Задача поиска сбалансированного потока

А.И. Ерзин, И.И. Тахонов

Аннотация

Рассматривается модель процесса изменения потока в произвольной ориентированной сети с неограниченными пропускными способностями дуг. Предполагается, что время дискретно, и на любом временном шаге каждая вершина распределяет пришедший в нее поток по исходящим дугам в заданной пропорции. Начальный поток и мощности вершин-источников известны. Поток, пришедший в каждую вершину-сток, поглощается полностью.

Процесс изменения потока сходится (стабилизируется) к некоторому сбалансированному потоку не всегда. В работе найдены достаточные условия стабилизации потока, оценена скорость сходимости процесса, приведены аналитические формулы для вычисления предельного потока.

1 Постановка задачи

Пусть задан произвольный ориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$. Каждой вершине $i \in V$ поставим в соответствие множества $I_i = \{k : (k, i) \in E\}$ и $O_i = \{k : (i, k) \in E\}$, $i \in V$. Обозначим множество стоков графа G через $T = \{i \in V : O_i = \emptyset\}$. Для любой вершины $i \in V \setminus T$ полагаем известным ее потенциал $q_i \geq 0$, который равен количеству потока, возникающего в данной вершине в единицу времени. Вершины, имеющие положительный потенциал являются источниками.

Потоком в сети назовем множество действительных чисел x_{ij}, заданных на множестве ребер $(i, j) \in E$. При этом, x_{ij} является величиной потока по дуге (i, j). Поток $X = \{x_{ij},\ (i, j) \in E\}$ является *сбалансированным*, если он удовлетворяет условиям сохранения

$$q_i + \sum_{p \in I_i} x_{pi} = \sum_{j \in O_i} x_{ij},\ i \in V \backslash T. \tag{1}$$

Полагаем, что в каждой вершине $i \notin T$ происходит распределение приходящего в нее потока вместе с потенциалом q_i по исходящим дугам (i, j), $j \in O_i$ в заданных пропорциях. Другими словами, для каждой вершины $i \notin T$ заданы доли $a_{ij} \geq 0$, $j \in O_i$, $\sum\limits_{j \in O_i} a_{ij} = 1$, потока, направляемого из вершины i в вершину $j \in O_i$. Следовательно, для каждой вершины $i \in V \setminus T$ справедливы соотношения

$$x_{ij} = a_{ij}(q_i + \sum_{p \in I_i} x_{pi}),\ j \in O_i. \tag{2}$$

Легко проверить, что поток X, удовлетворяющий условиям (2), является сбалансированным, так как для него выполняются условия (1). Значит, для нахождения сбалансированного потока достаточно решить систему (2). Это можно сделать с трудоемкостью $O(n^3)$. Действительно, сократим количество переменных, введя новые переменные

$$\lambda_i = \frac{x_{ij}}{a_{ij}},\ j \in O_i.$$

В результате получим систему из $|V \backslash T| \leq n$ уравнений

$$\lambda_i = q_i + \sum_{p \in I_i} a_{pi} \lambda_p \tag{3}$$

для переменных λ_i и $O(|E|)$ соотношений $x_{ij} = a_{ij}\lambda_i,\ i \notin T,\ j \in O_i$. Трудоемкость решения системы (3) ограничена величиной $O(n^3)$ [2].

На практике, даже если сбалансированный поток существует, стабилизация потока занимает некоторое время. Предположим, что сеть является моделью вентиляционной системы, в которой вершины-источники – это места забора воздуха, а вершины-стоки места вывода воздуха из сети. В начальный момент поток известен, и пусть он является сбалансированным. Допустим топология сети изменилась, или добавлен/удален источник, или изменились потенциалы источников. Что произойдет с потоком? Существует ли предельный поток? Если да, то как быстро процесс изменения потока сойдется к предельному потоку? Ответы на эти вопросы не очевидны.

В работе изменение потока во времени моделируются итерационным процессом, в котором одна итерация соответсвует одному временному шагу. Это значит, что каждая вершина $i \in V \backslash T$ на произвольном шаге $k+1$ перераспределяет пришедший в нее в момент $k,\ k = 0,\ 1, \ldots$, поток по исходящим дугам $(i,j),\ j \in O_i$ согласно неизменным пропорциям $a_{ij} \geq 0,\ j \in O_i$. Перепишем (2) с учетом шага по времени, как рекуррентные соотношения:

$$x_{ij}^{k+1} = a_{ij}(q_i + \sum_{p \in I_i} x_{pi}^k),\ i \in V \backslash T,\ j \in O_i,\ k = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

полагая начальный поток $X^0 = \{x_{ij}^0,\ (i,j) \in E\}$ известным.

Отметим, что поток $X^{k+1} = \{x_{ij}^{k+1}, (i,j) \in E\}$, определенный соотношениями (4), не обязательно удовлетворяет условиям сохранения (1). Если процесс, заданный соотношениями (4) сходится, то есть существует предел $\lim_{k \to \infty} x_{ij}^k = x_{ij}^*, (i,j) \in E$, то предельный поток $X^* = \{x_{ij}^*\}$ будет сбалансированным.

Поток X^k, который не меняется в результате применения соотношений (4), назовем *равновесным.* Нетрудно видеть, что в случае сходимости процесса, определенного рекуррентными соотношениями (4) (иногда будем говорить просто процесса (4)), предельный поток не меняется в результате применения соотношений (4) и, следовательно, является равновесным.

Задачей данной работы является поиск условий сходимости процесса изменения заданного начального потока X^0 в результате применения соотношений (4).

В работе найдены легко проверяемые достаточные условия сходимости данного процесса к сбалансированному потоку, удовлетворяющему соотношениям (1) и (2), определена скорость сходимости и приведены аналитические формулы вычисления сбалансированного потока. Трудоемкость вычисления предельного (сбалансированного) потока равна $O(n^3)$. Показано, в частности, что процесс (4) сходится к единственному не зависящему от начального потока предельному состоянию в том и только в том случае, когда однозначно разрешима система (2). При этом сходимость происходит со скоростью геометрической прогрессии. В случае, когда матрица системы (2) вырождена и сбалансированный поток определяется неоднозначно, процесс (4) имеет равновесное состояние, которое можно считать искомым сбалансированным потоком.

2 Предварительные замечания

Нам потребуются некоторые сведения из линейной алгебры и теории матриц.

Обозначим через $M_{m,n}$ множество матриц размера $m \times n$ а через M_n множество квадратных матриц размера n. Легко видеть, что следующая функция является матричной нормой на $M_{m,n}$: $\|A\| = \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. В дальнейшем мы будем пользоваться последней нормой.

Обозначим через

$$\Gamma = \{\gamma_{ij}\},\ \gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

матрицу смежности графа $G = (V, E)$.

Граф $H = (V(H), E(H))$ называется *сильно связным*, если для любой пары его вершин $i, j \in V(H)$ существует путь из вершины i в вершину j.

Подграф H' графа H назовем *сильной компонентой* графа H, если множество его вершин $V(H')$ представляет собой максимальное по включению сильно связное подмножество вершин графа. Иными словами, сильная компонента есть максимальное по включению множество вершин, попарно связанных путями. Очевидно, дуги между вершинами двух различных сильных компонент все ориентированы из одной компоненты в другую. По графу G однозначно строится граф его сильных компонент. Это граф, вершинами которого являются сильные компоненты $\{G_k\}$, а дуга (G_k, G_l) принадлежит графу в том и только том случае, когда существует дуга из некоторой вершины компоненты G_k в некую вершину компоненты G_l. Нетрудно видеть, что граф компонент представляет собой ориентированный ациклический граф.

Замечание 1. Граф сильных компонент можно построить с трудоемкостью $O(|V| + |H|)$ [3].

Введем матрицу $A = \{\alpha_{ij}\},\ \alpha_{ij} = a_{ij}\gamma_{ij}$

Пусть q – вектор (строка) потенциалов вершин, E – единичная матрица, и e^i ее i-й столбец (i-й координатный орт).

Матрица *неотрицательна*, если все ее элементы неотрицательные.

Матрица A *приводима*, если существует такая матрица перестановок P, что

$$PAP^\tau = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где B и D квадратные матрицы. В противном случае матрица *неприводима.*

Через $Spec(A)$ обозначим множество собственных чисел (спектр) матрицы A.

Спектральным радиусом матрицы A назовем число $r(A) = \max\limits_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda|$.

Неприводимая матрица называется *примитивной*, если она имеет единственное собственное число с максимальным модулем. В противном случае она называется *импримитивной*, а *индексом импримитивности* является число собственных значений с максимальным модулем.

Матрица A соответствует графу G, если ее элемент $a_{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(i, j) \in E$.

Замечание 2. Если матрица A соответствует графу G, P – некоторая матрица перестановок, $A' = PAP^\tau$, то матрица A' соответствует графу G', получаемому из G соответствующей перенумерацией вершин.

Замечание 3.([2], п. 6.2) Пусть матрица A соответствует графу G. Тогда A неприводима тогда и только тогда, когда G сильно связный граф.

Замечание 4.([1], XIII, §4) Если A приводимая матрица, то существует матрица перестановок P, под действием которой матрица A принимает следующий блочный вид

$$PAP^{\tau} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
A_1 & 0 & \vdots & 0 & A_{1,g+1} & A_{1,g+2} & \vdots & A_{1,m} & A_{1,m+1} \\
0 & A_2 & \vdots & 0 & A_{2,g+1} & A_{2,g+2} & \vdots & A_{2,m} & A_{2,m+1} \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \vdots & A_g & A_{g,g+1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
 & & & & A_{g+1} & A_{g+1,g+2} & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & A_{g+2} & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & & & & & \ddots & A_{m-1,m} & \vdots \\
 & & & & & 0 & & A_m & A_{m,m+1} \\
 & & & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

Здесь A_i – неприводимые квадратные блоки. В каждом "блочном столбце" $A_{1,f}$, $A_{2,f}, \ldots$, $A_{f-1,f}$ $(f = g+1, \ldots, m+1)$ есть хотя бы одна ненулевая матрица. Более того, матрица P такая, что в случае существования нулевых строк в матрице A, в матрице PAP^{τ} они формируют последнюю "блочную" строку с номером $(m+1)$. Если в матрице A нет нулевых строк, то и в матрице PAP^{τ} их тоже нет, и, следовательно, нет "блочного столбца" с номером $m+1$. Справедливо также следующее "симметричное" замечание.

Замечание 4'. Если A приводимая матрица, то существует матрица перестановок P, под действием которой матрица A принимает следующий блочный вид

$$PAP^{\tau} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
A_1 & 0 & \vdots & 0 & & & & & \\
0 & A_2 & \vdots & 0 & & & & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & & 0 & & \\
0 & 0 & \vdots & A_g & & & & & \\
\hline
A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & \cdots & A_{g+1,g} & A_{g+1} & & & & \\
A_{g+2,1} & A_{g+2,2} & \cdots & \cdots & A_{g+2,g+1} & A_{g+2} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \ddots & & \\
A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{m,m-1} & A_m & \\
A_{m+1,1} & A_{m+1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{m,m+1} & 0
\end{array}\right)$$

Здесь A_i – неприводимые квадратные блоки. В каждой "блочной строке" $A_{f,1}$, $A_{f,2}, \ldots$, $A_{f,f-1}$ $(f = g+1, \ldots, m+1)$ есть хотя бы одна ненулевая матрица. Более того, матрица P такая, что в случае существования нулевых столбцов в матрице A, в матрице PAP^{τ} они формируют последний "блочный" столбец с номером $(m+1)$. Если в матрице A нет нулевых столбцов, то и в матрице PAP^{τ} их тоже нет, и, следовательно, нет "блочной строки" с номером $m+1$.

Замечание 5. Введенная в начале раздела матрица A является неотрицательной. Все строчные суммы (сумма элементов одной строки) матрицы A равны либо 0 (в случае стоков), либо 1 (для остальных вершин).

Утверждение 1.([2]) Матрица A в степени k стремится к нулевой матрице при неограниченном росте степени (т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$), тогда и только тогда, когда спектральный радиус матрицы A меньше единицы: $r(A) < 1$.

Утверждение 2.([2]) Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится тогда и только тогда, когда $r(A) < 1$, и сумма ряда равна матрице $(E-A)^{-1}$.

Утверждение 3.([2], п. 8.1) Пусть A – неотрицательная неприводимая матрица. Тогда справедливы следующие неравенства.

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le r(A) \le \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le r(A) \le \max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Причем, равенство в одном из неравенств достигается только в том случае, когда все соответствующие строчные или столбцовые суммы равны между собой.

Утверждение 4. (Теорема Романовского, [2], п. 8.5) Пусть A неотрицательная и неразложимая матрица, и граф G с множеством вершин $\{P_i\}$ соответствует матрице A. Обозначим через $L_i = \{k_i^1, k_i^2, \dots\}$ количества дуг во всевозможных контурах из P_i в P_i, а через g_i наибольший общий делитель элементов L_i. Тогда $g_1 = g_2 = \dots = g_n = h$, где h индекс импримитивности матрицы A.

Утверждение 5. (Теорема Перрона, [2], п. 8.5) Пусть A неотрицательная примитивная матрица и $r(A)$ ее спектральный радиус. Тогда существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} (\frac{1}{r(A)}A)^k = L$, где $L = xy, Ax = r(A)x, yA = r(A)y, yx = 1$.

Утверждение 6. ([2], п. 5.6) Пусть A матрица размерности $n \times n$ и задано некоторое число $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая не зависящая от k величина $C = C(A, \varepsilon)$, что для всех $k \in N$ и $i, j = 1, \dots, n$ выполняются неравенства $|(A^k)_{ij}| \le C(r(A)+\varepsilon)^k$.

Утверждение 7.(некоторые утверждения теоремы Фробениуса, [1], XIII, §2) Неразложимая неотрицательная матрица A всегда имеет положительное собственное число r, которое является простым корнем характеристического многочлена. Модули других собственных чисел не превосходят r. “Максимальному” собственному числу r соответствует собственный вектор z с положительными координатами. Если при этом A имеет h собственных чисел с максимальным модулем r, то все они различны и являются корнями уравнения $x^h - r^h = 0$.

Замечание 6. Система (1) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима система (3). Обозначим через $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{|V\setminus T|})$. Тогда система (3) примет вид $\lambda(E-A) = q$ и будет разрешима в том и только том случае, когда число 1 не является собственным числом матрицы A. Ниже будет показано, что спектральный радиус матрицы A не превосходит единицы, и будут найдены условия, когда он строго меньше 1. В последнем случае система (3) будет однозначно разрешима. Более того, с помощью теоремы Фробениуса несложно показать, что в случае, когда $r(A) = 1$, единица обязательно будет собственным числом матрицы A. Таким образом, однозначная разрешимость (3) эквивалентна условию $r(A) < 1$, или существованию пути, соединяющего произвольную вершину с некоторым стоком. Тогда $\lambda_i = q(E-A)^{-1}e^i$, и решение системы (1) имеет вид $x_{ij} = a_{ij}q(E-A)^{-1}e^i$. В противном случае (когда спектральный радиус равен 1), система либо имеет бесконечное множество решений, либо несовместна.

3 Условия сходимости

Найдем достаточные условия сходимости процесса, заданного рекуррентными соотношениями (4). Заметим, что при фиксированных k и i отношения $x_{ij}^k/a_{ij} = const$ для всех $j \in O_i$. Воспользуемся обозначениями

$$\lambda_i^k = \frac{x_{ij}^k}{a_{ij}},\ j \in O_i.$$

Тогда соотношения (3) перепишутся в виде

$$\lambda_i^k = q_i + \sum_{p \in I_i} a_{pi} \lambda_p^{k-1},$$

или в векторном виде

$$\lambda^{(k)} = q + \lambda^{(k-1)} A,$$

где вектор-строка $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

Таким образом, задачу нахождения предельного состояния рассматриваемой системы можно свести к отысканию решения задачи Коши для разностного матричного уравнения

$$\begin{cases} \lambda^{(k)} = q + \lambda^{(k-1)} A, \\ \lambda^{(0)} = \lambda^0. \end{cases}$$

Для однозначной разрешимости последней задачи необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы A лежал строго внутри единичного круга. К сожалению, на сегодняшний день не существует алгоритмов вычисления спектра не самосопряженных матриц с гарантированной точностью, поэтому вопрос принадлежности спектра матрицы внутренности единичного круга должен решаться отдельно. В работе [5], например, дан критерий принадлежности спектра единичному кругу в терминах решения дискретного уравнения Ляпунова. В нашем случае, как будет видно далее, нет необходимости прибегать к упомянутому критерию.

Несложно понять, что решение можно представить в виде

$$\lambda^{(k)} = q \sum_{l=0}^{k-1} A^l + \lambda^0 A^k.$$

Действительно, развертывая рекурсию, получим

$$\lambda^{(k)} = q + \lambda^{(k-1)} A = q + (q + \lambda^{(k-2)} A) A = q(E + A) + \lambda^{(k-2)} A^2 = q(E + A + A^2) + \lambda^{(k-3)} A^3 =$$

$$= q(E + A + A^2 + A^3) + \lambda^{(k-4)} A^4 = \cdots = q(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) + \lambda^{(0)} A^k.$$

Заметим, что

$$\lambda^0 A e^i = \sum_{p \in I_i} \frac{x_{pi}^0}{a_{pi}} a_{pi} = \sum_{p \in I_i} x_{pi}^0 = p_i^0.$$

Переходя к исходным переменным x_{ij}^k, убеждаемся, что соотношения (4) приводят к выражениям

$$x_{ij}^{k+1} = a_{ij} q(E + A + A^2 + \cdots + A^k) e^i + a_{ij} p^0 A^k e^i, \tag{5}$$

где $p^0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$ вектор-строка, i-я компонента которого равна суммарному потоку, входящему в i-ю вершину в начальный момент времени.

Из утверждения 2 следует, что при произвольном векторе потенциалов q для существования предельного состояния необходимо и достаточно выполнения неравенства $r(A) < 1$. В этом случае

$$x^*_{ij} = a_{ij} q (E - A)^{-1} e^i, \tag{6}$$

и это предельное состояние (предельный поток) не зависит от начального потока. Нетрудно видеть также, что предельный поток, определенный соотношением (6), будет равновесным. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. В случае произвольного вектора потенциалов для сходимости процесса (4) достаточно выполнение условия $r(A) < 1$. В этом случае предельное равновесное состояние не зависит от начального потока и задается соотношением (6).

Оценим скорость сходимости. Из выражения (5) имеем

$$x^{k+1}_{ij} = a_{ij} q (E + A + A^2 + \cdots + A^k) e^i + a_{ij} p^0 A^k e^i =$$
$$a_{ij} q (E - A)^{-1} e^i - a_{ij} q (E - A)^{-1} A^{k+1} e^i + a_{ij} p^0 A^k e^i = x^*_{ij} - a_{ij} (qA(E - A)^{-1} - p^0) A^k e^i.$$

Таким образом,

$$\|X^{k+1} - X^*\| \le D(A, q, p^0) \|A^k\|,$$

где величина $D(A, q, p^0)$ не зависит от k. Оценим норму $\|A^k\|$. Так как $r(A) < 1$, то можно выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $r(A) + \varepsilon < 1$. Тогда по утверждению 6 имеем неравенство

$$\|A^k\| \le nC(r(A) + \varepsilon)^k.$$

Значит,

$$\|X^{k+1} - X^*\| \le F(A, q, p^0, \varepsilon)(r(A) + \varepsilon)^k.$$

Следовательно, сходимость процесса происходит со скоростью геометрической прогрессии.

Найдем условия, при которых спектральный радиус матрицы A меньше единицы. Перенумеруем вершины графа таким образом, что матрица A примет следующий нормальный вид.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
A_1 & 0 & \vdots & 0 & A_{1,g+1} & A_{1,g+2} & \vdots & A_{1,m} & A_{1,m+1} \\
0 & A_2 & \vdots & 0 & A_{2,g+1} & A_{2,g+2} & \vdots & A_{2,m} & A_{2,m+1} \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \vdots & A_g & A_{g,g+1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
 & & & & A_{g+1} & A_{g+1,g+2} & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & A_{g+2} & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & & & & & \ddots & A_{m-1,m} & \vdots \\
 & & & & & 0 & & A_m & A_{m,m+1} \\
 & & & & & & & & 0
\end{array}\right), \tag{7}$$

где нулевым строкам соответствуют стоки графа.

Заметим, что если стоков в графе нет, тогда $r(A_m) = 1$ (так как все строчные суммы равны единице и матрица неразложима). А так как $Spec(A) = \bigcup_{i=1}^{m} Spec(A_i)$, то $r(A) = 1$ и значит процесс, определенный соотношениями (4), в общем случае расходится. Следовательно, далее в этом разделе будем считать, что стоки в графе есть. Тогда $Spec(A) = \bigcup_{i=1}^{m} Spec(A_i) \bigcup \{0\}$. Значит, для того чтобы спектральный радиус матрицы A был меньше 1 необходимо и достаточно, чтобы $r(A_i) < 1$ для всех $i = 1, \ldots, m$. В виду неразложимости матриц A_i, эти неравенства эквивалентны условию, что хотя бы одна из строчных сумм матрицы меньше 1 (см. утверждение 3). Строчные суммы матрицы A равны 1 или 0 (для стоков). Значит, в нормальном представлении матрицы A есть ненулевые блоки как в "блочных столбцах", так и в "блочных строках" и справедливо следующее свойство.

Свойство 1. В каждой строке $A_{f,g+1}$, $A_{f,g+2}$, $\ldots$,$A_{f,m+1}$ (f = 1, …, g) и в каждом столбце $A_{1,f}$,$A_{2,f}$,$\ldots$, $A_{f-1,f}$ $(f = g+1, \ldots, m+1)$ есть хотя бы одна отличная от нулевой матрица. В частности, ненулевой является матрица $A_{m,m+1}$.

Сказанное выше можно интерпретировать следующим образом. Так как матрица A соответствует графу G, то блок A_i, в силу своей неприводимости, будет соответствовать максимальному по включению сильно связному подграфу графа G (то есть, сильной компоненте графа). Построим граф сильно связных компонент с вершинами $\{v_j\}$ .. Его матрица смежности M (размерности $(m+1) \times (m+1)$) может быть получена из матрицы A следующим образом. Диагональному блоку A_i ставим в соответствие 0, а недиагональному A_{ij} ставится в соответствие 0, если $A_{ij} = 0$ и 1 в противном случае. Тогда свойство 1 означает, что в M нет нулевых строк (кроме последней) и нулевых столбцов. То есть, граф сильно связных компонент имеет следующую структуру. Вершины $1, \ldots, g$ – это источники, а $(m+1)$-я вершина является стоком. Каждая вершина связана хотя бы с одной вершиной с большим номером v_j, $j > i$. В каждую вершину v_i, $i = g+1, \ldots, m+1$, ведет хотя бы одна дуга. В частности, существует дуга (v_m, v_{m+1}).

Таким образом, из каждой сильной компоненты есть путь в сток. Учитывая, что внутри каждой компоненты есть пути между любыми парами вершин, получается, что условие $r(A) < 1$ эквивалентно свойству, что *из каждой вершины исходного графа G есть путь в какой-нибудь сток.* (Вполне естественное свойство, например, вентиляционной сети.)

Замечание 7. Сказанное выше можно интерпретировать также следующим образом: *каждая сильная компонента, являющаяся стоком графа компонент, содержит одну вершину.*

При этом процесс, заданный соотношениями (4), сходится к потоку, определяемому соотношениями (6), со скоростью геометрической прогрессии.

Трудоемкость вычисления предельного потока определяется сложностью построения обратной матрицы и равна $O(n^3)$.

Теорема 1. В случае произвольного вектора потенциалов q для стабилизации потока, определяемого соотношениями (4), достаточно, чтобы из каждой вершины графа G существовал путь в сток. В этом случае предельное состояние не зависит от начального потока и определяется соотношением (6).

4 Сходимость в случае нулевого вектора потенциалов

Полученные выше результаты справедливы для произвольного вектора потенциалов q. Рассмотрим частный случай, когда $q = 0$. Из выражения (5) следует, что в случае $q_i = 0, i \in V$, справедливы выражения

$$x_{ij}^{k+1} = a_{ij} p^0 A^k e^i, \; k = 0, 1, \ldots, \; (i,j) \in E. \tag{8}$$

Для анализа динамики изменения потока в данном случае необходимо исследовать поведение степеней матрицы A. Случай, когда в графе есть путь из каждой вершины в сток, был рассмотрен выше. Поэтому, далее в данном разделе предположим, что не из всех вершин графа существует путь в сток. Более того, можно считать, что в рассматриваемом графе стоков нет вообще. Действительно, запишем матрицу A в виде, указанном в замечании 4'. В предыдущем разделе представление (7) матрицы A соответствовало нумерации вершин графа от источников к стокам графа сильных компонент. Теперь будет удобнее нумеровать вершины от стоков к источникам. Тогда матрица A примет вид

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} A_1 & 0 & \vdots & 0 & & & & & \\ 0 & A_2 & \vdots & 0 & & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & & 0 & & \\ 0 & 0 & \vdots & A_g & & & & & \\ \hline A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & \cdots & A_{g+1,g} & A_{g+1} & & & & \\ A_{g+2,1} & A_{g+2,2} & \cdots & \cdots & A_{g+2,g+1} & A_{g+2} & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{m,m-1} & A_m & \\ A_{m+1,1} & A_{m+1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{m,m+1} & 0 \end{array}\right) \tag{9}$$

В данном представлении на диагонали, как и ранее, находятся квадратные неразложимые блоки, соответствующие сильным компонентам графа G. Верхний левый квадрат – это блочно-диагональная матрица, содержащая блоки, соответствующие стокам графа компонент, а в блочных строках $g+1,\dots,s$ хотя бы одна матрица (не стоящая на диагонали) является ненулевой.

Схематично матрицу A запишем в виде

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где B – это матрица, соответствующая верхнему левому квадрату в представлении (9).

Заметим, если в G есть стоки, то они также являются сильными компонентами графа, а значит, им соответствуют одномерные нулевые блоки в матрице B. То есть, если G содержит стоки $v_1,\dots,v_s$, то первые s строк матрицы A нулевые. Изобразить это можно следующим образом.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right)$$

Строки блока C_1 имеют те же номера, что и вершины, связанные дугами со стоками графа G. В случае, когда все сильные компоненты, являющиеся стоками в графе компонент, содержат по одному элементу ($B=0$), матрица B_1 в последнем представлении матрицы A будет отсутствовать. Последний случай не представляет интереса, т. к. в этом случае результирующий поток будет нулевым (замечание 7). Поэтому далее предполагаем, что существуют компоненты, содержащие более одной вершины и являющиеся стоками графа компонент.

При возведении матрицы A в степень k получим

$$A^k = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1^k & 0 \\ \hline D^{k-1}C_1 & Q_k & D^k \end{array}\right),$$

где $Q_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} D^j C_2 B_1^{k-j-1}$. Так как матрица D имеет блочно-треугольный вид, то $Spec(D) = \bigcup\limits_{i=g+1}^{m} Spec(A_i)$, где все матрицы A_i неразложимые и имеют спектральные радиусы меньше 1. Значит, $r(D) < 1$, откуда следует равенство $\lim\limits_{k\to\infty} D^k = 0$. Если существует предел последовательности $\{B_1^k,\ k = 1, \dots\}$ (и, соответственно, нормы степеней матрицы B_1 ограничены сверху некоторой константой K), то существует также предел последовательности $\{Q_k, k = 1, \dots\}$, равный Q_∞. Действительно,

$$\|Q_k\| \le \sum_{j=0}^{k-1} \|D\|^j \|C_2\| \|B_1\|^{k-j-1} \le K\|C_2\| \sum_{j=0}^{k-1} \|D\|^j = \frac{K\|C_2\|}{1-\|D\|}(1-\|D\|^k) \to \frac{K\|C_2\|}{1-\|D\|}$$

Ряд из норм сходится, значит, сходится и матричный ряд.

В дальнейшем мы убедимся, что возможна ситуация, когда степени B_1 (а значит и A) не имеют предела. Однако для некоторого h есть пределы подпоследовательностей вида $\{B_1^{r+kh}\}_{k\in N}$ $(r = 0, 1, \dots, h-1)$. Тогда приведенные выше рассуждения следует применить не к самой матрице A, а к A^h. В этом случае вместо D будет матрица D^h, C_2 следует заменить на $\sum\limits_{j=0}^{k-1} D^j C_2 B_1^{h-j-1}$, а B_1 на B_1^h

Итак, если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} B_1^k = B^\infty$, то существует и предел $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = A^\infty$. Найдем A^∞. Из равенства $AA^\infty = A^\infty$, следует

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1^\infty & 0 \\ \hline 0 & Q_\infty & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1^\infty & 0 \\ \hline 0 & C_2 B_1^\infty + DQ_\infty & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1^\infty & 0 \\ \hline 0 & Q_\infty & 0 \end{array}\right).$$

Значит, $Q_\infty = (E - D)^{-1} C_2 B_1^\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1^\infty & 0 \\ \hline 0 & (E-D)^{-1} C_2 B_1^\infty & 0 \end{array}\right). \tag{11}$$

Заметим, что предельное состояние (11) не зависит от матрицы C_1. Более того, при умножении этой предельной матрицы справа на вектор p^0, произведение не будет зависеть от компонент $p_1^0, \dots, p_s^0$ (они все будут умножены на 0). Поэтому, при поиске предельного потока можно не учитывать величины начальных суммарных потоков, направляемых в стоки, а также заранее приписать нулевые значения потокам по дугам, ведущим в стоки. Это значит, что стоки можно вообще удалить вместе с инцидентными им дугами и рассматривать редуцированный граф. При этом из вектора p^0 удалим координаты с номерами удаленных вершин. Если после удаления одноэлементных стоков, полученный граф компонент содержит новые стоки (уже неважно, одноэлементные или нет) – их опять можно удалить. Действительно, эта ситуация означает, что матрица смежности редуцированного графа имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} B_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D_1 & 0 \\ C_{22} & D_{21} & D_2 \end{array}\right).$$

Несложно показать, что

$$A^k = \left(\begin{array}{c|cc} B_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & D_1^k & 0 \\ C_{22}^{(k)} & D_{21}^{(k)} & D_2^k \end{array}\right),$$

где $C_{22}^{(k)} = \sum\limits_{j=0}^{k-1} D_2^j C_{22} B_1^{k-j-1}$, $D_{22}^{(k)} = \sum\limits_{j=0}^{k-1} D_2^j D_{21} D_2^{k-j-1}$. Если существует конечный предел степеней матрицы B_1, то существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} C_{22}^{(k)}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} D_{21}^{(k)} = 0$. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \left(\begin{array}{c|cc} B_1^\infty & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{(\infty)} & 0 & 0 \end{array}\right),$$

и этот предел не зависит от вида матриц D_1 и D_{21}. После умножения предельной матрицы на вектор p^0, результат не будет зависеть от компонент с номерами строк из матрицы D_1. Поэтому полученный в ходе редукции сток также можно удалить. Таким образом, обоснована следующая процедура.

Процедура редукции графа. Пусть заданы граф G_0 и вектор p^0. Обозначим через $K(G)$ граф компонент, соответствующий графу G. На каждой итерации $k+1, k = 0, 1, \ldots,$ в $K(G_k)$ удаляется один сток вместе с дугами, связывающими его с остальной сетью. Предположим, что выполнено k итераций. Каждая итерация состоит из следующих трех шагов.

Шаг 1. Найти вершину i, которая является стоком в графе $G_k = (V_k, E_k)$. Положить $G_{k+1} = (V(G_{k+1}), E(G_{k+1}))$, где $V(G_{k+1}) = V(G_k)\backslash\{i\}$, $E(G_{k+1}) = \{(m,l) | (m,l) \in E(G_k), l \neq i\}$. Построить вектор p_{k+1} из p_k, удалив i-ю координату. Если граф G_{k+1}, не содержит стоков, то перейти на шаг 2. В противном случае положить $k = k+1$ и перейти на шаг 1.

Шаг 2. Пусть в ходе выполнения процедуры получен граф G_k, и $K(G_k)$ содержит компоненту-сток H_j, не встречающуюся в $K(G_0)$. Тогда переходим на шаг 3. В противном случае процедура останавливается.

Шаг 3. Построить граф G_{k+1}, положив $V_{k+1} = V_k \backslash V(H_j)$, $E(G_{k+1}) = \{(m,l) | (m,l) \in E(G_k), l \notin V(H_j)\}$. Построить вектор p_{k+1}, удалив из p_k координаты с номерами из множества $V(H_j)$. Положить $k = k+1$ и перейти на шаг 2.

Приведем пример работы процедуры.

Пример 1. Пусть исходный граф представлен на рис. 1a. Кружки – это сильные компоненты, а черная точка – это вершина-сток. В результате первой итерации граф преобразуется в граф, показанный на рис. 1b. Вторая итерация приводит к графу на рис. 1c и третья – к графу на рис. 1d.

рис1.pcx

После выполнения приведенной выше процедуры из графа G будут удалены все стоки, а также сильные компоненты, соединенные со стоками путями. Удаляемые компоненты вектора p^0, как показано выше, не оказывают влияния на предельный поток. Таким образом, удобнее рассматривать не исходный граф, а редуцированный (не меняя, однако, величин a_{ij} и α_{ij}).

Замечание 8. Для вычисления предельного потока удобно работать с редуцированным графом. Получив предельный поток для редуцированного графа, несложно определить предельный поток в исходном графе, положив поток по удаленным (в ходе редукции) дугам равным нулю.

Таким образом, можно считать, что матрица A имеет вид (10) и не содержит нулевых строк. Сумма элементов в любой строке матрицы теперь может быть меньше единицы. Это означает, что рассматривается процесс, определенный соотношениями (4), на графе без стоков, когда $\sum\limits_{j\in O_i} a_{ij} \le 1$.

Итак, далее будем рассматривать графы без стоков. Пусть матрица A приведена к виду (9), схематично представленному выражением (10). Рассуждения, приведенные выше, позволяют сделать вывод, что если предел степеней матрицы B существует, то существует и предел степеней матрицы A

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{pmatrix} B^\infty & 0 \\ (E-D)^{-1}CB^\infty & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Так как $B = diag\{A_1,\ldots,A_g\}$, то $B^k = diag\{A_1^k,\ldots,A_g^k\}$ и предел степеней матрицы B существует вместе с пределами степеней всех матриц A_i. Эти матрицы неразложимы, их максимальное собственное число равно 1, но они не обязательно примитивны (могут быть и другие собственные числа, равные по модулю 1). Поэтому воспользоваться утверждением теоремы Перрона непосредственно не удается. Но если известен индекс импримитивности h_i (количество собственных чисел с максимальным модулем матрицы A_i), то матрица $A_i^{h_i}$ будет блочно-диагональной с примитивными неразложимыми блоками на диагонали. То есть предел $\lim\limits_{k\to\infty} A_i^{kh_i}$ существует. Значит, если взять h равным наименьшему общему кратному всех h_i, $i = 1,\ldots,g$, то будут существовать пределы $\lim\limits_{k\to\infty} B^{kh} = B^{h\infty}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} A^{kh} = A^{h\infty}$. Так как матрица соответствует сильно связному подграфу графа G, то h_i можно найти по теореме Романовского. Индекс импримитивности матрицы A_i равен наибольшему общему делителю длин контуров в соответствующей сильной компоненте. Таким образом, последовательность степеней матрицы A разбивается на h подпоследовательностей вида A^{r+kh}, $r = 0,\ldots,h$, с пределами $\tilde{A}^r = A^r A^{h\infty}$. Преобразования (4), таким образом, приводят к h предельным состояниям $\tilde{X}^r$, определяемым соотношениями (8). Нетрудно видеть, что под действием преобразования (4) состояние $\tilde{X}^r$ переходит в состояние $\tilde{X}^{r+1}$, так что в качестве равновесного состояния можно взять среднее арифметическое $\frac{1}{h}\sum\limits_{i=0}^{h-1}\tilde{X}^i$.

Осталось найти выражения для пределов $\lim\limits_{k\to\infty} A_i^{kh_i}$. Воспользуемся теоремой Перрона. Так как наибольший общий делитель длин контуров в сильной компоненте G_i, соответствующей матрице A_i, равен h_i, то G_i имеет структуру, показанную на рис. 2 (для $h_i = 3$).

рис2.pcx

Все вершины G_i разбиваются на h_i независимых множеств $V_1^i,\ldots,V_{h_i}^i$. Дуги направлены из вершин множества V_j^i в вершины множества $V_{j_1}^i$. Значит, можно так перенумеровать вершины G_i, что матрица A_i примет следующий блочный вид:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & B_1^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2^i & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ B_{h_i}^i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$A_i^{h_i} = \begin{pmatrix} 0 & B_1^i B_2^i \dots B_{h_i}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2^i \dots B_{h_i}^i B_1^i & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ B_{h_i}^i B_1^i \dots B_{h_i-1}^i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где на диагонали расположены примитивные неприводимые квадратные блоки. Обозначим их через A'_j, $j = 1, \dots, h_i$. Очевидно, матрица $\lim\limits_{k\to\infty} A_i^{kh_i}$ также имеет блочно-диагональный вид. Строчные суммы, как матрицы A_i, так и любой ее степени, равны 1. Поэтому, правым собственным вектором матрицы A'_j, соответствующим собственному числу 1, является вектор, составленный из 1, размерности $|V_j^i|$. Для применения теоремы Перрона требуется найти также левый собственный вектор, соответствующий собственному числу 1. В некоторых случаях, сделать это довольно просто – если все матрицы A'_j дважды стохастические (то есть, как строчные, так и столбцовые суммы равны 1).

$$\sum_{j\in O_r} a_{rj} = \sum_{j\in I_r \bigcap G_k} a_{jr}, \; r \in V(G_k). \tag{13}$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} A_i^{kh_i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|V_1^i|} I_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{|V_{h_i}^i|} I_{h_i} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где I_j это квадратная матрица размерности $|V_j^i|$, составленная из единиц.

Когда же (13) не выполняется, необходимо искать левые собственные векторы для матриц $B_1^i B_2^i \dots B_{h_i}^i$, $B_2^i \dots B_{h_i}^i B_1^i$, $B_{h_i}^i B_1^i \dots B_{h_i-1}^i$, соответствующие собственному числу 1 и пользоваться теоремой Перрона. Если эти векторы (с учетом нормировки, указанной в теореме Перрона: сумма компонент каждого вектора равна 1) есть $v_1^i, \dots, v_{h_i}^i$ соответственно, то

$$\lim_{k\to\infty} A_i^{kh_i} = \Delta^i = \begin{pmatrix} \Delta_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_{h_i}^i \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где Δ_j^i квадратная матрица размерности $|V_j^i|$, все строки которой одинаковы и равны v_j^i.

Таким образом, процесс, определяемый рекуррентными соотношениями (8), сходится к h циклически сменяющим друг друга предельным состояниям,

$$x_{ij}^{(r+1)+h\infty} = a_{ij} p^0 A^{r+h\infty} e^i, \; r = 0, \dots, h-1, \; (i,j) \in E, \tag{16}$$

а при выполнении условия (13) можно явно указать значения пределов. Предел вида $A^{h\infty}$ легко получается из (12) и (15), а пределы вида $A^{r+h\infty}$, $r = 0, \dots, h$, получаются из умножением на A^r.

Теорема 2. В случае $q = 0$ процесс, заданный соотношениями (4), сходится всегда. В пределе получается h циклически переходящих друг в друга состояния (h равно наименьшему общему кратному наибольших общих делителей длин контуров в стоках графа компонент, соответствующего G). Когда выполнены соотношения (13), то, используя выражения (12) и (14), можно выписать предельные значения потока явно.

5 Заключение

В работе предложена модель процесса изменения потока в ориентированной сети с неограниченными пропускными способностями дуг. Сеть содержит вершины-источники известной мощности и вершины-стоки неограниченной мощности. Вершины, которые не являются стоками, распределяют пришедший в них поток по исходящим дугам в заданных (не зависящих от времени) пропорциях.

Найдены условия существования сбалансированного потока, который не меняется со временем и для которого выполнены условия сохранения потока. В частности, показано, что существование пути из каждой вершины в некоторый сток является достаточным условием сходимости процесса, и предельный поток в этом случае является единственным и не зависит от начального потока в сети. Предложены формулы вычисления предельных и равновесных состояний, трудоемкость вычисления которых равна $O(n^3)$.

Показано, что в случае, когда не из каждой вершины существует путь в некоторый сток, циклические предельные состояния существуют при нулевом векторе потенциалов вершин.

В случае стабилизации потока, сходимость происходит со скоростью геометрической прогрессии. Значит, сбалансированный предельный поток может быть найден достаточно быстро с любой наперед заданной точностью.

Список литературы

[1] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1966.

[2] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.

[3] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. *Алгоритмы: построение и анализ.* Центр непрерывного математического образования, 2000.

[4] Астафьев Н.Н. *Оптимизационный и маргинальный анализ балансовой модели Леонтьева.* Оптимизация, управление, интеллект, 2005. - 1(9).-с. 28-35.

[5] Годунов С.К. *Современные аспекты линейной алгебры.* Новосибирск: Научная книга, 1997.