Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели

А.И. Ерзин, И.И. Тахонов

УДК 519.8

Аннотация

Сетевая модель представлена взвешенным графом. Вершинам графа приписаны ресурсы, которые на каждом временном шаге (время дискретно) распределяются между инцидентными ребрами. Величина ресурса каждой вершины не изменяется с течением времени. Пусть состояние сети – это вариант распределения ресурсов вершин по ребрам. На каждом шаге произвольная вершина i независимо от других вершин графа оценивает качество взаимодействия со смежной вершиной j по значению заданной функции $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$, зависящей от величин ресурсов x_{ij} и x_{ji}, распределенных на ребро (i,j) обеими вершинами i и j. Так как ресурсы вершин перераспределяются на каждом шаге, то с течением времени состояние сети меняется. В работе найдены достаточные условия существования предельных и равновесных состояний сетевой модели и приведены формулы для их вычисления для специального вида функций c_{ij}.

1 Постановка задачи

Рассмотрим сетевую модель (назовем ее *системой*), заданную графом $G = (V, E)$, $|V| = n$. Пусть каждой вершине $i \in V$ приписан ресурс в количестве $q_i \geq 0$, который на любом временном шаге k перераспределяется между инцидентными ребрами. Обозначим через x_{ij}^k количество ресурса вершины i, распределенного на шаге k на ребро $(i,j) \in E$. Представляя каждое ребро (i,j) парой дуг (i,j) и (j,i), величины x_{ij}^k и x_{ji}^k назовем *весами* этих дуг. Предположим, что начальные веса $x_{ij}^0 : \sum\limits_{j \in V_i} x_{ij}^0 = q_i,\ i \in V,\ j \in V_i = \{l \in V :\ (i,l) \in E\}$, известны.

Пусть произвольная вершина i на шаге $k+1,\ k = 0, 1, \ldots$, оценивает отношения со смежной вершиной $j \in V_i$ по значению известной функции $c_{ij}(x_{ij}^k, x_{ji}^k)$ и стремится минимизировать максимальное значение функций $c_{ij},\ j \in V_i$. Другими словами, вершина i выбирает такие новые веса $x_{ij}^{k+1},\ j \in V_i$, которые являются решением следующей задачи.

$$\max_{j \in V_i} c_{ij}(x_{ij}^{k+1}, x_{ji}^k) \to \min_{\{x_{ij}^{k+1}\}}; \tag{1}$$

$$\sum_{j \in V_i} x_{ij}^{k+1} = q_i; \tag{2}$$

$$x_{ij}^{k+1} = 0,\ (i,j) \notin E, \tag{3}$$

где веса $x_{ji}^k,\ j \in V_i$ известны.

Так как каждая вершина $i \in V$ на произвольном шаге k перераспределяет свой ресурс *независимо от других вершин*, система перейдет в новое состояние $X^k = (x_{ij}^k) = \Phi(X^{k-1})$, которое в общем случае отличается от состояния, к которому стремилась вершина i. Значит, на следующем шаге $k+1$ вершины графа опять перераспределят свои ресурсы. Этот процесс может продолжаться бесконечно, и поиск условий существования предельного состояния $\lim\limits_{k\to\infty} X^k$ является не тривиальной задачей.

Если на некотором шаге $k+1$, веса дуг, найденные решением задачи (1)-(3), не меняются, т. е. $x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^k$ для всех $i \in V,\ j \in V_i$, то такое состояние $X^k:\ X^k = \Phi(X^k)$ назовем *стационарным* или *равновесным*.

Целью данной работы является нахождение достаточных условий сходимости процесса изменения состояний системы, а также вычисление предельных и равновесных состояний.

Приведем одну из содержательных постановок проблемы, которая была рассмотрена в [3]. Пусть исходная система – это глобальная распределенная коммуникационная сеть. Произвольная вершина i имеет ресурс, который определяется аппаратными, программными и другими средствами, и отвечает за качество связи с каждой смежной вершиной $j \in V_i$. Ресурс вершины i распределяется по инцидентным ребрам $(i,j),\ j \in V_i$, таким образом, чтобы их суммарные веса $x_{ij} + x_{ji}$ были одинаковыми. Такая стратегия имеет смысл, когда все инцидентные ребра равнозначны, а их качество прямо пропорционально количеству выделенного ресурса. Например, если ресурс используется для профилактики заражения компьютерным вирусом, то неважно, откуда придет вирус. Необходимо обезопасить все направления в равной степени. При этом ресурс, в частности, идет на мониторинг коммуникаций, на развитие аппаратной части, а также на разработку соответствующего программного обеспечения для анализа характеристик сети.

В литературе поставленная в данной работе задача не рассматривалась. В работах [4, 6, 8] исследовался вопрос существования равновесных состояний стационарных централизованных систем с функциями вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ji} - x_{ij}$. В этом случае равновесное состояние задается весами $x_{ij} = x_{ji}$, или в наших обозначениях, $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = 0,\ (i,j) \in E$. Такая постановка связана, в частности, с вопросом существования баланса сил сторон.

Рассматриваемую в данной работе проблему можно считать также игрой n лиц [5, 10, 11], в которой вершина – это игрок с известным количеством средств. Два лица играют друг с другом, если соответствующие вершины графа G смежны. Если функция $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$ задает плату игрока i игроку j, то каждый игрок стремится минимизировать свой максимальный проигрыш. Таким образом, игрок i на каждом ходе k выбирает стратегию, как точку в пространстве $R^{|V_i|}$. Насколько нам известно, ранее такие игры не рассматривались.

Выбор функций c_{ij} и интерпретация терминов “ресурс” и “взаимоотношение вершин” связаны с конкретными приложениями. Так в теории конфликтов функции c_{ij} определяют угрозу элементу i от элемента j и имеют вид $c_{ij}(x,y) = y - x$ [4]. Если анализируется распределенная сеть связи, упомянутая выше, то, полагая, что качество связи (i,j) прямо пропорционально количеству ресурса, выделенного обеими вершинами i и j, функции можно взять в виде $c_{ij}(x,y) = x + y$ [3].

В данной работе рассматриваются произвольный граф G и функции вида $c_{ij} = ax_{ij} + bx_{ji}$, где $a, b \in R$. Целью работы является поиск достаточных условий сходимости процесса изменения состояния системы, заданного стратегией (1)-(3). Другими словами, если произвольная вершина на каждом шаге перераспределяет свой ресурс согласно решению задачи (1)-(3) и независимо от других вершин, то в каких случаях процесс изменения состояний будет иметь предельные и равновесные состояния, и как эти состояния можно найти?

Если состояния системы меняются без вмешательства извне и существует предельное состояние, то такую систему принято называть *самостабилизиющейся*. Исследованию некоторых таких систем, которые связаны с вычислительными и коммуникационными сетями, посвящены, например, работы [9, 12].

Исследуемая в данной работе модель рассматривается впервые. Нами найдены условия существования предельных и равновесных состояний системы, а также формулы для вычисления этих состояний. Трудоемкость нахождения предельных и равновесных состояний не превосходит $O(n^3)$, хотя, для частных случаев (для полного или полного двудольного графа отношений) существенно меньше [1].

Частные результаты опубликованы авторами в работах [1, 3].

2 Распределение ресурсов

На шаге $k+1$ произвольная вершина i перераспределяет свой ресурс между инцидентными ребрами $(i,j) \in E$, зная текущие значения весов $x_{ji}^k,\ j \in V_i$, и решая задачу (1)-(3). Решение задачи (1)-(3) в нашем случае может быть получено из соотношений

$$ax_{ij}^{k+1} + bx_{ji}^k = f_i^k,\ j \in V_i, \tag{4}$$

где величины f_i^k не зависят от j и могут быть легко найдены.

Для нахождения величины f_i^k при фиксированных k и i просуммируем равенства (4) по $j \in V_i$. Обозначим через $d_i = |V_i|$ степень вершины i, а через $p_i^k = \sum\limits_{j \in V_i} x_{ji}^k$ – общее количество ресурса, направленного на вершину i на шаге k. Тогда

$$f_i^k = \frac{1}{d_i}\sum_{j \in V_i} c_{ij} = \frac{aq_i + bp_i^k}{d_i},$$

и преобразование Φ состояний системы задается рекуррентными соотношения

$$x_{ij}^{k+1} = -\frac{b}{a}x_{ji}^k + \frac{aq_i + bp_i^k}{ad_i},\ i \in V,\ j \in V_i. \tag{5}$$

Таким образом, мы представили процесс изменения состояний системы с помощью рекуррентных соотношений (5). В общем случае процесс, заданный рекуррентными соотношениями (5), не всегда сходится. Ниже приводятся достаточные условия сходимости, а также формулы для предельных и равновесных состояний системы.

3 Обозначения, определения и предварительные замечания

Введем обозначения и напомним известные понятия и результаты из матричного анализа.

Пусть в дальнейшем: M_n – множество $n \times n$ действительных квадратных матриц; A^τ – транспонированная матрица A; Γ – матрица смежности графа G; D – диагональная матрица с d_i в i-ой строке; $\Delta = D^{-1}\Gamma$; $\tilde{\Delta} = \frac{b}{a}\Delta$; I – матрица, состоящая из единиц; I^1 – вектор, состоящий из единиц; e^i – i-ый орт (столбец); $\tilde{d} = (d_1, \ldots, d_n)$; $r(A)$ – максимальное по модулю собственное число матрицы A.

Определение 1. Матрица A является *разложимой*, если существует такая матрица перестановок P, что

$$A = P\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}P^\tau,$$

где B и D квадратные матрицы. В противном случае A является *неразложимой* матрицей.

Определение 2. Граф $\Gamma(A) = (V, E)$ *соответствует матрице* A, если $a_{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(i, j) \in E$.

Очевидно, граф G соответствует матрицам Γ, Δ и $\tilde{\Delta}$. Преобразование подобия матриц в нашем случае эквивалентно перенумерации вершин графа.

Теорема 1 [7]. Матрица A является неразложимой тогда и только тогда, когда граф $\Gamma(A)$ связен.

Представляет интерес рассмотрение связных графов, т.к. в противном случае каждая компонента связности может быть рассмотрена отдельно. Следовательно, полагаем матрицы Γ, Δ и $\tilde{\Delta}$ неразложимыми.

Теорема 2 (Фробениуса) [11]. Неразложимая неотрицательная матрица A всегда имеет положительное собственное число r, которое является простым корнем характеристического многочлена. Модули остальных собственных чисел не превосходят r. Максимальному собственному числу r соответствует положительный собственный вектор. Если при этом имеется h собственных чисел, равных по модулю r, то все они различны между собой и являются корнями уравнения $x^h - r^h = 0$. При $h > 1$ перестановкой строк матрицу A можно представить в следующем (блочном) виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n_1 \times n_1} & A^{1,2}_{n_1 \times n_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0_{n_2 \times n_2} & A^{2,3}_{n_2 \times n_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n_3 \times n_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0_{n_{h-1} \times n_{h-1}} & A^{h-1,h}_{n_{h-1} \times n_h} \\ A^{h,1}_{n_h \times n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0_{n_h \times n_h} \end{pmatrix}.$$

Следствие 1 [11]. Значение $r(A)$ не меньше наименьшей и не больше наибольшей суммы элементов строк неотрицательной матрицы A.

Определение 3. Неразложимая неотрицательная матрица A называется *примитивной*, если $r(A)$ единственное собственное число с максимальным модулем (т. е. $h = 1$). В противном случае, матрица A называется *импримитивной* и h – *индексом импримитивности.*

Теорема 3 (Романовского) [7]. Пусть неразложимая неотрицательная матрица A соответствует графу $\Gamma(A)$. Для вершины i введем множество $L_i = \{k_1, k_2, \ldots\}$, где k_j – число ребер в цикле j, содержащем вершину i. Пусть g_i – наибольший общий делитель элементом множества L_i. Тогда $g_1 = g_2 = \ldots = g_n = h$.

Таким образом, индекс импримитивности матриц Δ и $\tilde{\Delta}$ равен 1 для не двудольных графов и равен 2 для двудольных графов.

Лемма 1 [7]. Пусть $A \in M_n,\ \lambda$ комплексное число и $x,\ y$ такие векторы, что $Ax = \lambda x;\ A^\tau y = \lambda y$ и $x^\tau y = 1$. Обозначим $L = xy^\tau$. Тогда, если λ является единственным собственным числом матрицы A с максимальным модулем $|\lambda| = r(A) > 0$, и для собственных чисел выполнены следующие неравенства $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n| = r(A)$, то

- $r(A - \lambda L) \leq |\lambda_{n-1}| < r(A)$;
- $(A\lambda^{-1})^m = L + (A\lambda^{-1} - L)^m \longrightarrow L$, при $m \rightarrow\ +\infty$;
- Если для некоторого числа ρ, $\frac{|\lambda_{n-1}|}{r(A)} < \rho < 1$, то $\parallel (r^{-1}A)^m - L \parallel_\infty \leq C\rho^m$, где число C зависит от ρ и A. (Здесь и далее через $\parallel A \parallel_\infty$ или просто $\parallel A \parallel$ обозначена матричная норма: $\parallel A \parallel_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$).

Утверждение 1 [7]. Пусть $A \in M_n$. Для сходимости ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A^m$ к матрице $(E - A)^{-1}$, а также для выполнения равенства $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$ необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $r(A) < 1$.

Теорема 4 (Перрона) [7]. Если неотрицательная матрица A неразложима и примитивна, r ее максимальное собственное число и $Ax = rx,\ yA = ry\ (x, y \geq 0;\ yx = 1)$, то $\lim\limits_{m\to\infty} (r^{-1}A)^m = L = xy$ и $\parallel (r^{-1}A)^m - L \parallel_\infty \leq C\rho^m$, где $|\lambda_{n-1}| < \rho < r$ (λ_{n-1} – следующее по абсолютной величине собственное число A после r. C определена выше).

Теорема 5 [11]. Если неотрицательная матрица A неразложима, а некоторая ее степень A^s разложима, то с помощью перестановки строк матрица A^s может быть представлена в блочно-диагональном виде с блоками $\{A_1, \ldots, A_d\}$, где все матрицы A_j являются неразложимыми и имеют одно и то же максимальное собственное число, а число d является наибольшим общим делителем степени s и индекса импримитивности h.

Приведенные результаты позволяют сформулировать некоторые утверждения относительно степеней матриц Δ и $\tilde{\Delta}$, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 2. Для любого натурального числа m, справедливы равенства
$r(\Delta^m) = 1$ и $r(\tilde{\Delta}^m) = \mid \frac{b}{a} \mid^m$.

Доказательство. Сумма элементов любой строки матрицы Δ^m равна 1 для любого натурального числа m. Тогда согласно Следствию 1 спектральный радиус матрицы Δ^m равен 1, а спектральный радиус матрицы $\tilde{\Delta}^m$ равен $\mid \frac{b}{a} \mid^m$.

Лемма 3. Для любого натурального числа m спектральный радиус $r\left(\sum\limits_{t=0}^{m-1} \Delta^{2t}\right) = m$.

Лемма 4. В случае не двудольного графа G, имеет место предел $\lim\limits_{m\to\infty} \Delta^m = L = \left(\frac{d_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i}\right)_{i,j=1,\ldots n}$.

Доказательство. В случае не двудольного графа матрица Δ является примитивной. Левый собственный вектор, соответствующий максимальному собственному числу (равному 1) равен $x = (1, \ldots, 1)^\tau = I^1$, а правый собственный вектор – $y = (d_1, \ldots, d_n) = \tilde{d}$. По Теореме 4 получаем утверждение леммы.

В случае двудольного графа Теорема 4 неприменима, т.к. матрица Δ импримитивна. Поэтому рассмотрим четные и нечетные степени матрицы Δ отдельно. Если граф G является двудольным, то матрица Δ может быть представлена в виде:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_1 \\ \Delta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть вершины графа G занумерованы таким образом, что имеет место приведенное выше представление матрицы Δ. Таким образом, множество вершин V разбивается на подмножества V^1 и V^2, $\mid V^1 \mid= n_1, \ \mid V^2 \mid= n_2$. Тогда $\Delta_1 \in M_{n_1\times n_2}$ и $\Delta_2 \in M_{n_2\times n_1}$, и суммы элементов каждой строки этих матриц равны 1, а число ненулевых элементов в столбце j совпадает со степенью вершины j. В дальнейшем степень вершины j будем обозначать $d_j^l, \ j \in V^l, \ l = 1, 2$.

Следовательно,

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} \Delta_1\Delta_2 & 0 \\ 0 & \Delta_2\Delta_1 \end{pmatrix},$$

и эта матрица разложима, а ее блоки неразложимые примитивные и имеют максимальные собственные числа, равные 1.

Для произвольных степеней имеем

$$\Delta^{2k} = \begin{pmatrix} (\Delta_1\Delta_2)^k & 0 \\ 0 & (\Delta_2\Delta_1)^k \end{pmatrix}, \ \Delta^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (\Delta_1\Delta_2)^k\Delta_1 \\ (\Delta_2\Delta_1)^k\Delta_2 & 0 \end{pmatrix}, \ k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, применяя Теорему 4 к блокам, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{2k} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix},$$

где $L_l = \left(\frac{d_j^l}{\sum\limits_{i=1}^{n_l} d_i^l}\right)_{i,j=1,\dots n_l}, \ l = 1, 2.$

Значит, $\Delta_1\Delta_2 I_{n_1}^1 = I_{n_1}^1, \ \Delta_2\Delta_1 I_{n_2}^1 = I_{n_2}^1$. Обозначим $\tilde{d}_l$ вектор-строку степеней вершин доли $l = 1, 2$. Тогда

$$\tilde{d}_1\Delta_1\Delta_2 = \left(\sum_{j\in V_1^2} d_j^1 \frac{1}{d_j^1} \cdots \sum_{j\in V_2^2} d_j^1 \frac{1}{d_j^1}\right)\Delta_2 = \tilde{d}_2\Delta_2 = \tilde{d}_1.$$

Следовательно, левый вектор, соответствующий собственному числу 1 матрицы $\Delta_1\Delta_2$, это $\tilde{d}_1$, а правый – $I_{n_1}^1$. Пусть $s_l = \sum\limits_{i=1}^{n_l} d_i^l, \ l = 1, 2$. Учитывая нормирование Теоремы 4, получаем

$$L_1 = s_1^{-1} I_{n_1}^1 \tilde{d}_1 = s_1^{-1} \left(d_j^1\right)_{i,j=1,\dots,n_1}.$$

Аналогично,

$$L_2 = s_2^{-1} I_{n_2}^1 \tilde{d}_2 = s_2^{-1} \left(d_j^2\right)_{i,j=1,\dots,n_2}.$$

Для нечетных степеней имеем

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & (\Delta_1\Delta_2)^k\Delta_1 \\ (\Delta_2\Delta_1)^k\Delta_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_1\Delta_1 \\ L_2\Delta_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_1^{-1} I_{n_1}^1 \tilde{d}_2 \\ s_2^{-1} I_{n_2}^1 \tilde{d}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, доказана

Лемма 5. Если граф G является двудольным, то

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{2k} = L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & L_1\Delta_1 \\ L_2\Delta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из Леммы 1 следует

Лемма 6.

$$\sum_{t=0}^{m-1} \Delta^{2t} = \sum_{t=0}^{m-1} \left((\Delta - L)^2\right)^t + mL = \sum_{t=0}^{m-1} (\Delta^2 - L)^t + mL$$

и для *любого* графа G, $r(\Delta^2 - L) < 1$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{t=0}^{m-1} (\Delta^2 - L)^t = (E - (\Delta - L)^2)^{-1}.$$

4 Анализ рекуррентных соотношений

Отметим, что соотношения (5) сохраняют количество ресурса каждой вершины, т. е. $q_i^{k+1} = q_i^k,\ i \in V,\ k = 0, 1, \ldots$ Действительно,

$$q_i^{k+1} = \sum_{j\in V_i} x_{ij}^{k+1} = -\frac{b}{a} \sum_{j\in V_i} x_{ji}^k + \frac{1}{a} \sum_{j\in V_i} f_i^k = -\frac{b}{a} p_i^k + \frac{d_i}{a} \frac{aq_i^k + bp_i^k}{d_i} = q_i^k.$$

В дальнейшем (впрочем, как и ранее) будем писать q_i вместо q_i^k.

Применяя последовательно (для $k = 1, 2, \ldots$) соотношения (5), получим

Утверждение 2. Для любого натурального числа m справедливо выражение

$$x_{ij}^{2m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2m} x_{ij}^0 + \frac{1}{a} \left[f_i^{2m-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 f_i^{2m-3} + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right)^{2m-2} f_i^1 \right] -$$
$$\frac{b}{a^2} \left[f_j^{2m-2} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 f_j^{2m-4} + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right)^{2m-2} f_j^0 \right]. \qquad (6)$$

Как видно из (6) для нахождения предельного распределения ресурсов необходимо знать величины f_i^k для всех $k = 0, 1, \ldots,\ i \in V$. Для некоторой вершины $i_0 \in V$ имеем

$$f_{i_0}^k = \frac{aq_{i_0}}{d_{i_0}} + \frac{b}{d_{i_0}} \left[-\frac{b}{a} \sum_{i_1\in V_{i_0}} x_{i_0,i_1}^{k-1} + \frac{1}{a} \sum_{i_1\in V_{i_0}} f_{i_1}^{k-1} \right] =$$

$$= \frac{a^2-b^2}{ad_{i_0}} q_{i_0} + \frac{b}{ad_{i_0}} \left[\sum_{i_1 \in V_{i_0}} \frac{a^2-b^2}{ad_{i_1}} q_{i_1} \right] + \frac{b^2}{ad_{i_0}} \sum_{i_1 \in V_{i_0}} \frac{1}{d_{i_1}} \sum_{i_2 \in V_{i_1}} f_{i_2}^{k-2} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{a^2-b^2}{ad_{i_0}} q \left(E + \tilde{\Delta} + \ldots + \tilde{\Delta}^{k-1} \right) e^{i_0} + f^0 D \tilde{\Delta}^k \frac{e^{i_0}}{d_{i_0}}.$$

Таким образом, для любых $k = 0, 1, \ldots$ и $i \in V$, справедливо выражение

$$f_i^k = \frac{a^2-b^2}{ad_i} q \left(E + \tilde{\Delta} + \ldots + \tilde{\Delta}^{k-1} \right) e^i + f^0 D \tilde{\Delta}^k \frac{e^i}{d_i}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (6), получим веса дуг выраженные через начальные веса x_{ij}^0, величины q_i и вектор f^0.

Заметим, что в случае $\mid \frac{b}{a} \mid > 1$ сходимость процесса перераспределения ресурсов может быть только при определенных начальных весах и специальном графе G. Ниже будет показано, что неравенство $\mid \frac{b}{a} \mid \leq 1$ является достаточным условием сходимости итеративного процесса при любых начальных состояниях и для любого графа G.

5 Предельные состояния

Рассмотрим два случая.

5.1 Случай $\mid \frac{b}{a} \mid < 1$

В этом случае по Утверждению 1 и Лемме 2 выражение (7) можно переписать в виде

$$f_i^k = \frac{a^2-b^2}{ad_i} q \left(E - \tilde{\Delta}^k \right) \left(E - \tilde{\Delta} \right)^{-1} e^i + f^0 D \tilde{\Delta}^k e^i. \tag{8}$$

Справедливо

Утверждение 3. Если $\mid \frac{b}{a} \mid < 1$, то

$$\lim_{k \to \infty} f_i^k = \frac{a^2-b^2}{ad_i} q \left(E - \tilde{\Delta} \right)^{-1} e^i. \tag{9}$$

Из (6) и (8) получим утверждение следующей леммы.

Лемма 7. Если $\mid \frac{b}{a} \mid < 1$, то

$$x_{ij}^{2m} = \left(\frac{b}{a} \right)^{2m} x_{ij}^0 + \frac{q_i}{d_i} \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^{2m} \right] + q \left(E - \tilde{\Delta} \right)^{-1} v +$$

$$+ \left(\frac{b}{a} \right)^{2m-2} \left[\frac{a^2-b^2}{a^2} q \left(E - \tilde{\Delta} \right)^{-1} - \frac{1}{a} f^0 D \right] \left(\sum_{t=0}^{m-1} \Delta^{2t} \right) v, \tag{10}$$

где $v = \tilde{\Delta}\frac{e^i}{d_i} - \frac{b}{a}\frac{e^j}{d_j}$.

По Лемме 3 спектральный радиус матрицы $\sum\limits_{t=0}^{m-1} \Delta^{2t}$ равен m. Значит, спектральный радиус матрицы $\left(\frac{b}{a}\right)^{2m} \sum\limits_{t=0}^{m-1} \Delta^{2t}$ равен $\left(\frac{b}{a}\right)^{2m} m$, и он стремится к нулю при неограниченном росте m. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} = \frac{q_i}{d_i} + q\left(E - \tilde{\Delta}\right)^{-1} v = q\left(E - \tilde{\Delta}\right)^{-1}\left(\frac{e^i}{d_i} - \frac{b}{a}\frac{e^j}{d_j}\right). \tag{11}$$

Аналогично находится предел нечетных весов:

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m+1} = \lim_{m\to\infty}\left(-\frac{b}{a}x_{ji}^{2m} + \frac{1}{a}f_i^{2m}\right) =$$

$$= -\frac{b}{a}q\left(E - \tilde{\Delta}\right)^{-1}\left(\frac{e^j}{d_j} - \frac{b}{a}\frac{e^i}{d_i}\right) + \frac{a^2 - b^2}{a^2}q\left(E - \tilde{\Delta}\right)^{-1}\frac{e^i}{d_i} = q\left(E - \tilde{\Delta}\right)^{-1}\left(\frac{e^i}{d_i} - \frac{b}{a}\frac{e^j}{d_j}\right).$$

Итак, справедлива

Лемма 8. Если $\mid \frac{b}{a} \mid < 1$, то

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} = \lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m+1} = q\left(E - \tilde{\Delta}\right)^{-1}\left(\frac{e^i}{d_i} - \frac{b}{a}\frac{e^j}{d_j}\right),$$

и этот предел не зависит от начальных весов дуг.

5.2 Случай $\mid \frac{b}{a} \mid = 1$

В данном случае по (6) и (7) имеем

$$f_i^k = f^0 D\tilde{\Delta}^k \frac{e^i}{d_i} = \left(\frac{b}{a}\right)^k f^0 D\Delta^k \frac{e^i}{d_i}; \tag{12}$$

и

$$x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + \frac{1}{a}f^0 D\left(\sum_{t=0}^{m-1}\Delta^{2t}\right)v = x_{ij}^0 + \frac{1}{a}f^0 D\sum_{t=0}^{m-1}\frac{b}{a}\left(\Delta^{2t+1}\frac{e^i}{d_i} - \Delta^{2t}\frac{e^j}{d_j}\right). \tag{13}$$

Для не двудольного графа из Леммы 4 вытекает равенство $Le^i = s^{-1}d_i I^1$. Значит, в случае $a = b$, предел

$$\lim_{k\to\infty} f_i^k = f^0 DL\frac{e^i}{d_i} = s^{-1}f^0 DI^1 = s^{-1}\sum_{k=1}^{n} f_k^0 d_k = s^{-1}\sum_{k=1}^{n}(aq_k + ap_k^0) = \frac{2aQ}{s},$$

где $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$.

Если $a = -b$, то $f_i^k = (-1)^k f^0 D\Delta^k \frac{e^i}{d_i}$. Выражение $f^0 D\Delta^k \frac{e^i}{d_i}$ стремится к $s^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(aq_k - ap_k^0)$, которое, в свою очередь, стремится к нулю при неограниченном росте k. Величины $(-1)^k$ ограничены. Следовательно, имеет место

Лемма 9. В случае $|\frac{b}{a}|= 1$ и не двудольного графа G предел

$$\lim_{k\to\infty} f_i^k = \begin{cases} \frac{2aQ}{s}, & a=b; \\ 0, & a=-b. \end{cases} \tag{14}$$

Из Леммы 6 следует, что $\sum\limits_{t=0}^{m-1}\Delta^{2t} = \sum\limits_{t=0}^{m-1}(\Delta^2-L)^t + mL$. Следовательно, с учетом свойств матрицы L (Лемма 1), имеем

$$\left(\sum_{t=0}^{m-1}\Delta^{2t}\right)v = \left[\sum_{t=0}^{m-1}(\Delta^2-L)^t + mL\right]\left(\tilde{\Delta}\frac{e^i}{d_i} - \frac{b}{a}\frac{e^j}{d_j}\right) = \frac{b}{a}\left[\sum_{t=0}^{m-1}(\Delta^2-L)^t\right]\left(\Delta\frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j}\right).$$

Значит, из (13), следует, что

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + \frac{1}{b}f^0 D\left[E-(\Delta^2-L)\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j}\right), \tag{15}$$

и для нечетных шагов

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m+1} = -\frac{b}{a}\lim_{m\to\infty} x_{ji}^{2m} + \frac{1}{a}\lim_{m\to\infty} f_i^{2m} =$$

$$= -\frac{b}{a}x_{ji}^0 - \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta^2-L)\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^j}{d_j} - \frac{e^i}{d_i}\right) + \frac{(a+b)Q}{as}.$$

В случае двудольного графа G аналогичные преобразования приводях к следующей лемме.

Лемма 10. Если G двудольный граф и $a=b$, и $Q_l = \sum\limits_{i\in V^l} q_i,\ l=1,2$, то для любой вершины $i \in V^1$,

$$\lim_{k\to\infty} f_i^{2k} = \begin{cases} \frac{a(Q_1+Q_2)}{s_1}, & a=b; \\ \frac{a(Q_1-Q_2)}{s_2}, & a=-b; \end{cases}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} f_i^{2k+1} = \begin{cases} \frac{a(Q_1+Q_2)}{s_2}, & a=b; \\ \frac{a(Q_1-Q_2)}{s_1}, & a=-b. \end{cases}$$

Итак, справедлива

Лемма 11. В случае $|\frac{b}{a}|= 1$ предел

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + \frac{1}{b}f^0 D\left[E-(\Delta^2-L)\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j}\right),$$

где матрица L принимает соответствующий вид в зависимости от вида графа G (является ли он двудольным или нет).

6 Основные результаты

Подводя итог, сформулируем основные результаты работы в виде теоремы.

Теорема 6. Если $\mid \frac{b}{a} \mid \leq 1$, то итеративный процесс (5) сходится для произвольного графа G и при любом начальном распределении ресурсов вершин. Более того,

1. Если $\mid \frac{b}{a} \mid < 1$, то предельное и равновесное состояние одно, оно не зависит от начального распределения ресурсов и равно

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^m = q(E-\tilde{\Delta})^{-1}\left(\frac{e^i}{d_i}-\frac{b}{a}\frac{e^j}{d_j}\right).$$

2. Если граф G не является двудольным, то

   - Если $a=b$, то существует два предельных состояния: четное

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta-L)^2\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^i}{d_i}-\frac{e^j}{d_j}\right),$$

   и нечетное

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m+1} = -x_{ji}^0 - \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta-L)^2\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^j}{d_j}-\frac{e^i}{d_i}\right)+\frac{2Q}{s}.$$

   - Если $a=-b$, то существует также два предельных состояния: четное

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 - \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta-L)^2\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^i}{d_i}-\frac{e^j}{d_j}\right),$$

   и нечетное

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m+1} = x_{ji}^0 - \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta-L)^2\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^j}{d_j}-\frac{e^i}{d_i}\right).$$

3. Если граф G является двудольным, то

   - Если $a=b$, то

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta^2-L)\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^i}{d_i}-\frac{e^j}{d_j}\right);$$

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m+1} = -x_{ji}^0 - \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta^2-L)\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^j}{d_j}-\frac{e^i}{d_i}\right)+\frac{Q}{s_l}.$$

   - Если $a=-b$, то

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 - \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta^2-L)\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^i}{d_i}-\frac{e^j}{d_j}\right);$$

$$\lim_{m\to\infty} x_{ij}^{2m+1} = x_{ji}^0 - \frac{1}{a}f^0 D\left[E-(\Delta^2-L)\right]^{-1}\left(\Delta\frac{e^j}{d_j}-\frac{e^i}{d_i}\right)+\frac{Q_l-Q_{l+1}}{s_l},$$

где $l = 1$, если $i \in V^1$ и $l = 2$, если $i \in V^2$, а $l+1 = 2$, если $i \in V^1$ и $l+1 = 1$, если $i \in V^2$.

Замечание 1. Для нахождения предельных состояний системы необходимо обратить матрицы. Эта процедура определяет трудоемкость вычисления предельных состояний. В нашем случае предельное состояние системы находится с трудоемкостью $O(n^3)$ и памятью $O(n^2)$.

Замечание 2. Из предельных состояний (четного и нечетного) можно найти равновесные состояния, которые не меняются в результате преобразований (5). Действительно, рассмотрим нечетное $X^O = \| \lim\limits_{m\to\infty} x_{ij}^{2m+1} \|$ и четное $X^E = \| \lim\limits_{m\to\infty} x_{ij}^{2m} \|$ предельные состояния. Очевидно, соотношения (5) переводят X^O и X^E друг в друга. Следовательно, состояние $\overline{X} = \lambda X^O + (1 - \lambda)X^E$ является равновесным для всех $\lambda \in [0, 1]$. Оно не меняется в результате преобразований (5) и является допустимым (равенства (2) справедливы).

Список литературы

[1] Астраков С.Н., Ерзин А.И. Одна модель саморегулирующейся системы. *Математические структуры и моделирование.* 2004. **13**. С. 30-38.

[2] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1966.

[3] Ерзин А.И., Астраков С.Н., Тахонов И.И., Гадяцкая О.А. Одна задача функционирования распределенной сети. *Материалы межд. семинара "Вычислительные методы и решение оптимизационных задач". Бишкек, Кырг. респ..* 2004. С. 77-82.

[4] Макеев С.П. О реализуемости взвешенных графов с заданными весами вершин. *Управляемые системы. ИМ СО РАН.* 1993. **13**. С. 40-52.

[5] Смольяков Э.Р. *Равновесные модели при несовпадающих интересах участников.* М.: Наука, 1986.

[6] Хакими С.Л. О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа. *Кибернетика. Сб. Новая серия.* М.: Мир. 1966. **2**. С. 40-53.

[7] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.

[8] Adamidou E. A., Kornhauser A. L., Koskosidis Y. A. A game theoretic/network equilibrium solution approach for the railroad freight car management problem. *Transportation Research Part B: Methodological.* 1993. **27 (3)**. P. 237-252.

[9] Cobb J.A., Gouda M.G., Musunuri R. A Stabilizing Solution to the Stable Path Problem. *Proc. of 6th International Symposium "Self-Stabilizing Systems". San Francisco, USA* . 2003. P. 169-183.

[10] Fudenberg D., Tirole J. *Game Theory.* Massachusetts: MIT Press, 1991.

[11] Gibbons R. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton: Princeton University Press, 1992.

[12] Dolev S., Schiller E. Self-Stabilizing Group Communication in Directed Networks. *Proc. of 6th International Symposium "Self-Stabilizing Systems". San Francisco, USA* . 2003. P. 61-76.