

Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов*

С. Н. АСТРАКОВ¹, А. И. ЕРЗИН²

¹*Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,
Новосибирск, Россия*

²*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: astrakov90@gmail.com, adilerzin@math.nsc.ru*

Рассматривается проблема наименее плотного покрытия полосы кругами одного, двух и трех радиусов. Предложены и исследованы новые модели регулярных покрытий. Разработанные методы и полученные результаты имеют фундаментальное значение, а также могут быть использованы как инструмент для энергоэффективного мониторинга сенсорными сетями протяженных объектов.

Ключевые слова: мониторинг, энергоэффективность, беспроводные сенсорные сети.

Введение

Проблемы поиска эффективных покрытий плоских областей кругами различного радиуса возникают во многих практических приложениях [1–5]. В данной работе эта проблема рассматривается в применении к сенсорным сетям, осуществляющим мониторинг полосы. Как и в [4], предполагается, что область мониторинга сенсора является кругом определенного радиуса с центром в месте расположения сенсора. Будем полагать, что сенсор покрывает часть плоскости, находящуюся внутри его круга мониторинга. Плоская область считается покрытой множеством сенсоров S , если каждая точка области покрыта хотя бы одним сенсором из S .

Плотностью покрытия плоской области кругами называется отношение суммы площадей кругов покрытия к площади области. Очевидно, что плотность не может быть меньше единицы и отклонение ее значения от единицы характеризует эффективность покрытия. Так как энергозатраты сенсора на мониторинг пропорциональны покрытой им площади, основная задача сенсорных сетей — максимизация жизни — сводится к решению задачи построения наименее плотного покрытия.

Существует много способов покрытия плоской области кругами различного радиуса. В связи с этим в большинстве работ по данной тематике [4–8] авторы рассматривают так называемые регулярные покрытия, что существенно сужает множество допустимых покрытий и позволяет осуществлять анализ определенного класса покрытий. В регулярном покрытии плоская область (виртуально) замощается многоугольниками (плитками) и все многоугольники покрываются кругами одинаково. При этом сенсоры

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-07-92650-ИНД_а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (гос. контракт 14.740.11.0362).

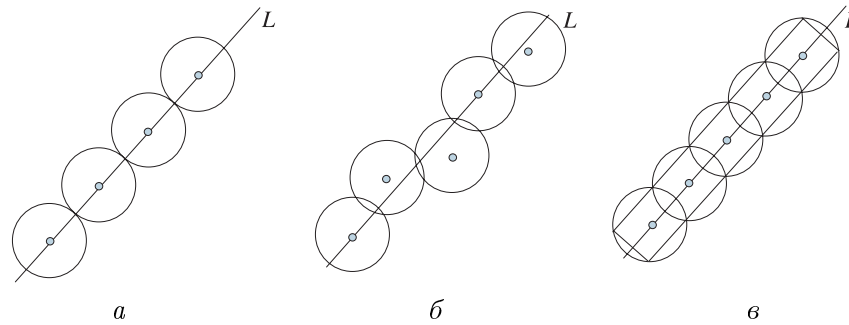


Рис. 1. Покрытие прямой линии кругами: *a* — регулярное без пересечения кругов, *б* — нерегулярное, *в* — регулярное гарантированное

(центры кругов) располагаются в определенных местах плиток и определяются оптимальные радиусы мониторинга сенсоров [4, 5].

Покрытию кругами всей плоскости посвящено значительное число публикаций. При покрытии ограниченных областей основные трудности возникают на границе области. В настоящей работе рассматривается практически не изученная проблема наименее плотного покрытия бесконечной полосы кругами. Предложены покрытия, использующие круги одного, двух и трех радиусов. Учтены возникающие при этом граничные эффекты и проведен анализ эффективности предложенных покрытий.

Многие реальные объекты моделируются бесконечно длинными полосами. Это автомобильные дороги и железнодорожное полотно, различные линии связи, государственные границы, трубопроводы и прочие сооружения, имеющие незначительную кривизну, длина которых существенно превышает ширину. Задачи мониторинга подобных объектов требуют построения эффективных моделей покрытия, удовлетворяющих определенным требованиям.

Рассмотрим, например, прямую L , которую необходимо покрыть одинаковыми кругами радиуса R . На рис. 1 показаны три варианта покрытия. В случае *a* линия покрыта касающимися кругами, однако точки касания входят в покрытие без своих окрестностей, и такое покрытие может оказаться недостаточно надежным. В случае *в* линия L находится в некоторой полосе, границы которой проходят через точки пересечения окружностей, что обеспечивает гарантированное покрытие. Таким образом, задача о покрытии полосы становится эквивалентна задаче о гарантированном покрытии прямой линии.

С другой стороны, практически любой физический предмет имеет ширину (толщину). Поэтому далее будем рассматривать регулярные покрытия полосы, отождествляя эффективность покрытия с его плотностью. Напомним, что в регулярном покрытии область мониторинга разбивается на равные одинаково покрытые многоугольники. Далее в работе рассматриваются только регулярные покрытия.

Назовем покрытие n -слойным, если центры всех его кругов располагаются на n прямых, параллельных границам полосы. В работе предложены и исследованы регулярные многослойные покрытия полосы кругами одного, двух и трех радиусов. При этом радиусы кругов — регулируемые параметры покрытий. В каждом классе покрытий выделены наиболее эффективные и показаны их преимущества. Приведенные результаты, не претендуя на полный анализ многообразия возможных вариантов покрытий, демонстрируют общие методы построения эффективных покрытий, которые могут быть использованы при решении практических задач.

1. Покрытия полосы кругами одного радиуса

Существует большое число регулярных покрытий полосы кругами одного радиуса. При этом эффективность покрытия зависит как от числа его слоев, так и от расположения кругов. Далее будут рассмотрены наиболее перспективные точки зрения авторов покрытия.

1.1. Однослойные покрытия

Модель 1. Рассмотрим регулярное покрытие полосы шириной h (рис. 2) и найдем радиус круга R , при котором плотность такого покрытия минимальна. Покрытие является однослойным, так как центры кругов располагаются на одной прямой.

Пусть точки A и B — центры двух соседних кругов покрытия. Через эти точки проведем диаметры, перпендикулярные отрезку AB (и сторонам полосы), а через точки пересечения окружностей — отрезки CD и EF , параллельные AB . Прямоугольник $CDFE$ является частью полосы и покрывается двумя полукругами с суммарной площадью πR^2 . Плотность покрытия всей полосы совпадает с плотностью прямоугольника и равна $D = S_d/S_r$, где $S_d = \pi R^2$ — площадь кругов, покрывающих $CDFE$, а S_r — площадь прямоугольника $CDFE$. Оптимальным является покрытие, имеющее минимальную плотность. Найдем оптимальные значения радиуса круга R и расстояние d между центрами соседних кругов в зависимости от ширины полосы h . Согласно обозначениям рис. 2

$$d = |AB| = 2R \cos \alpha, \quad h = 2R \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$S_r = dh = 4R^2 \cos \alpha \sin \alpha = 2R^2 \sin 2\alpha, \quad D(\alpha) = \pi/(2 \sin 2\alpha).$$

Плотность $D(\alpha)$ представляет собой дифференцируемую функцию одной переменной и ее минимум $\pi/2 \approx 1.5708$ достигается при $\alpha = \pi/4$. Следовательно, оптимальные значения $R = h/\sqrt{2}$ и $d = h$.

1.2. Двухслойные покрытия

Плотность покрытия может быть уменьшена путем введения дополнительных слоев. Двухслойные покрытия кругами одного радиуса могут быть построены по-разному. Рассмотрим случай, когда используется треугольная решетка (рис. 3).

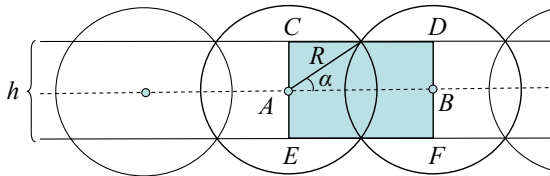


Рис. 2. Регулярное однослойное покрытие одинаковыми кругами; модель 1

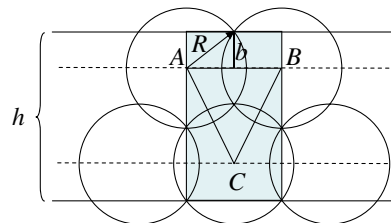


Рис. 3. Двухслойное покрытие полосы одинаковыми кругами с треугольной решеткой; модель 2

Модель 2. Пусть, как и прежде, h — ширина полосы, R — радиус круга, $d = |AB|$ — расстояние между центрами соседних кругов одного слоя, α — угол между радиусом, проведенным к точке пересечения двух соседних окружностей одного слоя, и прямой AB , проходящей через центры кругов этого слоя. Обозначим $b = R \sin \alpha$. Тогда

$$h = R + 3b = R(1 + 3 \sin \alpha), \quad d = 2R \cos \alpha,$$

$$S_r = dh = 2R^2 \cos \alpha (1 + 3 \sin \alpha), \quad S_d = 2\pi R^2.$$

Следовательно, плотность покрытия выражается в виде

$$D(\alpha) = \frac{\pi}{\cos \alpha (1 + 3 \sin \alpha)}.$$

Минимизируя функцию $D(\alpha)$, получим

$$\sin \alpha = (\sqrt{73} - 1)/12 \approx 0.62867, \quad \alpha \approx 38.95^\circ,$$

$$R = h/(1 + 3 \sin \alpha) = 4h/(3 + \sqrt{73}) \approx 0.3465h, \quad d = \frac{2h\sqrt{70 + 2\sqrt{73}}}{3(3 + \sqrt{73})} \approx 0.5389h.$$

Минимальная плотность такого покрытия равна

$$\min_{\alpha} D(\alpha) = \frac{48\pi}{(3 + \sqrt{73})\sqrt{70 + 2\sqrt{73}}} \approx 1.3998.$$

Замечание 1. Отметим нетривиальный результат. Треугольник ABC , образованный центрами трех соседних кругов, не правильный, как при покрытии плоскости одинаковыми кругами [6], а равнобедренный. Это обусловлено граничным эффектом. В случае правильной треугольной решетки плотность покрытия больше и составляет $4\pi/(5\sqrt{3}) \approx 1.451$.

1.3. Многослойные покрытия

Модель 3. Рассмотрим многослойные покрытия полосы кругами одного радиуса. По аналогии с моделью 2 проведем соответствующие вычисления:

если $n = 3$, то $h = 2R + 4b$, $S_r = d(2R + 4b) = 2R^2 \cos \alpha (2 + 4 \sin \alpha)$, $S_d = 3\pi R^2$;

если $n = 4$, то $h = 3R + 5b$, $S_r = d(3R + 5b) = 2R^2 \cos \alpha (3 + 5 \sin \alpha)$, $S_d = 4\pi R^2$. В этом случае для произвольного n имеем

$$h = (n - 1)R + (n + 1)b = R((n - 1) + (n + 1) \sin \alpha),$$

$$S_r = dh = 2R^2 \cos \alpha ((n - 1) + (n + 1) \sin \alpha), \quad S_d = \pi n R^2,$$

$$D(\alpha) = \frac{S_d}{S_r} = \frac{\pi n}{2((n - 1) + (n + 1) \sin \alpha) \cos \alpha}.$$

После элементарных вычислений получим условие оптимальности

$$2 \sin^2 \alpha + \frac{n - 1}{n + 1} \sin \alpha - 1 = 0.$$

Из решения последнего уравнения находим требуемые значения тригонометрических показателей

$$\sin \alpha = 0.25 \left(\sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + 8} - \frac{n-1}{n+1} \right) = 0.25 \left(\sqrt{p^2 + 8} - p \right),$$

$$\cos \alpha = 0.25 \left(\sqrt{8 - 2p^2 + 2p\sqrt{p^2 + 8}} \right),$$

где $p = \frac{n-1}{n+1}$. Это дает возможность вычислить оптимальное значение плотности покрытия $D(\alpha)$ и определить соотношение между радиусом и шириной полосы

$$R = \frac{h}{n-1 + (n+1)\sin \alpha}.$$

При $n \rightarrow \infty$ получим предельные значения $p = 1$ и $\sin \alpha = 1/2$, что соответствует $\alpha = \pi/6$. Предельное значение плотности

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1.2092.$$

Замечание 2. Данная асимптотическая оценка соответствует классическому результату для покрытия всей плоскости кругами одного радиуса [6], который объясняется тем, что при большой ширине полосы влияние границ несущественно.

2. Покрытие полосы кругами двух и трех радиусов

Модель 4. Пусть центры кругов радиуса R расположены на средней линии полосы и два соседних круга пересекаются, оставляя непокрытой область около границы полосы, покрываемой кругами радиуса r (рис. 4). Плотность такого покрытия зависит от параметров α и β , где α — угол между прямой, проведенной из центра круга радиуса R в точку пересечения соседних кругов радиуса R , и средней линией полосы, β — угол между прямой, проведенной из центра круга радиуса R в точку пересечения круга радиуса R с границей, и вертикалью (см. рис. 4). Площадь прямоугольника $ABCD$ и другие характеристики покрытия определяются уравнениями

$$S_r = 4R^2 \cos \alpha \cos \beta,$$

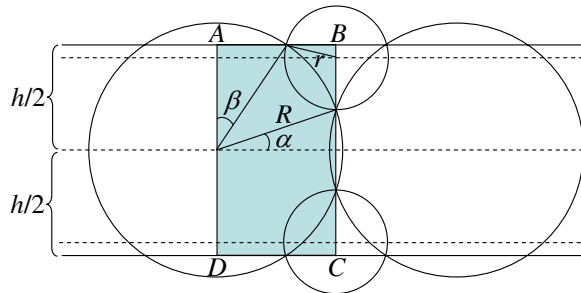


Рис. 4. Трехслойное покрытие кругами двух радиусов; модель 4

$$r = R \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \alpha \right),$$

$$S_d = \pi R^2 + 2\pi r^2 = \pi R^2 \left(2 + 2 \sin^2 \alpha + \sin(\alpha - \beta) - 4 \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right).$$

Отсюда плотность покрытия

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4 \cos \alpha \cos \beta} \left(2 + 2 \sin^2 \alpha + \sin(\alpha - \beta) - 4 \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right).$$

Минимум функции $D(\alpha, \beta)$ не удается найти аналитически, а численные расчеты при $R \approx 0.6266h$, $r \approx 0.1825h$, $\alpha \approx 27^\circ$, $\beta \approx 37^\circ$ дают

$$\min_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta) \approx 1.294$$

Модель 5. Рассмотрим четырехслойное покрытие (рис. 5). Три соседних круга радиуса R (два с одного слоя и один с другого) пересекаются в единственной общей точке и их центры являются вершинами правильного треугольника. Круги радиуса r покрывают оставшиеся непокрытыми граничные участки полосы.

Пусть центральный угол дуги окружности радиуса R , отсекаемой окружностью радиуса r , равен 2φ . Тогда плотность покрытия

$$D(\varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}(3 + 4 \sin(\pi/6 + 2\varphi))} \left(4 + \left(\sqrt{3} \tan\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) - 1 \right)^2 \right).$$

В результате численного решения при $\varphi \approx 11.5^\circ$, $R \approx 0.3229h$, $r \approx 0.0859h$ находим оптимальное значение:

$$\min_{\varphi} D(\varphi) \approx 1.2542.$$

Замечание 3. Добавление кругов радиуса r позволило существенно уменьшить плотность покрытия по сравнению с моделью 2.

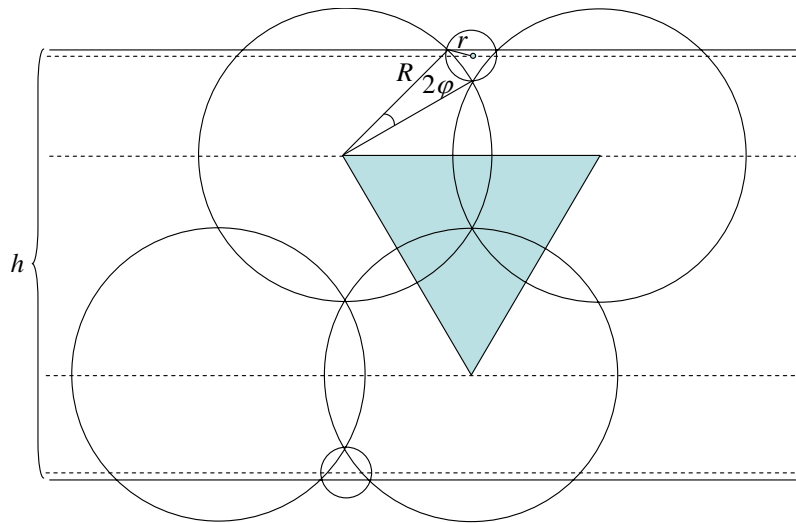


Рис. 5. Четырехслойное покрытие кругами двух радиусов; модель 5

Модель 6. Рассмотрим покрытие (рис. 6), состоящее из кругов трех радиусов. Круги радиуса R определяют основную прямоугольную структуру, радиуса r_1 — используются в центральной части полосы, радиуса r_2 — находятся на границах полосы. Такое построение позволяет провести оптимизацию за счет изменений нескольких характеристик покрытия.

Выделим прямоугольник, образованный границами полосы и прямыми, проходящими через центры соседних кругов радиуса R . Для удобства вычислений выразим искомые величины через радиус круга R :

$$h = 2R \cos \alpha + 2R \cos(\pi/2 - \alpha - 2\varphi) = 2R(\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi)),$$

$$r_1 = R(\cos \alpha - \sin \alpha), \quad r_2 = R(\cos \alpha \tan(\alpha + \varphi) - \sin \alpha), \quad d = 2R \cos \alpha,$$

где d — расстояние между центрами двух соседних кругов одного уровня радиуса R , 2α и 2φ — центральные углы окружности радиуса R , соответствующие дугам при пересечении соседних окружностей. Приведем расчеты плотности:

$$S_r = hd = 4R^2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi)),$$

$$S_d = 2\pi R^2 + \pi r_1^2 + 2\pi r_2^2 = \pi R^2(3 - \sin 2\alpha + 2(\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2),$$

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{S_d}{S_r} = \frac{\pi(3 - \sin 2\alpha + 2(\cos \alpha \tan(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{4 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

В этом случае минимальная плотность

$$\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1.2335$$

достигается при $\alpha \approx 26.36^\circ$, $\varphi \approx 13, 18^\circ$, $R \approx 0.2956h$, $r_1 \approx 0.1336h$, $r_2 \approx 0.0874h$.

Замечание 4. Если принять $r_1 = r_2 = r$, то получим более простую модель с плотностью

$$D(\alpha) = \frac{\pi(5 - 3 \sin 2\alpha)}{4(1 + \cos 2\alpha)}, \quad \min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1.2566$$

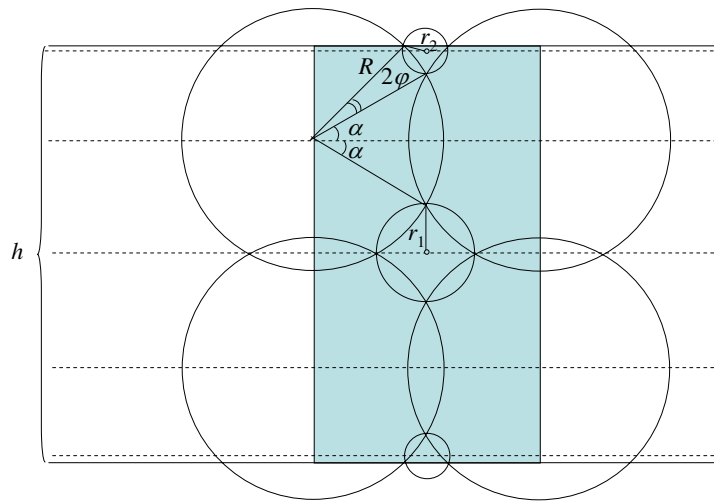


Рис. 6. Пятислойное покрытие полосы кругами трех радиусов; модель 6

при $\alpha \approx 30.94^\circ$, $R \approx 0.2915h$, $r \approx 0.1001h$. Несмотря на то что плотность увеличилась, в некоторых случаях данной модели может быть отдано предпочтение в сравнении с моделью 6.

Модель 7. Рассмотрим покрытие, состоящее из кругов трех радиусов (рис. 7). Центры кругов радиуса R определяют основную треугольную решетку и эти круги оставляют непокрытой внутренние и граничные части полосы. Круги радиуса r_1 покрывают внутренние криволинейные треугольники, радиуса r_2 — покрывают граничные части полосы. Покрытие в этом случае является шестислойным.

Используя обозначения углов, принятых в модели 6, получим следующее выражение для плотности покрытия:

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{\pi(1 + (\cos \alpha / \sqrt{3} - \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha \tan(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{\cos \alpha (\sqrt{3} \cos \alpha + 2 \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

Минимальная плотность для данной модели

$$\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1.2039$$

достигается при $\alpha \approx 21.77^\circ$, $\varphi \approx 14.32^\circ$, $R \approx 0.3175h$, $r_1 \approx 0.0525h$, $r_2 \approx 0.0972h$.

Замечание 5. Если упростить модель, положив $r_1 = r_2 = r$, то плотность покрытия зависит от одной переменной r и минимум плотности увеличивается, оставаясь вместе с тем достаточно малым:

$$D(\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{7 - 2 \cos 2\alpha - 2\sqrt{3} \sin 2\alpha}{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}, \quad \min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1.2339$$

при $\alpha \approx 17.72^\circ$, $r \approx 0.3338h$, $r \approx 0.2457R \approx 0.082h$.

Исследования предложенных покрытий показали, что для уменьшения их плотности необходимо учитывать следующие факторы: 1 — количество уровней, 2 — расположение кругов, 3 — радиусы кругов, 4 — соотношения между радиусами различных кругов, 5 — структуру покрытия. При выборе покрытий предложение отдается тем из них, которые имеют не только низкую плотность, но и наиболее простую структуру. Исходя из этого была проведена классификация рассмотренных моделей, согласно которой каждое

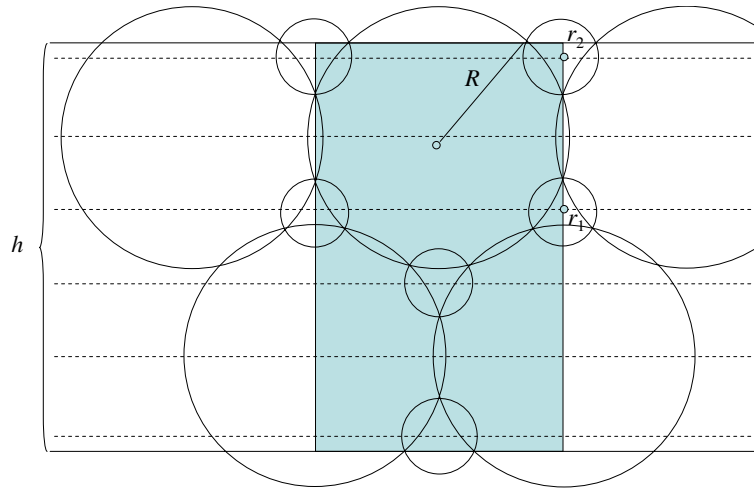


Рис. 7. Шестислойное покрытие кругами трех радиусов; модель 7

Сводная таблица результатов

Класс покрытия $P(n, k)$	Лучшая модель класса	Плотность покрытия	Структура покрытия
$P(1, 1)$	Модель 1	1.571	Однослойная
$P(2, 1)$	Модель 2	1.399	Треугольная решетка
$P(n, 1)$	Модель 3	1.209 (при $n \rightarrow \infty$)	Многослойная
$P(3, 2)$	Модель 4	1.294	Трехслойная
$P(4, 2)$	Модель 5	1.254	Треугольная решетка
$P(5, 3)$	Модель 6	1.234	Прямоугольная решетка
$P(6, 3)$	Модель 7	1.204	Треугольная решетка

покрытие относится к одному из классов $P(n, k)$, где n — число слоев покрытия, k — число различных радиусов кругов (см. таблицу).

В заключение отметим, что в рассмотренных моделях, как и в работах [4, 5, 9] радиусы кругов являются регулируемыми параметрами. Вместе с тем в некоторых приложениях радиусы кругов могут быть заданы и требуется найти наименее плотное покрытие необходимой ширины. Например, если $2R$ меньше ширины полосы h , то однослойное покрытие полосы кругами радиуса R вообще нереализуемо. В последующих работах планируется рассмотреть способы построения наименее плотных покрытий кругами заданных радиусов.

Список литературы

- [1] ASANO T., BRASS P., SASAHARA S. Discovering problem with application to digital half toning // LNCS 3045. 2004. P. 14–17.
- [2] BULUSU N., HEIDEMANN J., ESTRIN D. GPS-less low cost outdoor localization for very small devices. Technical Report. Computer Science Department. Univ. of Southern California, 2000.
- [3] POTTIE G.J. Wireless integrated network sensors // Communicat. CM. 2000. Vol. 43, No. 5. P. 51–58.
- [4] WU J., YANG S. Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges // Intern. J. of Foundat. of Comput. Sci. 2005. Vol. 6, No. 1. P. 3–17.
- [5] АСТРАКОВ С.Н., ЕРЗИН А.И., ЗАЛЮБОВСКИЙ В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16, № 3. С. 3–19.
- [6] KERSHNER R. The number of circles covering a set // Amer. J. of Math. 1939. Vol. 61, No. 3. P. 665–671.
- [7] ТОТ Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Изд. физ.-мат. литературы, 1958. 365 с.
- [8] ZHANG H., HOU J.C. Maintaining sensing coverage and connectivity in large sensor networks // Ad Hoc & Sensor Wireless Networks. 2005. Vol. 1, No. (1-2). P. 89–124.
- [9] CARDEI M. Improving Network Lifetime using Sensors with Adjustable sensing Ranges // Intern. J. of Sensor Networks. 2006. No. 1. P. 41–49.

Поступила в редакцию 1 марта 2011 г.,
с доработки — 25 октября 2011 г.

ЖВТ. 2012. Т. 17, № 1. С. 26–34.

Construction of effective cover models for monitoring of lengthy objects

Astrakov S.N., Erzin A.I.

We consider the problem of least density cover of a stripe by disks of a single, double and triple radii. New regular covers were proposed. The developed methods and obtained results can be used as a tool for energy efficient monitoring of lengthy objects by wireless sensor networks.

Keywords: monitoring, energy efficiency, wireless sensor networks.