

Алдын-оол Т. А., Ерзин А. И., Залюбовский В. В.

ПОКРЫТИЕ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СЕНСОРАМИ*

Проблема энергоэффективного мониторинга плоской области сенсорами с регулируемыми радиусами мониторинга может быть сведена к задаче построения наименее плотного покрытия этой области кругами различных (не заданных априори) радиусов. В силу сложности этой задачи в литературе в основном исследуются так называемые регулярные покрытия, использующие круги одного, двух или трех радиусов. При этом центры кругов в таких покрытиях размещаются в узлах решетки, состоящей из правильных многоугольников, а также в некоторых внутренних точках многоугольников. Однако на практике не всегда удастся разместить сенсоры в определенных местах области. В данной работе предполагается, что сенсоры распределены в области мониторинга случайно, и анализируется энергоэффективность случайных покрытий, близких к регулярным, а также время жизни таких сенсорных сетей.

Ключевые слова: сенсорные сети, плотность покрытия, случайное распределение.

Введение

Беспроводная сенсорная сеть (БСС) представляет собой совокупность большого числа компактных электронных устройств — сенсоров, каждое из которых может осуществлять сбор (мониторинг) и первичную обработку определенной информации, а также обмениваться информацией с другими сенсорами посредством радиосвязи. Поскольку каждый сенсор оснащен источником питания ограниченной емкости, замена которого в большинстве приложений нецелесообразна или вовсе невозможна, проблема рационального расходования энергии является одной из основных при проектировании БСС [1].

Наиболее энергоемкими функциями сенсора являются мониторинг и обмен данными. В силу того что во многих приложениях мониторинг осуществляется непрерывно, а обмен данными — лишь эпизодически, в настоящей статье рассматривается только первая составляющая энергопотребления. Основным способом экономии энергии в БСС является задание расписания, при котором в каждый момент времени работает лишь часть сенсоров, а остальные находятся в состоянии сна [2].

В наиболее распространенной дисковой модели предполагается, что сенсор может успешно вести наблюдение в области, ограниченной кругом с радиусом R с центром в месте расположения сенсора. Величина R называется радиусом мониторинга. При этом количество энергии, затрачиваемое сенсором в единицу времени, пропорционально R^2 . Будем говорить, что точка на плоскости покрыта сенсором, если расстояние между ней и сенсором не превышает радиуса мониторинга. В случае, когда для успешного функционирования сети требуется обязательное покрытие каждой точки области мониторинга

* Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-92650-ИНД_а и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (госконтракт № 02.740.11.0429).

по меньшей мере одним сенсором, задача построения энергоэффективного покрытия при детерминированном размещении сенсоров сводится к отысканию наименее плотного покрытия области кругами различных радиусов [3–6].

Однако при мониторинге труднодоступных или опасных для человека областей не всегда удастся разместить сенсоры точно в заданных местах. Координаты сенсоров при этом могут рассматриваться как случайные величины с известным законом распределения [7; 8], и наиболее распространенной тактикой является выбор ближайшего сенсора к каждому из мест расположения центров кругов в соответствующем детерминированном покрытии [6; 9]. Очевидно, в этом случае нельзя гарантировать покрытие области, сохраняя радиусы мониторинга. В работе [9] показано, что увеличение радиуса мониторинга каждого сенсора на величину, равную максимальному расстоянию между требуемой и реальной позициями, гарантирует покрытие всей области. Однако такой способ имеет по меньшей мере два недостатка. Во-первых, величина приращения радиуса мониторинга может быть определена только после размещения сенсоров, что не всегда приемлемо на практике. Во-вторых, указанный метод не обладает достаточной универсальностью. Например, он неприменим в случае, когда для нормального функционирования сети достаточно обеспечить лишь частичный уровень покрытия.

Под временем жизни БСС обычно понимается отрезок времени, в течение которого множество активных сенсоров покрывают область мониторинга [10]. Заметим, что построение энергоэффективных покрытий представляет собой лишь часть решения задачи максимизации времени жизни БСС, которая заключается в нахождении совокупности таких покрытий и задании времени работы каждого из них таким образом, чтобы суммарное потребление энергии каждым сенсором не превосходило заданной величины, а общее время работы покрытий было максимально. Указанная задача является *NP*-трудной [11]. Известные в литературе методы решения этой проблемы ограничиваются рассмотрением детерминированной задачи покрытия конечного множества дискретных целей [2; 12; 13].

В настоящей статье решается задача нахождения расписания работы БСС для покрытия плоской области случайно распределенными сенсорами. Рассмотрены два варианта постановки задачи, для которых предложено несколько приближенных решений. Получены оценки времени жизни БСС в зависимости от количества распределенных сенсоров и их радиусов мониторинга. Проведено теоретическое и экспериментальное сравнение предложенных расписаний.

§ 1. Модель и постановка задач

Полагаем, что в плоской связной области O с площадью S случайно равномерно распределено m сенсоров. Зоной мониторинга каждого сенсора является круг с центром в месте расположения сенсора и радиусом, который может выбираться из отрезка $[0, R_{\max}]$. Предполагаем, что сенсор расходует энергию только на мониторинг, и каждый сенсор имеет начальную энергию E_0 . Количество энергии, затрачиваемое сенсором с радиусом мониторинга R в течение времени t , равно tR^2 .

Сенсорным покрытием (далее для краткости — *покрытием*) будем называть произвольное подмножество сенсоров с назначенным для каждого из них радиусом мониторинга. Без ограничения общности можно считать, что в покрытие входят все сенсоры. Если сенсор не входит в рассматриваемое покрытие, полагаем его радиус мониторинга равным 0. Таким образом, любое покрытие можно представить вектором $C = (R_1, \dots, R_m)$, где $R_i \in [0, R_{\max}]$, $1 \leq i \leq m$.

Расписанием работы сенсорной сети (далее — *расписанием*) назовем множество вида $\{(C_1, t_1), \dots, (C_l, t_l)\}$, где C_k — некоторое покрытие, $t_k > 0$ — время работы покрытия C_k в этом расписании. Расписание является *допустимым*, если суммарное потребление энергии каждым сенсором не превосходит заданного значения E_0 :

$$\sum_{k=1}^l t_k R_{jk}^2 \leq E_0, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Здесь R_{jk} — радиус мониторинга сенсора j в покрытии C_k . Величину $\sum_{k=1}^l t_k$ будем называть *длиной расписания*.

Определение 1. Для заданной величины $Q \in (0, 1]$ покрытие $(R_1, \dots, R_m)$ назовем *сильным Q -покрытием*, если вероятность того, что любая точка области O попадает в зону мониторинга хотя бы одного сенсора, не меньше Q :

$$P\left(O \subseteq \bigcup_{j=1}^m D(j, R_j)\right) \geq Q,$$

где $D(j, R_j)$ — круг с центром в месте расположения сенсора j и радиусом R_j , $P(A)$ — вероятность события A .

Определение 2. Покрытие $(R_1, \dots, R_m)$ будем называть *Q -покрытием*, если математическое ожидание доли площади покрытой области не менее Q :

$$E\left(\mu\left(O \cap \bigcup_{j=1}^m D(j, R_j)\right) / \mu(O)\right) \geq Q,$$

где $\mu(X)$ — площадь области X , $E(a)$ — математическое ожидание случайной величины a .

Для обозначения множества всех сильных Q -покрытий и Q -покрытий будем использовать $\mathcal{C}_Q$ и $\tilde{\mathcal{C}}_Q$ соответственно. Нетрудно проверить, что $\mathcal{C}_Q \subset \tilde{\mathcal{C}}_Q$, т. е. любое сильное Q -покрытие является Q -покрытием.

Сформулируем основные задачи, рассматриваемые в статье.

Задача I. Найти допустимое расписание максимальной длины, состоящее из сильных Q -покрытий:

$$\sum_{k=1}^l t_k \rightarrow \max_{\substack{t_k > 0, \\ C_k \in \mathcal{C}_Q, l}}.$$

Задача II. Найти допустимое расписание максимальной длины, состоящее из Q -покрытий:

$$\sum_{k=1}^l t_k \rightarrow \max_{\substack{t_k > 0, \\ C_k \in \tilde{\mathcal{C}}_Q, l}}.$$

Задачи I–II являются NP -трудными уже в частном случае поиска подмножества 1-покрытий с одинаковыми радиусами мониторинга сенсоров [11].

§ 2. Базовые покрытия и расписания, построенные на их основе

В рамках этой статьи мы ограничимся рассмотрением так называемых регулярных покрытий, в которых область мониторинга покрывается однородной решеткой, образованной правильными многоугольниками, называемые далее *плитками*. Сенсоры при этом могут размещаться только в узлах решетки и центрах плиток. В качестве базы для предлагаемого метода решения мы используем три модели, имеющие наилучшие показатели эффективности среди известных в литературе. В работе [9] они обозначены как $A1$, $A3$ и $B3$ соответственно.

В покрытии $A1$ радиусы мониторинга всех сенсоров равны R , любые три соседних круга пересекаются в единственной точке, и центры этих кругов образуют правильный треугольник со стороной $R\sqrt{3}$ (рис. 1, *а*).

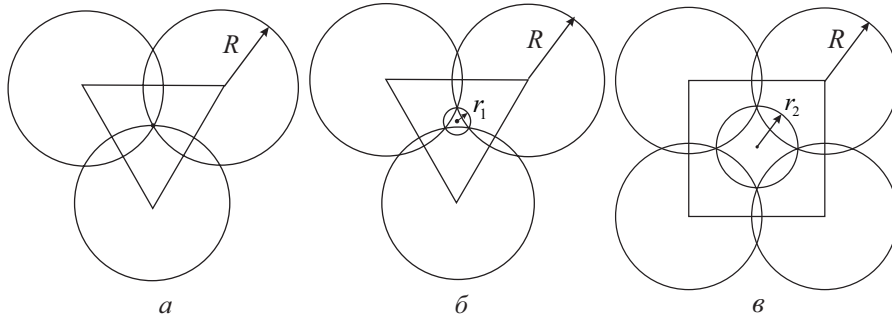


Рис. 1. Примеры регулярных покрытий

В покрытии $A3$ три соседних круга с радиусом R , центры которых являются вершинами правильного треугольника со стороной $6R\sqrt{3}/\sqrt{31}$, пересекаются, оставляя непокрытым пространство между ними, которое покрывается дополнительным кругом с радиусом $r_1 = R/\sqrt{31}$, размещаемым в центре треугольника (рис. 1, *б*).

И, наконец, в покрытии $B3$ сенсоры с радиусом мониторинга R находятся в узлах квадратной решетки со стороной квадрата $4R/\sqrt{5}$, а в центре каждого из них размещается дополнительный сенсор с радиусом мониторинга $r_2 = R/\sqrt{5}$ (рис. 1, *в*).

Радиусы мониторинга R , r_1 и r_2 будем называть *базовыми*.

При случайном распределении сенсоров модифицируем описанные покрытия, выбирая сенсоры, ближайšie к каждому из мест расположения центров кругов в регулярном покрытии, одновременно изменяя радиус мониторинга выбранных сенсоров на величину ϵ , значение которой будет определено позднее. Обозначим такие покрытия $A1^\epsilon$, $A3^\epsilon$ и $B3^\epsilon$ соответственно.

Опишем процедуру построения расписаний на основе введенных покрытий.

2.1. Расписание $M1^\varepsilon$

Основой расписания $M1^\varepsilon$ является покрытие $A1^\varepsilon$. Пусть в область O помещена однородная треугольная решетка со стороной плитки $R\sqrt{3}$. Определим множество активных сенсоров $C = \{s_i \mid i \in I\}$, где I — множество узлов решетки, s_i — ближайший к узлу i сенсор. Положим радиусы мониторинга всех сенсоров в C равными $R + \varepsilon$. Пусть время жизни покрытия равно $E_0/(R + \varepsilon)^2$. В этом случае начальная энергия каждого активного сенсора будет израсходована полностью. Передвинем решетку вправо на величину 2δ , где $\delta = \sqrt{S/(\pi m)}$ — радиус круга, содержащего в среднем один сенсор (рис. 2).

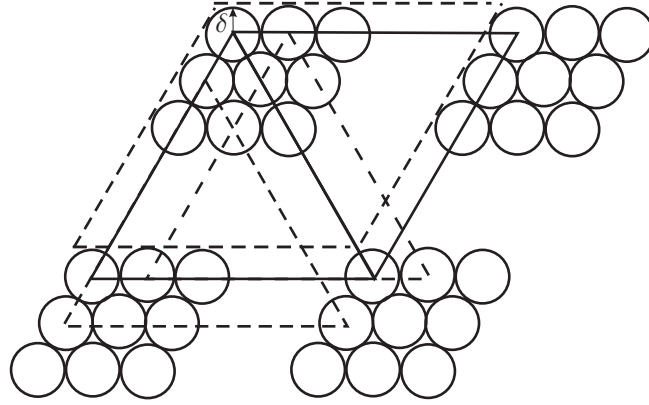


Рис. 2. Пример перемещения решетки в расписании $M1^\varepsilon$

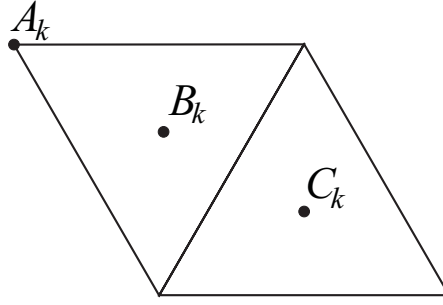
С большой вероятностью в δ -окрестности каждого нового узла решетки находится по крайней мере один сенсор, причем этот сенсор не использовался в предыдущем покрытии. Каждое такое перемещение решетки дает новое покрытие, время жизни которого равно $E_0/(R + \varepsilon)^2$, и общее число полученных таким образом покрытий оценивается величиной $\lfloor R\sqrt{3}/(2\delta) \rfloor$. Можно также передвинуть решетку $\lfloor R\sqrt{3}/(2\delta) \rfloor - 1$ раз вниз и получить новые покрытия, каждое с временем жизни, равным $E_0/(R + \varepsilon)^2$ (см. рис. 2). В результате количество непересекающихся покрытий определяется величиной $3R^2/(4\delta^2)$, откуда следует, что длина расписания $M1^\varepsilon$ оценивается величиной

$$L_{M1^\varepsilon} \approx \frac{3E_0R^2}{4\delta^2(R + \varepsilon)^2}.$$

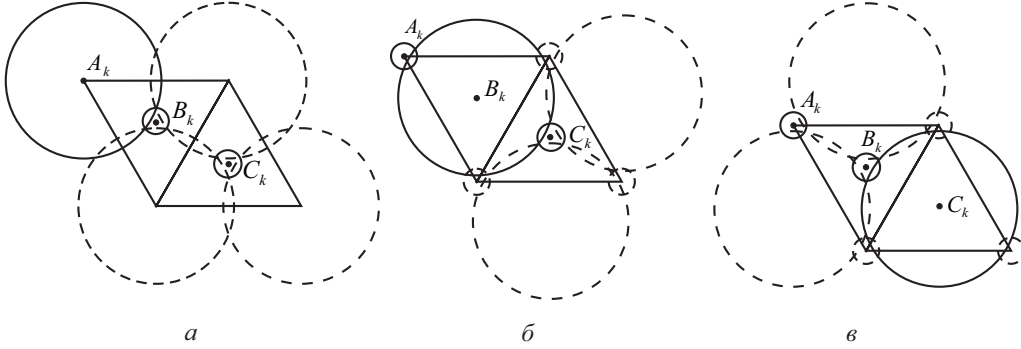
2.2. Расписание $M2^\varepsilon$

В силу того что в покрытии $A3^\varepsilon$ используются сенсоры с разными радиусами мониторинга, расписание $M2^\varepsilon$, построенное на его основе, имеет более сложную структуру. Рассмотрим однородную треугольную решетку со стороной плитки $6R\sqrt{3}/\sqrt{31}$. В силу регулярности покрытия эту решетку можно представить в виде объединения K параллелограммов (рис. 3).

Для каждой точки $i \in \{A_k, B_k, C_k \mid k \in K\}$ рассмотрим ближайший к ней сенсор s_i . Определим множества активных сенсоров $M_1 = \{s_i \mid i = A_k, k \in K\}$, $M_2 = \{s_i \mid i = B_k, k \in K\}$, $M_3 = \{s_i \mid i = C_k, k \in K\}$, с помощью которых построим покрытия T_1, T_2, T_3 по следующему правилу. В покрытии T_i ($i = 1, 2, 3$) сенсоры M_i имеют радиусы

Рис. 3. Элемент решетки в расписании $M2^\varepsilon$

мониторинга $R + \varepsilon$, радиусы мониторинга сенсоров M_j ($j = 1, 2, 3, j \neq i$) равны $r_1 + \varepsilon$ (рис. 4).

Рис. 4. Пример покрытия элементов решетки в расписании $M2^\varepsilon$

Обозначим время жизни покрытия T_i через $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда количество энергии, затрачиваемое каждым сенсором из множества M_i , равно

$$E_i = x_i(R + \varepsilon)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 x_j(r_1 + \varepsilon)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Найдем такие значения x_i ($i = 1, 2, 3$), что $E_i \leq E_0$ и величина $\sum_{i=1}^3 x_i$ максимальна. Соотношения $E_i \leq E_0$ ($i = 1, 2, 3$) эквивалентны следующей системе неравенств:

$$x_1(R + \varepsilon)^2 + x_2(r_1 + \varepsilon)^2 + x_3(r_1 + \varepsilon)^2 \leq E_0, \quad (1)$$

$$x_1(r_1 + \varepsilon)^2 + x_2(R + \varepsilon)^2 + x_3(r_1 + \varepsilon)^2 \leq E_0, \quad (2)$$

$$x_1(r_1 + \varepsilon)^2 + x_2(r_1 + \varepsilon)^2 + x_3(R + \varepsilon)^2 \leq E_0. \quad (3)$$

Сложение неравенств (1)–(3) дает верхнюю оценку:

$$\sum_{i=1}^3 x_i \leq \frac{3E_0}{(R + \varepsilon)^2 + 2(r_1 + \varepsilon)^2},$$

достижимую в случае, когда каждое из неравенств (1)–(3) обращается в равенство.

Нетрудно показать, что искомые значения x_i определяются соотношениями:

$$x_i = \frac{E_0}{(R + \varepsilon)^2 + 2(r_1 + \varepsilon)^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Таким образом, если время жизни покрытия T_i равно $x_i = E_0/((R + \varepsilon)^2 + 2(r_1 + \varepsilon)^2)$ ($i = 1, 2, 3$), то их время жизни максимально и равно

$$t_0 = \frac{3E_0}{(R + \varepsilon)^2 + 2(r_1 + \varepsilon)^2}.$$

При этом каждый активный сенсор полностью расходует свою энергию E_0 .

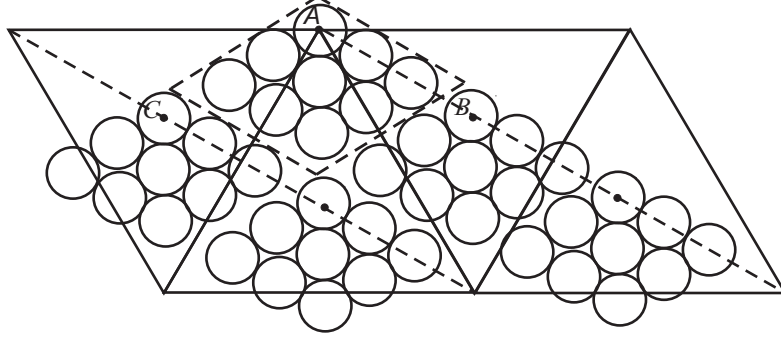


Рис. 5. Пример перемещения решетки в расписании $M2^\varepsilon$

Передвинем решетку на величину 2δ в направлении вектора AB (рис. 5). Для нового положения решетки снова строим покрытия T_1, T_2, T_3 , после чего опять сдвигаем решетку на величину 2δ в направлении вектора AB . Число таких сдвигов равно $\lfloor |AB|/(2\delta) \rfloor - 1$, $|AB| = 6R/\sqrt{31}$. Кроме того, столько же раз можно переместить решетку в направлении вектора AC , $|AC| = |AB|$.

Длина расписания $M2^\varepsilon$ оценивается величиной

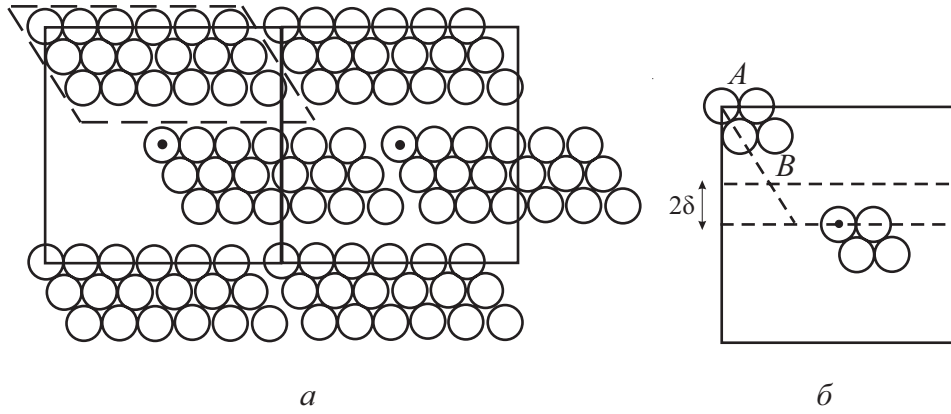
$$L_{M2^\varepsilon} \approx t_0 \frac{9R^2}{31\delta^2} = \frac{27E_0R^2}{31\delta^2((R + \varepsilon)^2 + 2(R/\sqrt{31} + \varepsilon)^2)}.$$

2.3. Расписание $M3^\varepsilon$

Перейдем к построению расписания на основе покрытия $B3^\varepsilon$. Рассмотрим квадратную решетку со стороной плитки $4R/\sqrt{5}$. Пусть I_2 и J_2 — множества узлов и центров плиток соответственно. Для каждой точки $i \in I_2 \cup J_2$ рассмотрим ближайший к ней сенсор s_i . Сенсоры из множеств $C_1 = \{s_i \mid i \in I_2\}$ и $C_2 = \{s_i \mid i \in J_2\}$ являются активными и образуют покрытия T_1 и T_2 по следующему правилу. В покрытии T_i ($i = 1, 2$) радиусы мониторинга сенсоров C_i равны $R + \varepsilon$, радиусы мониторинга сенсоров C_j ($j = 1, 2, j \neq i$) равны $r_2 + \varepsilon$. Аналогично расписанию $M2^\varepsilon$ найдем времена жизни x_i каждого покрытия T_i ($i = 1, 2$), при которых их сумма максимальна: $x_i = E_0/((R + \varepsilon)^2 + (r_2 + \varepsilon)^2)$. При этом каждый активный сенсор тратит энергию E_0 .

Для получения нескольких покрытий передвигаем решетку $\lfloor 2R/\delta\sqrt{5} \rfloor - 1$ раз вправо на величину 2δ и $\lfloor AB/(2\delta) \rfloor$ раз вниз, где $AB = 4(R - \delta\sqrt{5})/\sqrt{15}$ (рис. 6), строя при этом последовательно покрытия T_1 и T_2 , каждое со временем жизни $E_0/((R + \varepsilon)^2 + (r_2 + \varepsilon)^2)$. Длина расписания $M3^\varepsilon$ оценивается величиной

$$L_{M3^\varepsilon} \approx \frac{4E_0R}{\delta\sqrt{5}((R + \varepsilon)^2 + (R/\sqrt{5} + \varepsilon)^2)} \left(\frac{2R}{\delta\sqrt{15}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

Рис. 6. Пример перемещения решетки в расписании $M3^\epsilon$

§ 3. Решение задачи I

Определим значения параметра ϵ , при которых покрытия $A1^\epsilon$, $A3^\epsilon$ и $B3^\epsilon$ являются сильными Q-покрытиями. Очевидно, после этого расписания $M1^\epsilon$, $M2^\epsilon$ и $M3^\epsilon$ могут рассматриваться как приближенные решения задачи I.

3.1. Расписание $M1^{\epsilon_1}$

Пусть в область O с площадью S помещена однородная треугольная решетка со стороной плитки $R\sqrt{3}$. Обозначим через I множество узлов решетки. Мы предполагаем, что O — достаточно большая относительно круга с радиусом R область, что позволяет пренебречь краевым эффектом. В этом случае можно считать, что число узлов решетки равно $n = 2S/(3R^2\sqrt{3})$.

Для каждого узла $i \in I$ рассмотрим ближайший к нему сенсор s_i . Пусть радиусы мониторинга сенсоров $C = \{s_i \mid i \in I\}$ равны $R + x$, $0 < x < R\sqrt{3}/2$. Рассмотрим множество кругов $\{D(i, x) \mid i \in I\}$. При $0 < x < R\sqrt{3}/2$ имеем $D(i, x) \cap D(j, x) = \emptyset$ для любых $i \neq j$, $i, j \in I$. Обозначим событие « $\forall i \in I$ круг $D(i, x)$ содержит хотя бы один сенсор» через $A(x)$. Понятно, что если событие $A(x)$ наступит, то множество сенсоров C покрывает область O . Отметим, что обратное неверно. Таким образом, вероятность события $A(x)$ является нижней оценкой вероятности покрытия области O множеством сенсоров C .

Вычислим вероятность $P(A(x))$. Для этого рассмотрим дополнительное к $A(x)$ событие « $\exists i \in I$ такое, что круг $D(i, x)$ не содержит ни одного сенсора», которое обозначим $\bar{A}(x)$. Вероятность события $\bar{A}(x)$ равна $P(\bar{A}(x)) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i(x)\right)$, где событие $\bar{A}_i(x)$ — «круг $D(i, x)$ не содержит ни одного сенсора». Для вычисления этой вероятности воспользуемся формулой включения-исключения

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i(x)\right) &= \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i(x)) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(\bar{A}_i(x)\bar{A}_j(x)) + \\
 &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(\bar{A}_i(x)\bar{A}_j(x)\bar{A}_k(x)) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i(x)\right)
 \end{aligned}$$

и получим

$$P(\bar{A}(x)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} C_n^i \left(1 - i \frac{\pi x^2}{S}\right)^m.$$

Откуда вероятность события $A(x)$ равна

$$P(A(x)) = 1 - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} C_n^i \left(1 - i \frac{\pi x^2}{S}\right)^m. \quad (4)$$

Для оценки вероятности $P(A(x))$ используем разложение функции e^y в окрестности точки $y = 0$:

$$e^y = 1 + y + o(y).$$

Заменяя в (4) выражение $(1 - i\pi x^2/S)^m$ на величину $e^{-i\pi m x^2/S}$, получим следующую оценку для вероятности $P(A(x))$:

$$P_1(x) = 1 - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} C_n^i e^{-i\pi m x^2/S}.$$

Для вычисления величины $P_1(x)$ воспользуемся формулой Ньютона

$$(1 + y)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i y^i. \quad (5)$$

Полагая в (5) $y = -e^{-\pi m x^2/S}$, получим

$$P_1(x) = \left(1 - e^{-\pi m x^2/S}\right)^n.$$

Соотношение $P_1(x) \geq Q$ выполнено, если

$$x \geq \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{-S \ln(1 - \sqrt[n]{Q})}{\pi m}}.$$

Например, если в области площадью $S = 2500$ распределено $m = 1000$ сенсоров с базовыми радиусами мониторинга $R = 8$ выбрана треугольная решетка со стороной плитки $8\sqrt{3}$, то, для того чтобы гарантировать вероятность покрытия области $Q = 0,95$, радиусы мониторинга ближайших к узлам решетки сенсоров должны быть увеличены не менее чем на $\varepsilon_1 = 2,13$.

При замене вероятности $P(A(x))$ на $P_1(x)$ возникает вопрос об оценке погрешности. Рассмотрим $\sqrt{S/(\pi m)} < x < R\sqrt{3}/2$. При $0 < x \leq \sqrt{S/(\pi m)}$ имеем $0 < P_1(x) \leq (1 - e^{-1})^n \approx 0,63^n$. Обозначим $z_i = i\pi x^2/S$. Из соотношений $(1 - z_i)^m < e^{-mz_i}$ и $(1 - z_i)^m > e^{-mz_i} (1 - z_i)^{mz_i}$ следует неравенство

$$P(A(x)) > 1 - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i - \text{нечетн.}}} C_n^i e^{-mz_i} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i - \text{четн.}}} C_n^i e^{-mz_i} (1 - z_i)^{mz_i}.$$

Нетрудно показать, что $(1 - u)^v > 1 - uv$ при $u \in (0, 1), v > 1$. Используя последнее неравенство, получим следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}
1 - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i - \text{нечетн.}}} C_n^i e^{-mz_i} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i - \text{четн.}}} C_n^i e^{-mz_i} (1 - z_i)^{mz_i} &> \\
> 1 - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i - \text{нечетн.}}} C_n^i e^{-mz_i} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i - \text{четн.}}} C_n^i e^{-mz_i} (1 - mz_i^2) &= \\
= P_1(x) - \frac{m\pi^2 x^4}{S^2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i - \text{нечетн.}}} C_n^i e^{-mz_i} i^2 &> P_1(x) - \frac{m\pi^2 x^4}{S^2} \sum_{i=1}^n C_n^i e^{-mz_i} i^2.
\end{aligned}$$

Продифференцировав два раза соотношение (5), нетрудно получить следующее равенство

$$\sum_{i=1}^k C_k^i y^i i^2 = ky(1 + ky)(1 + y)^{k-2}.$$

Откуда

$$P(A(x)) > P_1(x) - H,$$

где $H = m\pi^2 x^4 n e^{-m\pi x^2/S} (1 + n e^{-m\pi x^2/S}) (1 + e^{-m\pi x^2/S})^{n-2} / S^2$. Аналогично можно получить оценку

$$P(A(x)) < P_1(x) + H.$$

Так, например, если в области площадью $S = 2500$ распределено $m = 1000$ сенсоров с базовыми радиусами мониторинга $R = 8$, а радиусы мониторинга ближайших к узлам решетки (со стороной треугольника $8\sqrt{3}$) сенсоров увеличены на $x = 2,13$ ($Q = 0,95$), то величина погрешности $|P_1(x) - P(A(x))|$ не превышает $H = 0,0018$.

3.2. Расписание $M2^{\varepsilon_2}$

Пусть в область O помещена однородная треугольная решетка со стороной плитки $6R\sqrt{3}/\sqrt{31}$. Обозначим через I_1 множество узлов решетки, J_1 — множество центров плиток. Учитывая, что число центров плиток в два раза больше числа узлов решетки, найдем суммарное число узлов и центров плиток $N_1 = 31S/(18R^2\sqrt{3})$. Для каждой точки $i \in I_1 \cup J_1$ рассмотрим ближайший к ней сенсор s_i . Пусть радиусы мониторинга сенсоров $C_1 = \{s_i \mid i \in I_1\}$ и $C_2 = \{s_i \mid i \in J_1\}$ равны соответственно $R+x$ и r_1+x , где $r_1 = R/\sqrt{31}$, $0 < x < 3R/\sqrt{31}$. Выберем множество $C = C_1 \cup C_2$ в качестве покрытия. Проведя рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем разделе, получим следующее утверждение. Для того чтобы покрытие C было сильным Q -покрытием, достаточно положить $x \geq \varepsilon_2 = \sqrt{-S \ln(1 - \sqrt[N]{Q})/(\pi m)}$.

Для примера, если в области площадью $S = 2500$ распределено $m = 1000$ сенсоров и $R = 8$, то для $Q = 0,95$ радиусы мониторинга R и r_1 ближайших к узлам решетки и к центрам плиток сенсоров нужно увеличить не менее чем на $\varepsilon_2 = 2,3$.

3.3. Расписание $M3^{\varepsilon_3}$

Пусть в область O помещена квадратная решетка со стороной плитки $4R/\sqrt{5}$. Рассмотрим в качестве покрытия множество C ближайших к узлам решетки и к центрам плиток сенсоров с радиусами мониторинга $R+x$ и r_2+x соответственно, $r_2 = R/\sqrt{5}$,

$0 < x < R\sqrt{2}/\sqrt{5}$. Для того чтобы покрытие C было сильным Q -покрытием, достаточно выполнения неравенства $x \geq \varepsilon_3 = \sqrt{-S \ln(1 - \sqrt[N_2]{Q})/(\pi m)}$, где $N_2 = 5S/(8R^2)$ — суммарное число узлов и центров плиток решетки.

Например, при $S = 2500$, $m = 1000$, $R = 8$, $Q = 0,95$ имеем $\varepsilon_3 = 2,21$.

Подставляя найденные значения ε_1 , ε_2 , ε_3 в соответствующие выражения из предыдущего раздела, легко оценить время жизни сети при различных значениях параметров S , m , R , E_0 и Q . Например, если в области площадью $S = 2500$ распределено $m = 1000$ сенсоров, $R = 8$ (здесь и далее в примерах будем полагать $E_0 = 640$) и $Q = 0,95$, то время жизни сети $L_{M1\varepsilon_1} = 377$, $L_{M2\varepsilon_2} = 335$, $L_{M3\varepsilon_3} = 334$. Зависимость времени жизни сети от Q продемонстрирована в табл. 2.

§ 4. Решение задачи II

В этом разделе сначала найдем значения ε , при которых покрытия $A1^\varepsilon$, $A3^\varepsilon$ и $B3^\varepsilon$ являются Q -покрытиями. Затем опишем процедуру построения соответствующих рисунков для решения задачи II.

4.1. Q -покрытие $A1^\alpha$

Пусть в область O площадью S помещена однородная треугольная решетка со стороной плитки $R\sqrt{3}$. Рассмотрим сенсоры $C = \{s_i \mid i \in I\}$, где I — множество узлов решетки, s_i — ближайший к узлу i сенсор. Пусть радиусы мониторинга сенсоров C равны $R + \alpha$, $-R < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}$. Выберем множество сенсоров C в качестве покрытия.

Обозначим через S_c площадь области $X = O \cap \bigcup_{i \in I} D(s_i, R + \alpha)$. Найдем нижнюю оценку математического ожидания $E(q_1(\alpha))$ доли площади покрытой области $q_1(\alpha) = S_c/S$. Из свойств математического ожидания и теоремы о площади случайного множества [14] следуют соотношения

$$E(q_1(\alpha)) = \frac{1}{S} E S_c = \frac{1}{S} \int_{x \in O} P(x \in X) dx.$$

Разобьем область O на плитки T_i ($i \in I$), каждая с центром в узле решетки, при этом любая точка области O принадлежит одной плитке (рис. 7, а).

Рассмотрим произвольную точку $x \in O$. Пусть точка x принадлежит плитке T_j ($j \in I$). Имеет место соотношение

$$P(x \in X) \geq P(x \in D(s_j, R + \alpha)),$$

откуда

$$E(q_1(\alpha)) \geq \frac{1}{S} \sum_{i \in I} \int_{x \in T_i} P(x \in D(s_i, R + \alpha)) dx.$$

Рассмотрим некоторую плитку T_j ($j \in I$). Обозначим через $A(D)$ событие, состоящее в том, что круг D содержит хотя бы один сенсор. Пусть $d(u, v)$ обозначает расстояние между точками u и v .

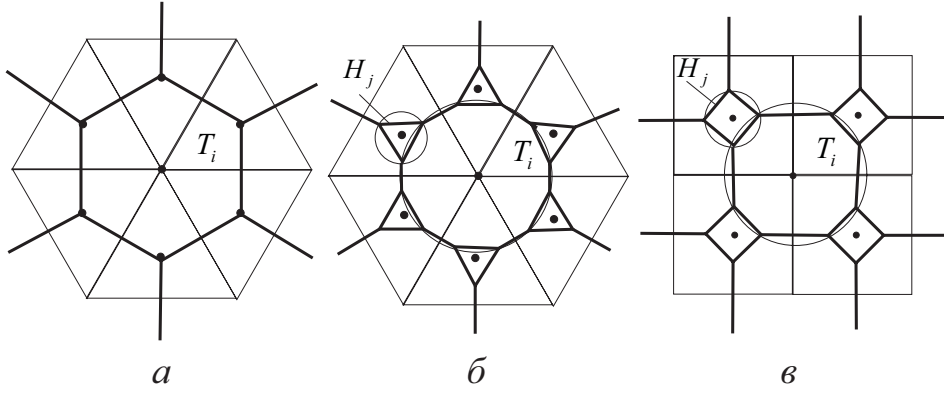


Рис. 7. Иллюстрации к доказательству оценок математического ожидания доли площади покрытой области

Для a и b , таких что $0 < b \leq a$, имеем

$$\int_0^b 2\pi\rho \left(1 - \left(1 - \frac{\pi(a-\rho)^2}{S}\right)^m\right) d\rho = G(a, b),$$

$$G(a, b) = \pi b^2 + \frac{S}{m+1} \left(1 - \frac{\pi(a-b)^2}{S}\right)^{m+1} - \frac{S}{m+1} \left(1 - \frac{\pi a^2}{S}\right)^{m+1} -$$

$$- 2a\sqrt{\pi S} \int_0^{\sqrt{\pi/S}a} (1 - z^2)^m dz + 2a\sqrt{\pi S} \int_0^{\sqrt{\pi/S}(a-b)} (1 - z^2)^m dz.$$

Для всех точек $x \in T_j$, таких что $d = d(x, j) \leq R + \alpha$, верно

$$P(x \in D(s_j, R + \alpha)) \geq P(A(D(j, R + \alpha - d))) = 1 - \left(1 - \frac{\pi(R + \alpha - d)^2}{S}\right)^m.$$

Обозначим интеграл $\int_{x \in T_j} P(x \in D(s_j, R + \alpha)) dx$ через $\mathcal{I}$.

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $-R < \alpha \leq (\sqrt{3}/2 - 1)R$. Имеем

$$\mathcal{I} \geq \int_0^{R+\alpha} 2\pi\rho \left(1 - \left(1 - \frac{\pi(R + \alpha - \rho)^2}{S}\right)^m\right) d\rho.$$

Откуда $E(q_1(\alpha)) \geq f_1(\alpha) = 2G(R + \alpha, R + \alpha)/(3R^2\sqrt{3})$.

2. Пусть $(\sqrt{3}/2 - 1)R < \alpha \leq 0$. Имеем

$$\mathcal{I} \geq \int_0^{R\sqrt{3}/2} 2\pi\rho \left(1 - \left(1 - \frac{\pi(R + \alpha - \rho)^2}{S}\right)^m\right) d\rho.$$

Откуда $E(q_1(\alpha)) \geq f_2(\alpha) = 2G(R + \alpha, R\sqrt{3}/2)/(3R^2\sqrt{3})$.

3. Пусть $0 < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}$. Имеем

$$\mathcal{I} \geq \int_0^{R\sqrt{3}/2} 2\pi\rho \left(1 - \left(1 - \frac{\pi(R + \alpha - \rho)^2}{S}\right)^m\right) d\rho +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\mu(T_j) - \mu(D(j, R\sqrt{3}/2)) \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\pi\alpha^2}{S} \right)^m \right) = \\
& = G(R + \alpha, R\sqrt{3}/2) + \left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi R^2}{4} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\pi\alpha^2}{S} \right)^m \right).
\end{aligned}$$

Откуда $E(q_1(\alpha)) \geq f_3(\alpha)$, где

$$f_3(\alpha) = \frac{2}{3R^2\sqrt{3}} \left(G(R + \alpha, R\sqrt{3}/2) + \left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi R^2}{4} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\pi\alpha^2}{S} \right)^m \right) \right).$$

Нетрудно убедиться, что функции $f_i(\alpha)$ ($i = 1, 2, 3$) (каждая на своей области определения) являются непрерывными и монотонно возрастающими. Определим на интервале $(-R, -R + \sqrt{S/\pi})$ функцию

$$g_1(\alpha) = \begin{cases} f_1(\alpha) & \text{при } -R < \alpha \leq (\sqrt{3}/2 - 1)R, \\ f_2(\alpha) & \text{при } (\sqrt{3}/2 - 1)R < \alpha \leq 0, \\ f_3(\alpha) & \text{при } 0 < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}. \end{cases}$$

Функция $g_1(\alpha)$ непрерывная и монотонно возрастающая на интервале $(-R, -R + \sqrt{S/\pi})$. Используем итерационный метод дихотомии для нахождения корня α_1 уравнения $g_1(\alpha) - Q = 0$. При $\alpha \geq \alpha_1$ имеет место неравенство $g_1(\alpha) \geq Q$, откуда следует соотношение $E(q_1(\alpha)) \geq Q$.

Например, если в области площадью $S = 2500$ распределено $m = 1000$ сенсоров, то, для того чтобы гарантировать долю площади покрытой области $Q = 0,65$, базовые радиусы мониторинга сенсоров $R = 8$ нужно уменьшить на 1,36. Для того чтобы гарантировать долю площади покрытой области $Q = 0,95$, радиусы мониторинга сенсоров нужно увеличить на 0,72.

4.2. Q -покрытие $A3^\alpha$

Пусть в область O помещена однородная треугольная решетка со стороной плитки $6R\sqrt{3}/\sqrt{31}$. Выберем сенсоры $C = \{s_i \mid i \in I_1 \cup J_1\}$, где I_1 — множество узлов решетки, J_1 — множество центров плиток, s_i — ближайший к точке i сенсор. Пусть радиусы мониторинга сенсоров $\{s_i \mid i \in I_1\}$ равны $R + \alpha$, а сенсоры $\{s_j \mid j \in J_1\}$ имеют радиусы мониторинга $r_1 + \max\{\alpha, -r_1\}$, $r_1 = R/\sqrt{31}$, $-R < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}$. Рассмотрим множество сенсоров C в качестве покрытия.

Обозначим через S_c площадь области $O \cap \left(\bigcup_{i \in I_1} D(s_i, R + \alpha) \cup \bigcup_{j \in J_1} D(s_j, r_1 + \alpha) \right)$. Оценим снизу математическое ожидание $E(q_2(\alpha))$ доли площади покрытой области $q_2(\alpha) = S_c/S$.

Разобьем область O на плитки T_i ($i \in I_1$) и H_j ($j \in J_1$), при этом центр плитки T_i находится в точке i , центр плитки H_j находится в точке j , любая точка области O принадлежит одной плитке (рис. 7, б). Число узлов решетки равно $n_1 = 31S/(54R^2\sqrt{3})$, число центров плиток равно $n_2 = 31S/(27R^2\sqrt{3})$.

Имеем

$$E(q_2(\alpha)) \geq \frac{1}{S} \left(\sum_{i \in I_1} \int_{x \in T_i} P(x \in D(s_i, R + \alpha)) dx + \sum_{j \in J_1} \int_{x \in H_j} P(x \in D(s_j, R/\sqrt{31} + \alpha)) dx \right),$$

где $\kappa = 1$ при $-R/\sqrt{31} < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}$, и $\kappa = 0$ при $-R < \alpha \leq -R/\sqrt{31}$.

Оценив для каждой плитки T_i ($i \in I_1$) и H_j ($j \in J_1$) интегралы $\int_{x \in T_i} P(x \in D(s_i, R + \alpha)) dx$ и $\int_{x \in H_j} P(x \in D(s_j, R/\sqrt{31} + \alpha)) dx$ аналогично интегралу $\mathcal{I}$, получим следующие пять случаев:

1) при $-R < \alpha \leq -R/\sqrt{31}$ имеем $E(q_2(\alpha)) \geq f_1(\alpha)$, где

$$f_1(\alpha) = \frac{31}{54R^2\sqrt{3}} G(R + \alpha, R + \alpha);$$

2) при $-R/\sqrt{31} < \alpha \leq -R/(2\sqrt{31})$ имеем $E(q_2(\alpha)) \geq f_2(\alpha)$, где

$$f_2(\alpha) = \frac{31}{54R^2\sqrt{3}} \left(G(R + \alpha, R + \alpha) + 2G(R/\sqrt{31} + \alpha, R/\sqrt{31} + \alpha) \right);$$

3) при $-R/(2\sqrt{31}) < \alpha \leq (3\sqrt{3}/\sqrt{31} - 1)R$ имеем $E(q_2(\alpha)) \geq f_3(\alpha)$, где

$$f_3(\alpha) = \frac{31}{54R^2\sqrt{3}} \left(G(R + \alpha, R + \alpha) + 2G(R/\sqrt{31} + \alpha, R/(2\sqrt{31})) \right);$$

4) при $(3\sqrt{3}/\sqrt{31} - 1)R < \alpha \leq 0$ имеем $E(q_2(\alpha)) \geq f_4(\alpha)$, где

$$f_4(\alpha) = \frac{31}{54R^2\sqrt{3}} \left(G(R + \alpha, 3R\sqrt{3}/\sqrt{31}) + 2G(R/\sqrt{31} + \alpha, R/(2\sqrt{31})) \right);$$

5) при $0 < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}$ имеем $E(q_2(\alpha)) \geq f_5(\alpha)$, где

$$f_5(\alpha) = \frac{31}{54R^2\sqrt{3}} \left(G(R + \alpha, 3R\sqrt{3}/\sqrt{31}) + \left(\frac{105R^2\sqrt{3}}{62} - \frac{27\pi R^2}{31} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\pi\alpha^2}{S} \right)^m \right) + \right. \\ \left. 2 \left(G(R/\sqrt{31} + \alpha, R/(2\sqrt{31})) + \left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{124} - \frac{\pi R^2}{124} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\pi\alpha^2}{S} \right)^m \right) \right) \right).$$

Функция

$$g_2(\alpha) = \begin{cases} f_1(\alpha) & \text{при } -R < \alpha \leq -R/\sqrt{31}, \\ f_2(\alpha) & \text{при } -R/\sqrt{31} < \alpha \leq -R/(2\sqrt{31}), \\ f_3(\alpha) & \text{при } -R/(2\sqrt{31}) < \alpha \leq (3\sqrt{3}/\sqrt{31} - 1)R, \\ f_4(\alpha) & \text{при } (3\sqrt{3}/\sqrt{31} - 1)R < \alpha \leq 0, \\ f_5(\alpha) & \text{при } 0 < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi} \end{cases}$$

является непрерывной и монотонно возрастающей на интервале $(-R, -R + \sqrt{S/\pi})$. Используем итерационный метод дихотомии для нахождения корня α_2 уравнения $g_2(\alpha) - Q = 0$. При $\alpha \geq \alpha_2$ имеет место соотношение $E(q_2(\alpha)) \geq Q$.

Например, при $S = 2500$, $m = 1000$, $R = 8$, $Q = 0,65$ базовые радиусы мониторинга сенсоров нужно уменьшить на 0,46. При $Q = 0,95$ радиусы мониторинга сенсоров нужно увеличить на 0,72.

4.3. Q -покрытие $B3^\alpha$

Пусть в область O помещена квадратная решетка со стороной плитки $4R/\sqrt{5}$. Рассмотрим в качестве покрытия множество ближайших к узлам решетки и к центрам плиток сенсоров с радиусами мониторинга $R + \alpha$ и $r_2 + \max\{\alpha, -r_2\}$ соответственно, $r_2 = R/\sqrt{5}$, $-R < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}$. Для оценки математического ожидания доли площади покрытой области $E(q_3(\alpha))$ область O разбивается показанным на рис. 7, в способом. Аналогично оценке математического ожидания $E(q_2(\alpha))$ получим $E(q_3(\alpha)) \geq g_3(\alpha)$, где

$$g_3(\alpha) = \begin{cases} f_1(\alpha) & \text{при } -R < \alpha \leq -R/\sqrt{5}, \\ f_2(\alpha) & \text{при } -R/\sqrt{5} < \alpha \leq (1 - \sqrt{2})R/\sqrt{10}, \\ f_3(\alpha) & \text{при } (1 - \sqrt{2})R/\sqrt{10} < \alpha \leq (2/\sqrt{5} - 1)R, \\ f_4(\alpha) & \text{при } (2/\sqrt{5} - 1)R < \alpha \leq 0, \\ f_5(\alpha) & \text{при } 0 < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}, \end{cases}$$

$$f_1(\alpha) = \frac{5}{16R^2} G(R + \alpha, R + \alpha),$$

$$f_2(\alpha) = \frac{5}{16R^2} \left(G(R + \alpha, R + \alpha) + G(R/\sqrt{5} + \alpha, R/\sqrt{5} + \alpha) \right),$$

$$f_3(\alpha) = \frac{5}{16R^2} \left(G(R + \alpha, R + \alpha) + G(R/\sqrt{5} + \alpha, R\sqrt{2}/(2\sqrt{5})) \right),$$

$$f_4(\alpha) = \frac{5}{16R^2} \left(G(R + \alpha, 2R/\sqrt{5}) + G(R/\sqrt{5} + \alpha, R\sqrt{2}/(2\sqrt{5})) \right),$$

$$f_5(\alpha) = \frac{5}{16R^2} \left(G(R + \alpha, 2R/\sqrt{5}) + \left(\frac{14R^2}{5} - \frac{4\pi R^2}{5} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\pi\alpha^2}{S} \right)^m \right) + \right.$$

$$\left. + G(R/\sqrt{5} + \alpha, R\sqrt{2}/(2\sqrt{5})) + \left(\frac{2R^2}{5} - \frac{\pi R^2}{10} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\pi\alpha^2}{S} \right)^m \right) \right).$$

Функция $g_3(\alpha)$ является непрерывной и монотонно возрастающей при $-R < \alpha < -R + \sqrt{S/\pi}$. Используем итерационный метод дихотомии для нахождения корня α_3 уравнения $g_3(\alpha) - Q = 0$. При $\alpha \geq \alpha_3$ имеет место соотношение $E(q_3(\alpha)) \geq Q$.

Например, при $S = 2500$, $m = 1000$, $R = 8$, $Q = 0,65$ базовые радиусы мониторинга сенсоров нужно уменьшить на 0,92. При $Q = 0,95$ радиусы мониторинга сенсоров нужно увеличить на 0,84. В табл. 1 приведены данные о значениях параметров α_i для $S = 2500$, $R = 8$, $m = 1000$ при различных Q .

4.4. Расписания $M1^{\alpha_1}$, $M2^{\alpha_2}$, $M3^{\alpha_3}$

Значения изменения радиуса, найденные в п. 4.1–4.3, позволяют построить соответствующие расписания, гарантирующие Q -покрытие области. Для этого достаточно воспользоваться процедурами сдвига решетки и вычисления времени работы каждого покрытия, описанными в § 2.

Так, для построения расписания $M1^{\alpha_1}$ рассмотрим в качестве покрытия множество сенсоров $C = \{s_i \mid i \in I\}$ с радиусами мониторинга $R + \alpha_1$. При этом время жизни покрытия C равно $E_0/(R + \alpha_1)^2$. Для построения нескольких покрытий используем способ построения непересекающихся покрытий расписания $M1^\epsilon$, сдвигая решетку на величину 2δ . Длина такого расписания оценивается величиной

$$L_{M1^{\alpha_1}} \approx \frac{3E_0R^2}{4\delta^2(R + \alpha_1)^2}.$$

Таблица 1. Зависимость величин α_i от Q

Q	α_1	α_2	α_3
0,75	-0,92	-0,45	-0,57
0,80	-0,69	-0,23	-0,33
0,85	-0,40	0,03	0,02
0,90	0,17	0,34	0,44
0,95	0,72	0,72	0,84
0,96	0,83	0,82	0,94
0,97	0,96	0,93	1,05
0,98	1,11	1,08	1,19
0,99	1,34	1,30	1,41
0,999	1,93	1,89	1,98
0,9999	2,70	2,70	2,70
0,99999	3,02	3,02	3,02

Аналогичным образом строим расписания $M2^{\alpha_2}$ и $M3^{\alpha_3}$ с оценками

$$L_{M2^{\alpha_2}} \approx \frac{27E_0R^2}{31\delta^2((R + \alpha_2)^2 + 2(R/\sqrt{31} + \alpha_2)^2)},$$

$$L_{M3^{\alpha_3}} \approx \frac{4E_0R}{\delta\sqrt{5}((R + \alpha_3)^2 + (R/\sqrt{5} + \alpha_3)^2)} \left(\frac{2R}{\delta\sqrt{15}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

Например, если в области площадью $S = 2500$ распределено $m = 1000$ сенсоров, $R = 8$, $E_0 = 640$, то при $Q = 0,95$ имеем $L_{M1^{\alpha_1}} = 508$, $L_{M2^{\alpha_2}} = 525$, $L_{M3^{\alpha_3}} = 471$. При $Q = 0,65$ имеем $L_{M1^{\alpha_1}} = 875$, $L_{M2^{\alpha_2}} = 760$, $L_{M3^{\alpha_3}} = 803$. В табл. 2 приведены значения оценочных длин рассматриваемых расписаний при различных Q для случая $S = 2500$, $m = 1000$, $R = 8$, $E_0 = 640$.

Таблица 2. Оценка длины расписаний

Q	$M1^{\varepsilon_1}$	$M2^{\varepsilon_2}$	$M3^{\varepsilon_3}$	$M1^{\alpha_1}$	$M2^{\alpha_2}$	$M3^{\alpha_3}$
0,75	404	365	361	770	761	715
0,80	399	360	356	722	708	663
0,85	394	354	351	668	652	595
0,90	387	346	344	578	591	526
0,95	377	335	334	508	525	471
0,96	373	331	330	495	510	458
0,97	370	327	327	481	493	445
0,98	364	321	321	465	471	429
0,99	356	312	313	443	442	405
0,999	333	287	290	392	374	352
0,9999	315	266	272	337	302	299
0,99999	299	249	256	318	278	279

§ 5. Численные эксперименты

Для проверки адекватности полученных оценок и практической значимости предложенных моделей был проведен вычислительный эксперимент по следующему сценарию. В квадрате 50×50 случайно равномерно распределялось m сенсоров с некоторым базовым радиусом мониторинга R . Затем на квадрат случайным образом накладывалась соответствующая однородная решетка, после чего выбирались активные сенсоры для очередного временного раунда. После корректировки значений остаточной энергии сенсоров процесс повторялся до тех пор, пока выполнялся критерий работоспособности сети. В экспериментах использовались два критерия: доля площади покрытой области в каждом временном раунде не менее заданной величины Q и текущее среднее значение доли площади покрытой области не менее Q . Параметры рассмотренных задач варьировались в следующих пределах: $0,75 \leq Q \leq 1$, $100 \leq m \leq 10\,000$, $4 \leq R \leq 12$. Начальная энергия сенсоров полагалась равной $E_0 = 640$. Для фиксированной совокупности параметров (m, R, Q) генерировалось по 100 случайных примеров, к каждому из которых поочередно применялось 9 расписаний (с базовыми радиусами, а также радиусами, увеличенными на α_i и δ). В табл. 3 и 4 приведены усредненные данные по 100 испытаниям для случая $R = 8$, $m = 1\,000$.

В результате экспериментов было установлено.

1. Среднее расстояние от узла решетки до ближайшего сенсора сильно коррелирует с величиной $\delta = \sqrt{S/(\pi m)}$ и не превышает ее. Это подтверждает правомочность сдвига решетки на величину 2δ при получении оценок длин предлагаемых расписаний.

2. Изменение радиуса мониторинга на α_i позволяет увеличить время жизни сети для всех моделей. Особенно существенным выигрыш оказывается в случае, когда значение Q близко к единице.

Таблица 3. Зависимость времени жизни от Q (критерий 1)

Q	$A1$	$A1^{\alpha_1}$	$A1^{\delta}$	$A3$	$A3^{\alpha_2}$	$A3^{\delta}$	$B3$	$B3^{\alpha_3}$	$B3^{\delta}$
0,75	608	686	495	630	696	500	615	699	483
0,80	597	612	491	611	647	495	602	633	478
0,85	578	595	483	570	577	486	573	561	469
0,90	533	497	471	485	502	469	509	493	456
0,95	427	430	443	213	423	425	356	420	420
0,96	378	421	425	56	405	405	295	402	410
0,97	318	367	408	10	387	387	123	382	384
0,98	171	356	387	2	356	354	16	355	358
0,99	8	339	334	0	319	293	1	320	308
0,999	0	279	173	0	256	55	0	266	104
0,9999	0	258	30	0	239	6	0	246	12
0,99999	0	260	12	0	227	3	0	240	7

Таблица 4. Зависимость времени жизни от Q (критерий 2)

Q	$A1$	$A1^{\alpha_1}$	$A1^{\delta}$	$A3$	$A3^{\alpha_2}$	$A3^{\delta}$	$B3$	$B3^{\alpha_3}$	$B3^{\delta}$
0,75	825	901	673	864	929	703	830	919	656
0,80	773	803	631	804	860	660	779	829	616
0,85	728	780	594	753	755	617	732	719	579
0,90	687	622	561	708	654	575	691	612	547
0,95	649	530	531	649	559	538	649	517	518
0,96	638	525	525	628	537	530	634	496	511
0,97	623	454	518	452	517	522	594	480	504
0,98	594	447	508	44	486	511	444	455	494
0,99	387	437	492	0	444	491	4	419	477
0,999	0	353	416	0	349	359	0	340	372
0,9999	0	287	262	0	274	67	0	277	159
0,99999	0	278	40	0	243	4	0	251	12

3. Результаты экспериментов согласуются с теоретическими оценками, что, с одной стороны, подтверждает адекватность допущений, сделанных при получении последних. С другой стороны, это дает возможность использовать полученные оценки в качестве рекомендаций по выбору модели и оценки ее эффективности на практике. В то же время следует заметить, что как теоретические, так и экспериментальные данные не дают возможности рекомендовать одно из трех рассмотренных расписаний как безусловно лучшее. При разных значениях исходных параметров лидерами оказываются разные расписания.

Список литературы

1. *Anastasi J., Conti M., Di Francesco M., Passarella A.* Energy Conservation in Wireless Sensor Networks: A Survey // *Ad Hoc Networks*. 2009. Vol. 7. No. 3. P. 537–568.
2. *Cardei M., Du D. Z.* Improving Wireless Sensor Network Lifetime through Power Aware Organization // *ACM Wireless Networks*. 2005. Vol. 11. No. 3. P. 333–340.
3. *Астраков С. Н., Ерзин А. И., Залюбовский В. В.* Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // *Дискретный анализ и исследование операций*. 2009. Т. 16, № 3. С. 3–19.
4. *Kershner R.* The Number of Circles Covering a Set // *American J. of Mathematics*. 1939. Vol. 61. No. 3. P. 665–671.
5. *Tóth F. G.* Covering the Plane with Two Kinds of Circles // *Discrete & Computational Geometry*. 1995. Vol. 13. No. 3. P. 445–457.
6. *Wu J., Yang S.* Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges // *Int. J. of Foundations of Computer Science*. 2005. Vol. 16. No. 1. P. 3–17.
7. *Fan G., Wang R., Huang H., Sun L., Sha C.* Coverage-Guaranteed Sensor Node Deployment Strategies for Wireless Sensor Networks // *Sensors*. 2010. Vol. 10. No. 3. P. 2064–2087.

8. Yen L.-H., Yu C. W., Cheng Y. M. Expected k -Coverage in Wireless Sensor Networks // Ad Hoc Networks. 2006. Vol. 5. No. 4. P. 636–650.
9. Zalyubovskiy V., Erzin A., Astrakov S., Choo H. Energy-Efficient Area Coverage by Sensors with Adjustable Ranges // Sensors. 2009. Vol. 9. No. 4. P. 2446–2460.
10. Dietrich I., Dressler F. On the Lifetime of Wireless Sensor Networks // ACM Trans. on Sensor Networks. 2009. Vol. 5. No. 1. P. 1–39.
11. Cardei M., Thai M. T., Li Y., Wu W. Energy-Efficient Target Coverage in Wireless Sensor Networks // Proc. of the 24th Conference of the IEEE Communications Society (INFOCOM). 2005. P. 1976–1984.
12. Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Максимизация времени функционирования беспроводных сенсорных сетей // Тр. XIV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. Т. 1. С. 363–369.
13. Cardei M., Wu J., Ku M. Improving Network Lifetime Using Sensors with Adjustable Sensing Ranges // Int. J. of Sensor Networks. 2006. Vol. 1. No. 1. P. 41–49.
14. Robbins H. E. On the Measure of a Random Set // The Annals of Mathematical Statistics. 1944. Vol. 15. No. 1. P. 70–74.

Материал поступил в редколлегию 13.08.2010

Адреса авторов

АЛДЫН-ООЛ Татьяна Андреевна
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: aldynoolt@rambler.ru

ЕРЗИН Адиль Ильясович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: adilerzin@math.nsc.ru

ЗАЛЮБОВСКИЙ Вячеслав Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: slava@math.nsc.ru