

Сенсорные сети и покрытие полосы эллипсами*

С. Н. АСТРАКОВ^{1,3}, А. И. ЕРЗИН^{2,3}

¹*Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,
Новосибирск, Россия*

²*Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия*

³*Новосибирский государственный университет, Россия*

e-mail: astrakov90@gmail.com, adilerzin@math.nsc.ru

Рассматривается проблема наименее плотного покрытия полосы эллипсами одного, двух и трёх типов. Предложены и исследованы новые модели регулярных покрытий, обобщающие ранее полученные результаты авторов для покрытия полосы кругами. Полученные результаты имеют как фундаментальное, так и прикладное значение и могут быть использованы при проектировании энергоэффективной системы мониторинга протяженных объектов беспроводными сенсорными сетями.

Ключевые слова: беспроводные сенсорные сети, энергоэффективность, плотность покрытия.

Введение

Задачи построения наименее плотных покрытий плоских объектов плоскими фигурами возникают в контексте различных приложений. При этом под плотностью покрытия плоской области понимается отношение суммы площадей элементов покрытия к площади покрываемой области.

Наиболее изученным на сегодня является покрытие плоских объектов кругами [1–4]. В последнее время в связи с развитием беспроводных сенсорных сетей (БСС) это направление становится перспективным [5–8]. Беспроводная сенсорная сеть состоит из множества автономных устройств (сенсоров), оснащённых невозобновляемыми элементами питания ограниченной ёмкости. Если принять “круговую модель”, в которой каждый сенсор покрывает (осуществляет мониторинг) круг некоторого радиуса с сенсором, расположенным в центре этого круга, то потери энергии сенсора пропорциональны покрытой им площади [5–8]. В современных БСС сенсор способен регулировать свою область мониторинга, в связи с чем возникают задачи оптимизации комбинаторной геометрии по поиску наименее плотных покрытий плоских областей кругами различного радиуса, что приводит к увеличению времени функционирования (жизни) БСС [6, 7, 9, 10].

Существует континуальное множество покрытий плоских областей различными фигурами. Для сокращения множества допустимых покрытий в литературе часто рассматривают регулярные покрытия. При этом число различных покрытий также континуально, но в регулярном покрытии область разбивается на одинаковые многоугольники

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 8227, и РФФИ (гранты 12-01-33028-мол-а-вед и 13-07-00139-а).

(плитки) и все плитки покрываются одинаково. Это позволяет ограничиться исследованием покрытий одной плитки. В литературе в качестве плитки в основном рассматриваются правильные многоугольники (треугольники, квадраты и шестиугольники), поэтому в работе [9] введено следующее обозначение для классов регулярного покрытия плоскости — $COV_k(p, q)$. В покрытии из класса $COV_k(p, q)$ область разбивается на правильные k -угольники и каждая плитка покрывается одинаково p кругами q различных радиусов.

Однако такое обозначение классов оказалось не совсем удобным для описания регулярных покрытий полосы. В работе [10] покрытие полосы названо n -слойным, если центры кругов покрытия располагаются на n прямых, параллельных границам полосы, и введено обозначение $P(n, k)$ для класса n -слойных регулярных покрытий кругами k различных радиусов.

В настоящей работе рассматривается проблема построения наименее плотных регулярных покрытий полосы эллипсами. Это значит, что область покрытия (мониторинга) сенсора — эллипс. Такая ситуация имеет место, например, при видеонаблюдениях за поверхностью, когда зона мониторинга сенсора — конус, а сам сенсор расположен над поверхностью. Зная параметры эллипса, легко определить значения регулируемых параметров сенсора (высоту размещения, направление и угол обзора). Если сенсор использует направленную антенну, то проекция зоны уверенного радиоприёма — тоже эллипс. Будем говорить, что сенсор покрывает часть плоскости, находящуюся внутри его эллипса мониторинга. Плоская область считается покрытой множеством сенсоров S , если каждая точка области покрыта хотя бы одним сенсором из S .

Покрытие полосы является регулярным, если полоса может быть разбита на одинаковые прямоугольники (плитки) и все плитки покрываются единообразно. В работе рассматриваются задачи построения и анализа регулярных покрытий полосы эллипсами одного, двух и трёх типов. При этом конгруэнтные эллипсы считаются одинаковыми.

Отметим, что аффинное отображение сохраняет плотность покрытия. Это позволяет путём сжатия/растяжения вдоль полосы сделать некоторые эллипсы кругами, что будет использовано в работе для упрощения расчётов.

1. Однослойные покрытия

В [10] рассмотрено однослойное покрытие полосы шириной h кругами. Было доказано, что в оптимальном (минимальной плотности, равной $\pi/2 \approx 1.5708$) покрытии данного класса используются одинаковые круги, и найден оптимальный радиус $R = h/\sqrt{2}$ этих кругов.

Рассмотрим однослойное покрытие (обозначим его $E(1, 2)$) полосы ширины h различными эллипсами, используя обозначения на рис. 1. В данном случае справедлива теорема 1.

Теорема 1. *Минимальная плотность однослойного покрытия $E(1, 2) \in P(1, 2)$ полосы шириной h равна $\pi/2 \approx 1.5708$ при длинах вертикальных полуосей $h/\sqrt{2}$ и произвольных длинах горизонтальных осей эллипсов.*

Доказательство. Рассмотрим два соседних эллипса. Как было замечено выше, аффинным отображением один из эллипсов можно сделать окружностью радиуса R (см. рис. 1). Длину горизонтальной полуоси соседнего (справа) эллипса обозначим через a , длину вертикальной полуоси \blacktriangle через b . Минимальная плитка регулярного покрытия —

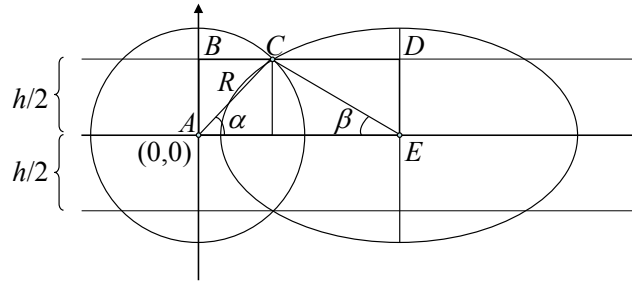


Рис. 1. Однослойное покрытие $E(1, 2) \in P(1, 2)$ с минимальной плотностью $\pi/2 \approx 1.5708$

прямоугольник $ABDE$ со сторонами $h/2$ и $\left(\frac{h}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{h}{2 \operatorname{tg} \beta}\right)$. Из условия принадлежности точки C эллипсу имеем

$$\frac{h^2}{4a^2 \operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{h^2}{4b^2} = 1,$$

откуда

$$a = \frac{bh}{\operatorname{tg} \beta \sqrt{4b^2 - h^2}}.$$

Несложно убедиться, что площадь эллипса (πab) принимает минимальное значение при $b = h/\sqrt{2}$ и $a = h/(\sqrt{2} \operatorname{tg} \beta)$.

С учётом соотношений $R = \frac{h}{2 \sin \alpha}$ и $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ плотность покрытия $E(1, 2)$ равна

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\frac{\pi}{4}(R^2 + ab)}{\frac{h}{2} \left(\frac{h}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{h}{2 \operatorname{tg} \beta} \right)} = \frac{\pi (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2 \operatorname{ctg} \beta)}{4 (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}.$$

Минимальное значение плотности $D(\alpha, \beta) = \pi/2$ достигается при $\alpha = \pi/4$ и $0 < \beta < \pi/2$ (соответственно $0 < a < +\infty$). При этом $R = b = h/\sqrt{2}$. \square

Замечание 1. В оптимальном однослойном покрытии последовательность эллипсов может быть произвольной. При этом свойство регулярности приводит к повторению одинаковых фрагментов покрытия. Рассмотрена пара соседних эллипсов покрытия (последовательность из двух элементов), но можно повторять и произвольную последовательность эллипсов. Тогда плиткой регулярного покрытия будет прямоугольник — часть полосы между центрами первого и последнего эллипсов последовательности.

2. Многослойные покрытия

Рассмотрим двух-, трёх-, четырёх- и пятислойные покрытия с использованием эллипсов двух и трёх типов. Не претендуя на полный охват многообразия покрытий, приведём лишь те модели, для которых удалось получить рекордные по плотности результаты.

2.1. Покрытие эллипсами двух типов

В разделе будут представлены двух-, трёх- и четырёхслойные покрытия.

2.1.1. Двухслойное покрытие

В работе [10] рассмотрено двухслойное покрытие полосы одинаковыми кругами, плотность которого близка к величине 1.3998. При этом центры трёх соседних кругов, пересекающихся в одной точке, являются вершинами равнобедренного треугольника. Применяя аффинное преобразование (сжатие/растяжение вдоль полосы), можно получить двухслойное покрытие $E(2, 1) \in P(2, 1)$ одинаковыми эллипсами с фиксированной длиной вертикальной оси и произвольной длиной горизонтальной оси.

Другое двухслойное покрытие можно построить следующим образом. Пусть одинаковые эллипсы (примем их кругами) пересекаются с одной стороны (например снизу) на границе полосы, а с другой (сверху) — на линии, параллельной границе. Непокрытые криволинейные треугольники сверху покрываются одинаковыми эллипсами (рис. 2). Минимальной плиткой такого регулярного покрытия является прямоугольник $ABDF$ (см. рис. 1).

Очевидно, точка C имеет координаты $(R \sin \alpha, R \cos \alpha)$, а точка E — $(R \cos \beta, R \sin \beta)$. Тогда $R = h/(\sin \beta + \cos \alpha)$ и плотность покрытия выражается функцией от двух переменных

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2\sqrt{27}} \frac{\sqrt{27} + 4(\cos \beta - \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \beta)}{(\sin \beta + \cos \alpha) \cos \beta}.$$

Минимум $D(\alpha, \beta) \approx 1.4156$ достигается при $\alpha \approx 0.4459 \approx \pi/7.05$, $\beta \approx 0.6854 \approx \pi/4.58$.

В результате двухслойное покрытие эллипсами двух типов имеет плотность, большую плотности двухслойного покрытия одинаковыми эллипсами. Отметим, что аналогичное двухслойное покрытие кругами двух радиусов из класса $P(2, 2)$ имеет минимальную плотность, близкую к 1.4513.

2.1.2. Трёхслойное покрытие

Рассмотрим трёхслойное покрытие двумя типами эллипсов $E(3, 2) \in P(3, 2)$ (рис. 3). Минимальной плиткой этого регулярного покрытия является прямоугольник $ABCE$, в покрытии которого участвуют четверть эллипса с центром, расположенным на средней линии полосы, и половина эллипса у границы полосы.

Теорема 2. Минимальная плотность покрытия $E(3, 2) \in P(3, 2)$ равна $D \approx 1.2615$.

Доказательство. Используя аффинное преобразование, сделаем эллипсы с центрами на средней линии полосы кругами некоторого радиуса R . Пусть длина горизонтальной полуоси эллипса около границы полосы равна a , длина вертикальной полуоси — b .

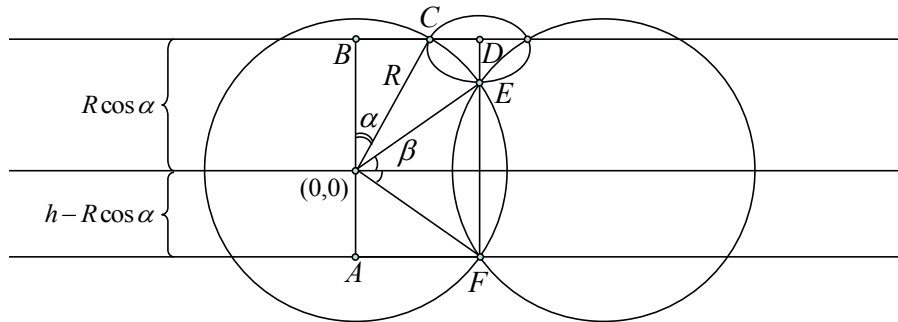
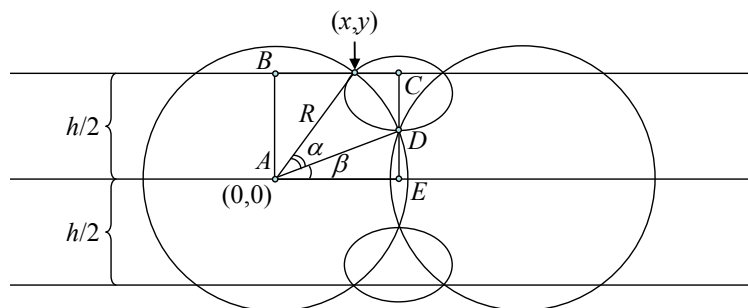


Рис. 2. Двухслойное покрытие $E(2, 2) \in P(2, 2)$ с минимальной плотностью $D \approx 1.4156$



С учётом обозначений на рис. 3 $x = R \cos(\alpha + \beta)$, $y = R \sin(\alpha + \beta)$. Длина хорды, соединяющей точки (x, y) и D , равна $2R \sin \frac{\alpha}{2}$. Отсюда

$$h = 2 \left(\sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - (R \cos \beta - R \cos(\alpha + \beta))^2} + R \sin \beta \right),$$

$$R = \frac{h}{2 \left(\sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos(\alpha + 2\beta))} + \sin \beta \right)}. \quad (1)$$
$$\frac{(R \cos \beta - R \cos(\alpha + \beta))^2}{a^2} + \frac{(R \sin \beta + b - R \sin(\alpha + \beta))^2}{b^2} = 1,$$
$$a = \frac{Rb(\cos \beta - \cos(\alpha + \beta))}{\sqrt{b^2 - (R(\sin \beta - \sin(\alpha + \beta)) + b)^2}}. \quad (2)$$
$$D(R, a, b, \beta) = \frac{\pi(R^2 + 2ab)}{2Rh \cos \beta} \quad (3)$$

и решим уравнение $\frac{\partial D}{\partial h} = 0$, из которого следует, что

$$b = \frac{4}{3}R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha + 2\beta}{2}.$$

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{36 \cos \beta} \cdot \frac{8\sqrt{3}(1 - \cos \alpha) \sin(\alpha + 2\beta) + 9}{\sin \beta + \sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos(\alpha + 2\beta))}}.$$

Минимум $D(\alpha, \beta) \approx 1.2615$ достигается при $\alpha \approx 0.4808 \approx \pi/6.5334$, $\beta \approx 0.545 \approx \pi/5.7642$. \square

Замечание 2. Для сравнения: минимальная плотность аналогичного покрытия кругами $D \approx 1.294$ [10]. Более того, следует учесть, что с помощью аффинного преобразования (сжатия/растяжения вдоль полосы) можно получить произвольные взаимосвязанные эллипсы. Например, эллипсы на границе можно сделать кругами, тогда горизонтальная ось центрального эллипса будет короче его вертикальной оси.

2.1.3. Четырёхслойное покрытие

Рассмотрим четырёхслойное покрытие эллипсами двух типов $E(4, 2) \in P(4, 2)$ (рис. 4). В этом покрытии центры трёх соседних кругов радиуса R являются вершинами правильного треугольника, а эллипсы на границе полосы имеют горизонтальную полуось длины a , вертикальную — длины b .

Теорема 3. Минимальная плотность покрытия $E(4, 2) \in P(4, 2)$ равна $D \approx 1.2372$.

Доказательство. В качестве плитки примем прямоугольник $ABDG$ (см. рис. 4), длина вертикальной стороны которого совпадает с h , а ширина равна $R \cos \frac{\pi}{6} = R\sqrt{3}/2$. В покрытии этого прямоугольника участвуют две половины кругов радиуса R и две половины эллипсов общей площадью $\pi(R^2 + ab)$.

Согласно рис. 4, координаты точки C равны $(R \sin \alpha, R \cos \alpha)$, центр верхнего эллипса — точка E — имеет координаты $(R\sqrt{3}/2, R/2 + b)$, а координаты точки F — $(R\sqrt{3}/2, R/2)$. Определим параметры эллипса с учётом принадлежности точек C и F эллипсу. Имеем

$$\frac{R^2(\sqrt{3}/2 - \sin \alpha)^2}{a^2} + \frac{(R(\cos \alpha - 1/2) - b)^2}{b^2} = 1,$$

откуда

$$a^2 = \frac{b^2(\sqrt{3} - 2 \sin \alpha)^2 R^2/4}{b^2 - (R(\cos \alpha - 1/2) - b)^2}$$

и площадь эллипса

$$\pi ab = \frac{\pi R b^2 (\sqrt{3} - 2 \sin \alpha)}{2\sqrt{2Rb(\cos \alpha - 1/2) - R^2(\cos \alpha - 1/2)^2}}$$

зависит от трёх параметров. При фиксированных значениях R и α существует единственный эллипс минимальной площади при $b = 2R(\cos \alpha - 1/2)/3$. В результате получим формулу для плотности покрытия $E(4, 2)$

$$D(\alpha) = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{9 + 2\sqrt{3}(\cos \alpha - 1/2)(\sqrt{3} - 2 \sin \alpha)}{3 + 4 \cos \alpha}.$$

К сожалению, аналитически не удаётся найти минимум плотности даже в этом случае. Численные расчёты показали, что $\min D(\alpha) \approx 1.2372$ достигается при $\alpha \approx 0.561 \approx \pi/5.6$. \square

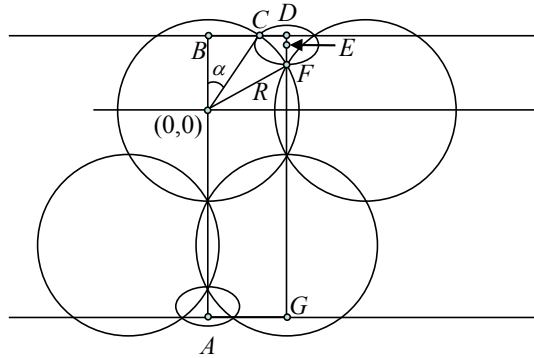


Рис. 4. Четырёхслойное покрытие $E(4, 2) \in P(4, 2)$ с минимальной плотностью $D \approx 1.2372$

Замечание 4. Для пятислоного покрытия эллипсами двух типов минимальная плотность не была определена в силу сложности возникающей оптимизационной задачи. Однако было доказано, что существует пятислоное покрытие, минимальная плотность которого не превышает 1.1853.

Рассмотрим модель покрытия полосы, которую обозначим $E(5, 3) \in P(5, 3)$. Центры одинаковых кругов (после аффинного преобразования), радиусы которых равны R , расположены на центральной линии полосы, ширину которой для простоты вычислений примем равной 2. Непокрытая часть у границы полосы между двумя соседними кругами покрывается одним эллипсом с длинами полуосей a (вертикальная) и b (горизонтальная) и двумя одинаковыми эллипсами с оптимальным наклоном (рис. 5).

Доказательство. Из принадлежности точки $G = (x, 1)$ вертикальному эллипсу

$$\frac{(R \cos \alpha - x)^2}{b^2} + \frac{(1 - R \sin \alpha - a)^2}{a^2} = 1.$$

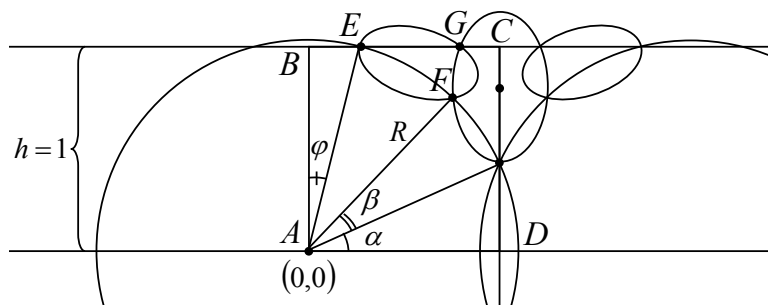
$$x = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} - \frac{b\sqrt{((2a-1)\cos \varphi + \sin \alpha)(\cos \varphi - \sin \alpha)}}{a \cos \varphi}.$$
$$a \geq \frac{\cos \varphi - \sin \alpha}{2 \cos \varphi}. \quad (4)$$
$$\frac{(R \cos \alpha - R \cos(\alpha + \beta))^2}{b^2} + \frac{(R \sin \alpha + a - R \sin(\alpha + \beta))^2}{a^2} = 1.$$
$$b = \frac{a(\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta))}{\sqrt{(\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha)(2a \cos \varphi + \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta))}}.$$


Рис. 5. Пятислойное покрытие эллипсами трёх типов $E(5, 3) \in P(5, 3)$ с минимальной плотностью $D \approx 1.1607$

Несложно проверить, что подкоренное выражение в последнем соотношении принимает положительные значения при выполнении неравенства (4). Поэтому в дальнейшем положим

$$a = \frac{\cos \varphi - \sin \alpha}{2 \cos \varphi} + \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Минимальная площадь эллипса, описанного около треугольника с вершинами E , F и G , равна

$$S_e = \frac{2\pi}{\sqrt{27}}(x - R \sin \varphi)(1 - R \sin(\alpha + \beta)),$$

или после подстановки выражений для x и R

$$S_e = \frac{2\pi(\cos \varphi - \sin(\alpha + \beta))}{\sqrt{27} \cos^2 \varphi} \times \\ \times \left(\cos \alpha - \sin \varphi - \frac{(\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta))\sqrt{2\varepsilon \cos \varphi(\cos \varphi - \sin \alpha)}}{\sqrt{(\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha)(\cos \varphi + 2\varepsilon \cos \varphi - \sin(\alpha + \beta))}} \right).$$

Плотность покрытия

$$D = \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} \left(\frac{\pi}{4 \cos^2 \varphi} + \frac{\pi ab}{2} + S_e \right).$$

После подстановки соответствующих выражений получим функцию плотности от четырёх переменных $D(\varepsilon, \alpha, \beta, \varphi)$. Численный анализ этой функции позволил определить $\min D(\varepsilon, \alpha, \beta, \varphi) \approx 1.1607$, который достигается при $\alpha \approx 0.4228 \approx \pi/7.43$, $\beta \approx 0.4204 \approx \pi/7.47$, $\varphi \approx 0.4181 \approx \pi/7.51$, $\varepsilon \approx 0.0406$, $a \approx 0.3161h$, $b \approx 0.2737h$. \square

Заключение

Проблема построения наименее плотных покрытий плоских областей, в частности полосы, эллипсами ранее в научной литературе практически не рассматривалась. Это объясняется тем, что возникающие при минимизации плотности задачи достаточно сложны для решения. Невозможно не только найти аналитическое решение даже в простейших классах, но и решить задачу численно. Это обусловлено нелинейностью функционалов и ограничений, а также многоэкстремальностью возникающих оптимизационных задач.

Регулярные покрытия полосы эллипсами одного, двух и трёх типов

Покрывтие	Плотность	Примечание
$E(1, 2) \in P(1, k)$	$\pi/2 \approx 1.5708$	Любая повторяющаяся последовательность k эллипсов, у которых фиксированна длина вертикальной оси
$E(2, 1) \in P(2, 1)$	≈ 1.3998	Эллипсы с фиксированной длиной вертикальной оси и произвольной длиной горизонтальной оси
$E(2, 2) \in P(2, 2)$	≈ 1.4156	Проигрывает покрытию одинаковыми эллипсами. Плотность аналогичного покрытия кругами $D \approx 1.4513$
$E(3, 2) \in P(3, 2)$	≈ 1.2615	Плотность аналогичного покрытия кругами $D \approx 1.294$
$E(4, 2) \in P(4, 2)$	≈ 1.2372	Плотность аналогичного покрытия кругами $D \approx 1.2542$
$E(5, 3) \in P(5, 3)$	≈ 1.1607	Оси эллипсов имеют произвольный наклон

Как отмечалось выше, проблема построения наименее плотного покрытия эллипсами является обобщением соответствующей задачи покрытия кругами. Последней посвящено много публикаций, среди которых несколько монографий [1–3]. Более того, задачи покрытия эллипсами возникают во многих приложениях, иногда с дополнительными ограничениями. Например, при мониторинге полосы часто запрещено размещать сенсоры внутри полосы. Используя эллипсы, всегда можно добиться того, что соответствующий сенсор находится либо на границе полосы, либо вне её. Для этого, определив модель покрытия, достаточно осуществить сжатие вдоль полосы, чтобы все фигуры покрытия стали эллипсами, а соответствующие сенсоры были размещены на определённой высоте, например, на границе полосы.

В таблице приведены результаты, позволяющую сравнить качество предложенных моделей покрытия полосы эллипсами одного, двух и трёх типов.

Список литературы

- [1] РОДЖЕРС К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968. 137 с.
- [2] ТОТ Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1958. 365 с.
- [3] BÖRÖCZKY K., JR. Finite Packing and Covering. Cambridge Univ. Press, 2004. 398 p.
- [4] KERSHNER R. The number of circles covering a set // American J. of Mathematics. 1939. Vol. 61, No. 3. P. 665–671.
- [5] CARDEI M., DU D.-Z. Improving wireless sensor network lifetime through power aware organization // ACM Wireless Networks. 2005. Vol. 11, No. 3. P. 333–340.
- [6] CARDEI M. Improving network lifetime using sensors with adjustable sensing ranges // Intern. J. of Sensor Networks. 2006. No. 1. P. 41–49.
- [7] WU J., YANG S. Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges // Intern. J. of Foundations of Comp. Science. 2005. Vol. 6, No. 1. P. 3–17.
- [8] ZHANG H., HOU J.C. Maintaining sensing coverage and connectivity in large sensor networks // Ad Hoc & Sensor Wireless Networks. 2005. Vol. 1, No. (1-2). P. 8-9-124.
- [9] АСТРАКОВ С.Н., ЕРЗИН А.И., ЗАЛЮБОВСКИЙ В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискр. анализ и исследование операций. 2009. Т. 16, № 3. С. 3–19.
- [10] АСТРАКОВ С.Н., ЕРЗИН А.И. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 26–34.

*Поступила в редакцию 1 августа 2012 г.,
с доработки — 1 февраля 2013 г.*

ЖБТ. 2013. Т. 18, № 2. С. 3–11.

Sensor networks and stripe covering with ellipses

Astrakov S.N., Erzin A.I.

The problem of the ~~least~~ density covering of a stripe with ellipses of ~~the first~~, ~~second~~ and ~~the third~~ type is considered. We proposed and investigated novel regular covers, which generalize the authors results for a stripe ~~covered~~ by disks. We obtained novel fundamental results which can be applied for design of a power-efficient systems for monitoring of lengthy objects by wireless sensor networks.

Keywords: wireless sensor networks, energy efficiency, covering density.