при $p_i \neq p$. В силу следствия 5.1.2, группа P централизует все P_i при $p_i \neq p$, т. е. она представима в виде прямого произведения своих силовских подгрупп, значит, по лемме 5.1.5, нильпотентна. Следовательно, получена нормальная нильпотентная подгруппа группы G, не лежащая в N, что противоречит определению N. ⊠

Отметим в качестве простого следствия, что $C_{\overline{G}}(\overline{N}) = \zeta(\overline{N}) = \overline{N}$. Более того, $\overline{N} = F(\overline{G})$. Действительно, $\overline{N}$ — нормальная абелева подгруппа. Поскольку $F(\overline{G})$ нильпотентна, в силу следствия 5.1.6, на $\overline{N}$ она действует унипотентно, значит, она лежит в $\overline{N}$. Поэтому можно считать $G = \overline{G}$ и $F(G)$ — произведение элементарных абелевых групп. Таким образом, для упрощения обозначений, в дальнейшем черта будет опускаться. Это следствие на самом деле утверждает, что справедлива следующая

Лемма 5.2.2. *Если G — конечная разрешимая группа, то $F(G/\Phi(F(G))) = F(G)/\Phi(F(G))$.*

Лемма 5.2.3. *Пусть H — нильпотентная подгруппа группы G, N_1 — инвариантная относительно сопряжения группой H подгруппа группы N и H действует на N_1 не унипотентно. Тогда группа $\langle H, N_1\rangle$ ненильпотентна.*

Доказательство. Действительно, предположим, что группа $\langle H, N_1\rangle$ нильпотентна. Тогда N_1 — ее нормальная подгруппа, которая является прямым произведением элементарных абелевых групп. Следовательно, группа $\langle H, N_1\rangle$ действует на N_1 унипотентно (в силу следствия 5.1.6), и, значит, группа H действует на N_1 унипотентно, что противоречит условию. ⊠

Продолжим доказательство теоремы. Пусть H_1 — подмножество всех элементов группы H, которые действуют унипотентно. Тогда H_1 — нормальная подгруппа группы H. Действительно, замкнутость относительно взятия обратного и сопряжения очевидны, поэтому достаточно проверить замкнутость относительно умножения. Пусть $x, y \in H_1$ — произвольные два элемента. Тогда для любого $i = 1, \ldots, k$ имеем $|x^{\varphi_i}| = p_i^m$, $|y^{\varphi_i}| = p_i^l$. Поскольку H^{φ_i} — нильпотентная группа, она представима в виде прямого произведения своих силовских подгрупп. В частности, произведение любых двух p_i-элементов — вновь p_i-элемент, т. е. $|(xy)^{\varphi_i}| = p_i^n$, следовательно, для всех i элемент xy действует унипотентно, значит, лежит в H_1.

Поскольку подгруппа $H \cap N$ инвариантна относительно сопряжения группой H, из леммы 5.2.3 следует, что группа H действует на $H \cap N$ унипотентно. Поскольку группа N элементарная абелева, можно рассмотреть фактор-группу $N/(N \cap H) = Q_1 \times \ldots \times Q_k$, где $|Q_i| = p_i^{m_i}$ и $\exp(Q_i) = p_i$. Так как $N \cap H$ инвариантна относительно сопряжения группой H, можно рассмотреть индуцированные гомоморфизмы $\phi_i : H \to GL(m_i, p_i) = GL(Q_i)$. Поскольку для всех i группа H^{ϕ_i} нильпотентна, она представима в виде $T_i \times U_i$ — прямого произведения ее полупростой и унипотентной частей, соответственно. В силу леммы 5.1.8, $|T_i| < |Q_i|^\beta$. Покажем, что $|H/H_1| \leqslant \prod_i |T_i|$ и, следовательно,

$$|H/H_1| \leqslant |N/(N \cap H)|^\beta. \tag{5.1}$$

Пусть x, y — два элемента из группы H, образы которых в группе H/H_1 различны. Тогда существует такое $i \in \{1, \ldots, k\}$, что $x^{\phi_i} U_i \neq y^{\phi_i} U_i$, так как в противном случае элемент xy^{-1} действует унипотентно на $N/(N \cap H)$. Поскольку он также действует унипотентно на $N \cap H$, он действует унипотентно на всей группе N, значит, лежит в H_1 и, следовательно, образы элементов x и y в группе H/H_1 совпадают, что противоречит выбору этих элементов. Для завершения доказательства неравенства (5.1) нужна следующая простая лемма.

Лемма 5.2.4. *Пусть A — конечное множество и существуют отображения $\psi_i : A \to A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что для любых двух различных элементов a и b из A существует такое i, для которого $a^{\psi_i} \neq b^{\psi_i}$. Тогда $|A| \leqslant |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.*

Доказательство. В силу условий леммы можно построить инъективное вложение множества A в декартово произведение множеств $A_1 \times \ldots \times A_n$, заданное правилом: $a \to (a^{\psi_1}, \ldots, a^{\psi_n})$. Отсюда следует, что $|A| \leqslant |A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$. ⊠

Для завершения доказательства неравенства (5.1) заметим, что существуют отображения элементов группы H/H_1 в смежные классы групп H^{ϕ_i} по подгруппам U_i, которые удовлетворяют условиям леммы 5.2.4. Следовательно, $|H/H_1| \leqslant \prod_i |H^{\phi_i} : U_i| = \prod_i |T_i|$, неравенство (5.1) доказано.

Покажем теперь, что справедливо неравенство

$$|G/N : H_1N/N|^2 > |H_1N/N| = |H_1/(H \cap N)|. \tag{5.2}$$

Для этого рассмотрим следующие группы $C_i = C_G(\prod_{j \neq i} P_j)/N$. Поскольку $C_G(N) = N$, $C_i \cap \langle C_j | j \neq i \rangle = \{e\}$. Далее, ясно, что каждая группа C_i нормальна в G/N, поэтому можно рассмотреть подгруппу $C = C_1 \times \ldots \times C_k$ группы G/N. Поскольку группа H_1 действует унипотентно (и сама она нильпотентна), фактор-группа $H_1N/N \cong H_1/(H \cap N)$ (понятно, что $H \cap N = H_1 \cap N$) представима в виде прямого произведения своих силовских p_i-подгрупп $H_1N/N = H_{p_1} \times \ldots \times H_{p_k}$. Из доказательства леммы 5.2.1 следует, что $H_{p_i} \leqslant C_i$.

Далее, поскольку $C_i \trianglelefteq G/N$, в C_i нет нетривиальных нормальных p_i-подгрупп. В противном случае наибольшая такая подгруппа автоморфно допустима и, следовательно, является нетривиальной нормальной подгруппой группы G/N, действующей унипотентно, что противоречит лемме 5.2.1. Таким образом, из следствия 5.1.10 вытекает, что $|C_i : H_{p_i}|^2 > |H_{p_i}|$. Объединяя эти неравенства по всем i, получим, что

$$|G/N : H_1N/N|^2 \geqslant |C : H_1N/N|^2 > |H_1N/N| = |H_1/(H \cap N)|,$$

неравенство (5.2) доказано.

Для завершения доказательства основной теоремы нам потребуются еще два равенства, которые получаются простым применением теоремы Лагранжа.

$$|G:H| = |G:HN| \cdot |HN:H| \stackrel{1}{=} |G/N:HN/N| \cdot |N/(N\cap H)| \tag{5.3}$$

Здесь для равенства 1 используется, что любой элемент из HN представим в виде $n \cdot h$, где $n \in N$, $h \in H$. Таким образом, любой смежный класс по H можно записать как nH для некоторого $n \in N$ и совпадение смежных классов n_1H и n_2H означает, что $n_2^{-1}n_1 \in H \cap N$, следовательно, $|NH:H| = |N:(N\cap H)| = |N/(N\cap H)|$ (группа N абелева).

$$\begin{aligned}|G/N:H_1N/N| = |G/N:HN/N| \cdot |HN/H_1N| &\stackrel{2}{=}\\ = |G/N:HN/N| \cdot |H/H_1| &= |G/N:H_1N/N|.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь для доказательства равенства 2 используем, что $H\cap N = H_1 \cap N$, поэтому

$$|HN/H_1N| = |HN/N:H_1N/N| = |H/(H\cap N)|/|H_1/(H_1\cap N)| = |H|/|H_1| = |H/H_1|.$$

Теперь можно получить окончательную оценку.

$$\begin{aligned}|G:N| &= |G/N:HN/N| \cdot |HN/N:H_1N/N| \cdot |H_1N/N| =\\ &= |G/N:HN/N| \cdot |H/H_1| \cdot |H_1N/N| \stackrel{3}{<}\\ &< |G/N:HN/N| \cdot |N/(N\cap H)|^{\beta} \cdot |G/N:H_1N/N|^2 \stackrel{4}{=}\\ &= |G/N:HN/N| \cdot |N/(N\cap H)|^{\beta} \cdot |G/N:HN/N|^2 \cdot |H/H_1|^2 \stackrel{5}{<}\\ &< |G/N:HN/N|^3 \cdot |N/(N\cap H)|^{\beta} \cdot |N/(N\cap H)|^{2\beta} \stackrel{6}{\leqslant}\\ &\leqslant |G/N:HN/N|^3 \cdot |N/(N\cap H)|^{3\beta} < |G:H|^5.\end{aligned}$$

Здесь неравенство 3 получается применением ко второму и третьему множителям неравенств (5.1) и (5.2), соответственно. Равенство 4 получается после того, как к последнему множителю применяем равенство (5.4). Неравенство 5 вновь следует из неравенства (5.1). Наконец, неравенство 6 вытекает из равенства (5.3) и того, что $|G/N:HN/N| \geqslant 1$. Последнее неравенство следует из того, что $3 < 3\beta < 5$. Теорема 1.1.4 доказана.

Глава 6

Некоторые следствия

§1 Абелевы ABA факторизации конечных простых групп

В данном параграфе мы докажем теорему 1.1.2.

Доказательство. Понятно, что если для абелевых подгрупп группы G выполняется неравенство $|A|^3 < |G|$, то группа G не представима в виде ABA. Таким образом, в силу теоремы 1.1.1, необходимо рассмотреть лишь группы $L_2(q)$. Будем различать случаи четного и нечетного q.

Пусть q нечетно, $q \geqslant 7$. Тогда порядки максимальных абелевых подгрупп равны q, $\frac{q+1}{2}$, $\frac{q-1}{2}$. Если $L_2(q) = ABA$, то для порядков A и B возможны следующие два варианта: $|A| = |B| = q$ либо $|A| = q$, $|B| = \frac{q+1}{2}$. Простым вычислением, используя канонический вид элементов в $L_2(q)$, получаем, что если u — неединичный унипотентный элемент, то $C_{L_2(q)}(u) = U$, где U — унипотентная подгруппа группы $L_2(q)$. Поэтому для любой силовской p-подгруппы P и для любого элемента x из $L_2(q)$ имеем: $P \cap P^x$ равно либо 1, либо P.

Рассмотрим теперь оба варианта для A и B. Найдем порядок множества AbA, где b — некоторый элемент из B. Тогда $|AbA| = |AbAb^{-1}| = \frac{|A|^2}{|A\cap A^{b^{-1}}|} = \begin{cases} |A| \\ |A|^2 \end{cases}.$

Если $L_2(q) = ABA$, то получаем следующие две системы уравнений (соответственно при первом и втором вариантах):

$$\begin{cases} qx + y = \frac{q^2-1}{2}, \\ x + y = q, \end{cases}$$

$$\begin{cases} qx + y = \frac{q^2-1}{2}, \\ x + y = \frac{q+1}{2}, \end{cases}$$

где x, y — целые числа. Нетрудно убедиться, что ни та, ни другая системы не имеют решений в целых числах ни при каком q. Поэтому $L_2(q)$ не представима в виде ABA, когда q нечетно.

Пусть q четно. Тогда для порядков A и B имеются четыре варианта, при которых $|G| \leqslant |A| \cdot |B| \cdot |A|$. Это следующие пары: $(q, q+1)$, (q, q), $(q+1, q-1)$, $(q+1, q)$. Первые два варианта рассматриваются так же, как для нечетного q, и для них $G \neq ABA$.

Для остальных двух воспользуемся тем, что $L_2(2^t) \cong SL_2(2^t)$. Если порядок группы A равен $q+1$, то в группе $SL_2(2^{2t})$ она сопряжена с подгруппой матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha\, 0 \\ 0\, \alpha^q \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для неединичного элемента a из A имеем $C_{SL_2(q)}(a) = A$, значит, $A \cap A^x$ равно либо 1, либо A. Кроме того, $|N_{SL_2(q)}(A)| = 2(q+1)$. С помощью того же рассуждения, что и для нечетного q, получаем следующие две системы (соответственно при третьем и четвертом вариантах):

$$\begin{cases} (q+1)x + y = q(q-1), \\ \quad\ x \quad\ + y = \ q-1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (q+1)x + y = q(q-1), \\ \quad\ x \quad\ + y = \ q+1. \end{cases}$$

В третьем случае система не имеет решения в целых числах, а в четвертом имеет: $x = q-2$, $y = 2$. Поскольку $|N_{SL_2(q)}(A)| = 2(q+1)$, то $SL_2(q) = ABA$. ⊠

§2 Большие нормальные нильпотентные подгруппы в конечных группах

В качестве следствия из теоремы 1.1.4 получается решение вопроса, сформулированного в начале диссертации, в общем случае.

Теорема 6.2.1. *Пусть G — конечная группа, которая содержит нильпотентную подгруппу индекса n. Тогда она содержит нормальную нильпотентную подгруппу индекса не более, чем n^c для некоторой абсолютной константы c.*

Доказательство. В силу [12, теорема 2.13], группа G содержит нормальную разрешимую подгруппу R индекса не более, чем n^{c_1} для некоторой абсолютной константы c_1. Пусть H — нильпотентная подгруппа индекса n, о которой говорится в условии теоремы. Тогда $R \cap H$ — нильпотентная подгруппа индекса не более, чем n в R. В силу теоремы 1.1.4, $|R : F(R)| < n^5$. Поскольку подгруппа Фиттинга является характеристической, она нормальна в G и $|G : F(R)| < n^{c_1+5}$. ⊠

Замечание. Теорема 1.1.4 доказана без использования классификации конечных простых групп. Доказательство теоремы 2.13 в [12] существенно использует теорему о классификации конечных простых групп. Используя доказательство теоремы 2.13, приведенное в [12], можно получить следующую оценку константы c_1 (из теоремы 6.2.1):

$$c_1 \leqslant \frac{\beta+1}{1-\alpha} + \frac{2}{(1-\alpha)\log_2 60}.$$

Здесь константы α и β определяются следующим образом.

$\alpha < 1$ — это такая абсолютная константа, что для любой конечной неабелевой простой группы G и для любой ее нильпотентной подгруппы N справедливо неравенство $|N| \leqslant |G|^\alpha$.

β — это такая абсолютная константа, что для любой конечной неабелевой простой группы G справедливо неравенство $|Out(G)| \leqslant |G|^{\beta}$.

В силу теоремы 1.1.3, в качестве α можно взять $\frac{1}{2}$. Нетрудно проверить, что в качестве β также можно взять $\frac{1}{2}$. Таким образом, константа c, указанная в теореме 6.2.1, не превосходит 9.

Литература

[1] *Р. Ф. Апатенок, Д. А. Супруненко, О нильпотентных неприводимых линейных группах над конечным полем*, ДАН БССР, т. 3 (1959), N 12, с. 475–478.

[2] *Д. Л. Загорин, Л. С. Казарин, Абелевы ABA-факторизации конечных групп*, ДАН, т. 347 (1996), N 5, с. 590–592.

[3] *В. И. Зенков, Пересечение нильпотентных подгрупп в конечных группах*, Фундаментальная и прикладная математика, т. 2 (1996), N 1, с. 1–91.

[4] *В. И. Зенков, В. Д. Мазуров, О пересечении силовских подгрупп в конечных группах*, Алгебра и логика, т. 35 (1996), N 4, с. 424–432.

[5] *В. В. Кабанов, А. С. Кондратьев, Силовские 2-подгруппы конечных групп (обзор)*, Свердловск: Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР, 1979.

[6] *А. С. Кондратьев, Подгруппы конечных групп Шевалле*, Успехи матем. наук, т. 41 (1986), N 1 (247), с. 57–96.

[7] *А. И. Мальцев, Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли*, Известия АН СССР, сер. матем., т. 9 (1945), N 4, с. 291–300.

[8] *В. С. Монахов, Инвариатные подгруппы бипримарных групп*, Мат. зам., т. 18 (1975), с. 877–887.

[9] *Дж. Хамфри, Линейные алгебраические группы* Москва, «Наука», 1980.

[10] *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь.* 13-е изд., Новосибирск, 1995.

[11] *Семинар по алгебраическим группам (сборник статей)*, М., «Мир», 1973.

[12] *L. Babai, A. J. Goodman, L. Pyber, Groups without Faithful Transitive Permutation Representations of Small Degree*, J. Algebra, v. 195 (1997), N 1, p. 1–29.

[13] *M. J. J. Barry, Large Abelian subgroups of Chevalley groups*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, v. 27 (1979), N 1, p. 59–87.

[14] *M. J. J. Barry, W. J. Wong, Abelian 2-subgroups of finite symplectic groups in characteristic 2*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, v. 33 (1982), N 3, p. 345–350.

[15] *A. Borel, Linear algebraic groups*, Benjamin, New York, 1969.

[16] *A. Borel and J. deSiebental, Les sous-groupes fermes de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv., v. 23 (1949), p. 200–221.

[17] *W. Burnside, On groups of order $p^\alpha q^\beta$*, Proc. London Math. Soc. v. 2 (1904), p. 388–392.

[18] *W. Burnside, On groups of order $p^\alpha q^\beta$ (Second paper)*, Proc. London Math. Soc., v. 2 (1905), p. 432–437.

[19] *R. W. Carter, Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups*, Proc. London Math. Soc. (3), v. 42 (1981), N 1, p. 1–41.

[20] *R. W. Carter, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type*, Proc. London Math. Soc. (3), v. 37 (1978), N 3, p. 491–507.

[21] *R. W. Carter, Conjugacy classes in the Weyl group*, Compositio Mathematica, 25, N1 (1972), 1–59.

[22] *R. W. Carter, Finite Simple Groups of Lie Type*, Wiley, London, 1972.

[23] *R. W. Carter, P. Fong, The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups*, J. Algebra, v. 1 (1964), N 2, p. 139–151.

[24] *A. Chermak, A. Delgado, A Measuring Argument for Finite Groups*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 107 (1989), N 4, p. 907–914.

[25] *J. H. Conway, Atlas of finite groups*, Oxford, Clarendon Press, 1985.

[26] *D. I. Deriziotis, Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type*, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universit'a't Essen, 1984, v. 11.

[27] *D. I. Deriziotis, The centralizers of semisimple elements of the Chevalley groups E_7 and E_8*, Tokio J. Math., 6, N1 (1983), 191–216.

[28] *P. Flavel, Class two sections of finite classical groups*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser., v 52 (1995), N 1, p. 111—120.

[29] *D. Gorenstein, R. Lyons, The local structure of finite groups of characteristic 2 type*, Memoirs Amer. Math. Soc., 1983, v. 276.

[30] *J. E. Humphreys, Conjugacy Classes in Semisimple Algebraic Groups*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Mathematical Survey and Monographs, v. 43.

[31] *P. B. Kleidman, R. A. Parker, R. A. Wilson, The maximal subgroups of the Fischer Group Fi_{23}*, J. London Math. Soc., v. 39 (1989), N 1, p. 89–101.

[32] *P. B. Kleidman, R. A. Wilson, The maximal subgroups of Fi_{22}*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., v. 102 (1987), N 1, p. 17–24.

[33] *P. B. Kleidman, R. A. Wilson, The maximal subgroups of Fi_{22}*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., v. 102 (1987), N 2, p. 383.

[34] *P. B. Kleidman, R. A. Wilson*, *The maximal subgroups of J_4*, Proc. London Math. Soc., v. 56 (1988), N 3, p. 484–510.

[35] *S. A. Linton*, *The maximal subgroups of the Thompson group*, J. London Math. Soc., v. 39 (1989), N 1, p. 79–88.

[36] *S. A. Linton*, *Corrections to 'The maximal subgroups of the Thompson group'*, J. London Math. Soc., v. 43 (1991), N 2, p. 253–255.

[37] *S. A. Linton, R. A. Wilson*, *The maximal subgroups of the Fischer groups Fi_{24} and Fi'_{24}*, Proc. London Math. Soc., v. 63 (1991), N 1, p. 113–164.

[38] *A. Mann*, *Soluble subgroups of symmetric and linear groups*, Israel J. Math. v. 55 (1986), N 2, p. 162–172.

[39] *D. S. Passman*, *Groups with normal solvable Hall p-subgroups*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 123 (1966), N 1, p. 99–111.

[40] *D. J. S. Robinson*, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag New York, 1996.

[41] *Y. Segev*, Ph. D. thesis, The Hebrew University of Jerusalem, 1985.

[42] *R. Steinberg*, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs Amer. Math. Soc., 1968, v. 80.

[43] *M. Suzuki*, *On a class of doubly transitive groups*, Ann. Math., v. 75 (1962), N 1, p. 105–145.

[44] *H. N. Ward*, *On Ree's series of simple groups*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 121 (1966), N 1, p. 62–80.

[45] *A. J. Weir*, *Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 6 (1955), N 4, p. 529–533.

[46] *R. A. Wilson*, *The Maximal Subgroups of the Baby Monster, I*, J. Algebra, v. 211 (1999), N 1, p. 1–14.

[47] *T. R. Wolf*, *Solvable and nilpotent subgroups of $GL_n(q^m)$*, Canad. J. Math., v. 34 (1982), N 5, p. 1097–1111.

[48] *W. J. Wong*, *Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, v. 32 (1982), N 2, p. 223–245.

[49] *W. J. Wong*, *Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, v. 33 (1982), N 3, p. 331–344.

[50] *W. J. Wong*, *Twisted wreath product and Sylow 2-subgroups of classical simple groups*, Math. Z., v. 97 (1967), N 5, p. 406–424.

Работы автора по теме диссертации.

[51] *Е. П. Вдовин*, *О порядках абелевых подгрупп в конечных простых группах*, Материалы XXXV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 1997, с. 21.

[52] *Е. П. Вдовин*, *О порядках абелевых подгрупп в конечных простых группах*, Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти Д. К. Фаддеева, тезисы докладов, Санкт-Петербург, 1997, с. 178–179

[53] *Е. П. Вдовин*, *О порядках абелевых подгрупп в конечных простых группах*, XV межрегиональная конференция, Красноярск, апрель 1997, с. 3.

[54] *Е. П. Вдовин*, *Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных простых группах Шевалле*, Материалы XXXVI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 1998, с. 24.

[55] *Е. П. Вдовин*, *Large normal subgroups of finite groups*, Kurosh Algebraic Conference '98, abstracts of talks, Москва, 1998, с. 125–126.

[56] *Е. П. Вдовин*, *Большие нильпотентные подгруппы конечных групп*, Материалы XXXVII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 1999, с. 22.

[57] *E. P. Vdovin*, *Large Abelian and Nilpotent Subgroups of Finite Simple Groups*, Wisla, Poland, June 6–10, 2000, p. 47–50.

[58] *Е. П. Вдовин*, *Большие нильпотентные и абелевы подгруппы конечных простых групп*, IV Международная конференция, посв. 60-летию проф. Ю. И. Мерзлякова, тезисы докладов, 7–11 авг. 2000 г., с. 39–46.

[59] *Е. П. Вдовин*, *Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных простых группах*, Алгебра и логика, т. 38 (1999), N 2, с. 131–160. (Перевод *E. P. Vdovin*, *Maximal Orders of Abelian Subgroups in Finite Simple Groups*, Algebra and Logic, v. 38 (1999), N 2, p. 67–83.)

[60] *Е. П. Вдовин*, *Большие нормальные нильпотентные подгруппы конечных групп*, Сибирский математический журнал, т. 41 (2000), N 2, с. 304–310. (Перевод *E. P. Vdovin*, *Large normal nilpotent subgroups of finite groups*, Siberian Mathematical Journal, v. 41 (2000), N 2, p. 246–251.)

[61] *Е. П. Вдовин*, *Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле*, Математические заметки, т. 68 (2000), вып. 1, с. 53–76 (Перевод *E. P. Vdovin* *Maximal orders of abelian subgroups in finite Chevalley groups*, Math. Notes, v. 68 (2000), N 1).

[62] *Е. П. Вдовин*, *Большие нильпотентные подгруппы конечных простых групп*, Алгебра и логика, т. 39 (2000), N 5 (Перевод *E. P. Vdovin* *Large nilpotent subgroups of finite simple groups*, Algebra and Logic, v. 39 (2000), N 5).

[63] *Е. П. Вдовин*, *Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле*, Алгебра и логика, т. 40 (2001) (Перевод *E. P. Vdovin* *Large abelian unipotent sugbgroups of finite Chevalley groups*, Algebra and Logic, v. 40 (2001)).