

О ПЛОТНОСТИ ПОКРЫТИЯ ПОЛОСЫ ОДИНАКОВЫМИ СЕКТОРАМИ *)

А. И. Ерзин^{1,2}, Н. А. Шабельникова¹

¹Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

²Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
e-mail: adilerzin@math.nsc.ru, kriagell@gmail.com

Аннотация. Исследуется задача построения наименее плотного регулярного покрытия полосы с использованием одинаковых секторов, которая возникает при проектировании сенсорных сетей. Предложены три модели покрытия, и проведён их сравнительный анализ, что позволило, в частности, получить оценку сверху на минимальную плотность покрытия полосы секторами. Табл. 1, ил. 6, библиогр. 21.

Ключевые слова: регулярное покрытие, минимизация плотности, сенсорная сеть.

Введение

Задача, исследуемая в данной работе, возникает в контексте проектирования и анализа энергоэффективности беспроводных сенсорных сетей (а также других распределённых сетей сбора и передачи информации). Беспроводная сенсорная сеть (БСС) состоит из множества сенсоров, которые размещены в области мониторинга. Сенсор представляет собой автономное интеллектуальное устройство, осуществляющее сбор, обработку и передачу информации с использованием беспроводной связи. В БСС сенсор, как правило, имеет ограниченный запас невозобновляемой энергии. Наиболее важным критерием эффективности сети является продолжительность её функционирования (время жизни БСС) [8, 9, 13, 15, 18–20]. Считается [4, 8, 13, 21], что потери энергии сенсора на мониторинг пропорциональны площади мониторинга (покрытия),

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13–07–00139), а также Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 0115РК00550).

поэтому задача энергоэффективного мониторинга сводится к задаче построения покрытия наименьшей плотности, где под плотностью покрытия плоской области площадью S_0 понимается отношение суммы площадей элементов покрытия к S_0 . Форма области покрытия сенсора зависит как от назначения, так и от технических характеристик, а также от значений параметров устройства и до недавнего времени рассматривалась, в основном, в виде круга [1, 2, 4, 6, 8, 16, 18–20]. Однако на практике сенсор часто покрывает область, отличную от круга, поэтому в научной литературе всё чаще стали встречаться модели покрытия не только кругами, но и эллипсами, и секторами. Например, в [3, 10] исследовались регулярные покрытия плоскости и полосы эллипсами. В существующих публикациях зона мониторинга в виде сектора рассматривалась, например, при барьерном мониторинге [17]. В [14] представлен обзор трёхмерных и двумерных направленных устройств, что в последнем случае даёт область покрытия в виде сектора. В [7] проведён анализ задачи максимизации количества покрытых объектов заданным множеством датчиков. В [5, 11, 12] предложены новые модели покрытия секторами, а также рассмотрена задача минимизации количества одинаковых секторов на единицу покрытой площади в случае, когда вершины секторов, покрывающих одну плитку, находятся в одной точке.

Из-за сложности задач построения оптимальных покрытий плоских областей различными фигурами в литературе рассматриваются так называемые регулярные покрытия [2–5, 10–12, 18, 21]. В регулярном покрытии область мониторинга разбивается на одинаковые многоугольники (плитки) и каждая плитка покрывается одинаково. Регулярное покрытие области позволяет при оценке плотности ограничиться анализом покрытия только одной плитки.

В настоящей работе рассматривается задача построения наименее плотного покрытия полосы одинаковыми секторами. Данные исследования представляют интерес при анализе энергоэффективности мониторинга протяжённых объектов, например, дорог, трубопроводов, периметров объектов, государственных границ и т. д. Сектор в этом случае представляет собой, например, плоское сечение области обзора видеокамеры (конуса).

1. Постановка задачи

Определение 1. Совокупность секторов C назовём *покрытием* плоской области S , если каждая точка из S принадлежит хотя бы одному сектору из C .

Определение 2. Плотность покрытия C — это отношение суммы площадей секторов покрытия к площади области S .

Очевидно, что плотность не может быть меньше единицы и отклонение её значения от единицы характеризует эффективность покрытия. В регулярном покрытии полоса разбивается на равные многоугольники (плитки) и все плитки покрываются одинаково. В работе рассматривается следующая

Задача. Дана полоса, ширину которой без ограничения общности положим равной 1. Имеется неограниченное множество одинаковых секторов (α, R) , где R — радиус, α — угол ($0 < \alpha \leq \pi/2$). Требуется найти покрытие полосы C секторами (α, R) , плотность которого $D(\alpha, R)$ минимальна, т. е. решить задачу

$$D(\alpha, R) \rightarrow \min_C \quad (1)$$

для произвольных допустимых α и R .

2. Модели покрытия

В работе в качестве приближённых решений задачи (1) предлагается рассмотреть три покрытия, которые авторам кажутся наиболее перспективными и которые могут быть использованы в дальнейшем для анализа других более сложных покрытий. В частности, из k секторов (γ, R) можно составить один сектор $(k\gamma, R)$. Зная оптимальное покрытие секторами (α, R) для произвольных параметров, можно подобрать оптимальное значение k .

2.1. Модель М1. Пусть $0.5 < R \sin(\alpha) \leq 1$. Определим пару секторов внутри полосы, одни стороны которых лежат на противоположных границах полосы, а другие касаются друг друга. Пара секторов покрывает прямоугольник $GBCF$ (рис. 1), который является частью полосы. Покрытие полосы М1 строится такими парами секторов, как показано на рис. 1. В этом регулярном покрытии плиткой является прямоугольник $GBCF$, высота которого совпадает с шириной полосы и равна 1. При этом полоса разбивается на одинаковые плитки, и все плитки покрываются единообразно парой секторов.

Лемма 1. Плотность покрытия М1 определяется формулой

$$D_1(\alpha, R) = \frac{\alpha R^2 \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - (1 - R \sin \alpha)^2} \sin \alpha - (1 - R \sin \alpha) \cos \alpha}.$$

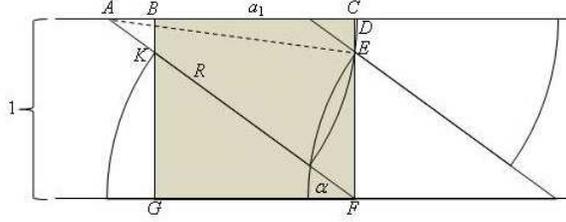


Рис. 1. Модель регулярного покрытия М1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим длину горизонтальной стороны плитки (прямоугольника) $a_1 = |BC| = |AC| - |AB|$. Заметим, что $|EF| = R \sin \alpha$, $|EC| = 1 - |EF| = 1 - R \sin \alpha$. Из треугольника ABK имеем $|AB| = \frac{1 - R \sin \alpha}{\tan \alpha}$, а из AEC — $|AC| = \sqrt{R^2 - (1 - R \sin \alpha)^2}$. Таким образом,

$$a_1 = \sqrt{R^2 - (1 - R \sin \alpha)^2} - \frac{1 - R \sin \alpha}{\tan \alpha}.$$

Тогда плотность покрытия М1 равна

$$D_1(\alpha, R) = \frac{\alpha R^2}{a_1} = \frac{\alpha R^2 \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - (1 - R \sin \alpha)^2} \sin \alpha - (1 - R \sin \alpha) \cos \alpha}.$$

Лемма 1 доказана.

2.2. Модель М2. Пусть $R \sin(\alpha) \geq 1$. Рассмотрим покрытие, представленное на рис. 2. Обозначим его через М2. Модель покрытия М2 имеет много общего с моделью М1. Одна сторона каждой пары секторов лежит на границе полосы, и секторы одной пары не пересекаются, но часть сектора выходит за пределы полосы (рис. 2).

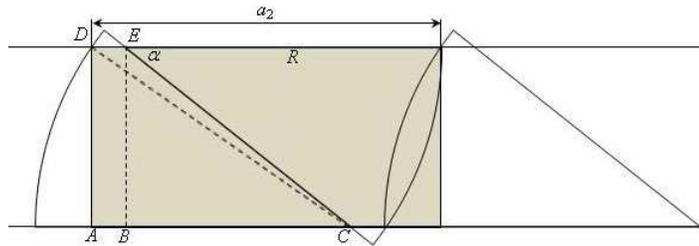


Рис. 2. Модель регулярного покрытия М2

Лемма 2. Плотность покрытия М2 вычисляется по формуле

$$D_2(\alpha, R) = \frac{\alpha R^2 \sin \alpha}{(\sqrt{R^2 - 1} + R) \sin \alpha - \cos \alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим горизонтальную сторону плитки (прямоугольника) $a_2 = R + |AB|$, где $|AB| = |AC| - |BC|$. Из треугольника ADC имеем $|AC| = \sqrt{R^2 - 1}$, а из треугольника BEC получаем $|BC| = 1/\tan \alpha$. Таким образом,

$$a_2 = R + \sqrt{R^2 - 1} - \frac{1}{\tan \alpha},$$

а плотность покрытия M_2 равна

$$D_2(\alpha, R) = \frac{\alpha R^2}{a_2} = \frac{\alpha R^2 \sin \alpha}{(\sqrt{R^2 - 1} + R) \sin \alpha - \cos \alpha}.$$

Лемма 2 доказана.

2.3. Модель М3. Пусть ни одна из сторон сектора не лежит на границе полосы и выполняется условие $R \cos(\alpha/2) \geq 1$. Покрытие, представленное на рис. 3, обозначим через M_3 . В данном покрытии каждый из секторов опирается хотя бы одним концом дуги на границу полосы и ось сектора находится под некоторым углом к границе полосы, а касающиеся секторы направлены в противоположные стороны.

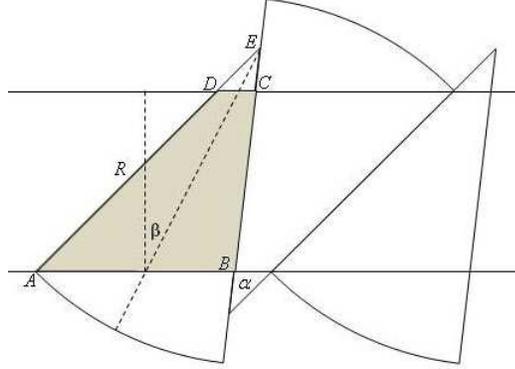


Рис. 3. Модель регулярного покрытия M_3

Введём параметр β — угол между осью сектора и прямой, перпендикулярной границам полосы (рис. 3). Тогда $0 \leq \beta \leq \pi/2 - \alpha/2 - \arcsin(1/R)$.

В отличие от моделей M_1 и M_2 в покрытии M_3 для упрощения вычислений рассмотрим часть плитки в виде трапеции $ABCD$, которая отсекается сектором от полосы. Плотность покрытия M_3 зависит от трёх параметров, обозначим её через $D_3(\alpha, R, \beta)$.

Лемма 3. Плотность покрытия МЗ задаётся формулой

$$D_3(\alpha, R, \beta) = \frac{\alpha R^2 \cos(\beta - \alpha/2) \cos(\beta + \alpha/2)}{\sin \alpha (2R \cos(\beta + \alpha/2) - 1)}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что покрытие МЗ является оптимальным в классе покрытий с непересекающимися секторами.

Для того чтобы секторы, покрывающие полосу, не пересекались, необходимо, чтобы обе стороны каждого сектора пересекали всю полосу. Иначе внутрь полосы попадёт дуга, и тогда пересечение секторов неизбежно. Далее предположим, что ни одна из точек дуги сектора не лежит на границе. Тогда осуществим перенос сектора, как показано на рис. 4, вдоль одной из сторон сектора до тех пор, пока, по крайней мере, один из концов дуги не коснётся границы. При этом очевидно, что сектор покрывает большую часть полосы.

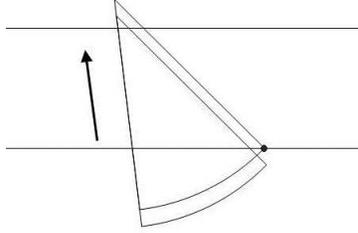


Рис. 4. Перенос сектора

Для нахождения плотности покрытия МЗ вычислим площадь трапеции $ABCD$: $S_3 = \frac{|DC| + |AB|}{2}$. По теореме синусов для треугольника ABE (см. рис. 3) имеем $|AB| = \frac{\sin \alpha}{\cos(\beta - \alpha/2)} R$. Так как треугольники DEC и AEB подобны, получаем $|DC| = |AB| \left(1 - \frac{1}{R \cos(\beta + \alpha/2)}\right)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_3 &= 0.5 |AB| \left(2 - \frac{1}{R \cos(\beta + \alpha/2)}\right) \\ &= 0.5 \frac{\sin \alpha}{\cos(\beta - \alpha/2)} \left(2 - \frac{1}{R \cos(\beta + \alpha/2)}\right), \end{aligned}$$

а плотность покрытия МЗ равна

$$D_3(\alpha, R, \beta) = \frac{\alpha R^2}{2S_3} = \frac{\alpha R^2 \cos(\beta - \alpha/2) \cos(\beta + \alpha/2)}{\sin \alpha (2R \cos(\beta + \alpha/2) - 1)}.$$

Лемма 3 доказана.

3. Сравнительный анализ моделей М1, М2 и М3

Цели данного раздела: (а) выяснить, какая из трёх предложенных моделей покрытия М1, М2, М3 имеет наименьшую плотность для произвольных значений α и R , (б) для заданного параметра α определить модель покрытия и найти оптимальное значение R , при котором плотность принимает наименьшее значение, (с) найти оценку сверху на плотность оптимального (наименее плотного) покрытия полосы одинаковыми секторами.

Поскольку аналитический анализ плотностей оказался вычислительно сложной задачей, следующие результаты получены численно с помощью ЭВМ.

Пусть $\alpha_1 \approx 29.6^\circ$, $\alpha_2 \approx 45.2^\circ$, $\alpha_3 \approx 60.1^\circ$.

Определение 3. Под *лучшим покрытием* будем понимать покрытие с наименьшей плотностью среди предложенных моделей М1, М2, М3.

Утверждение 1. Пусть $0 < \alpha \leq \pi/2$. Тогда существуют $R_i = R_i(\alpha) \geq 0.5$, $i = \overline{1,4}$, $R_1 \leq R_2 \leq R_3 \leq R_4$, такие, что справедливы следующие утверждения.

(i) При $\alpha \in (0, \alpha_1]$ лучшим покрытием является М3, если $R \in [R_1, R_2]$, М1, если $R \in (R_2, R_3]$, и М2, если $R \in (R_3, \infty)$.

(ii) При $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2]$ лучшим покрытием является М1, если $R \in [R_1, R_2] \cup (R_3, R_4]$, М3, если $R \in (R_2, R_3]$, и М2, если $R \in (R_4, \infty)$.

(iii) При $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3]$ лучшим покрытием является М1, если $R \in [R_1, R_2]$, и М2, если $R \in (R_2, \infty)$.

(iv) При $\alpha \in (\alpha_3, \pi/2]$ лучшим покрытием является М1, если $R \in [R_1, R_2]$, М2, если $R \in (R_2, R_3]$, и М3, если $R \in (R_3, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим равномерную сетку по переменным α и R . В каждом узле сетки вычислим значения плотностей $D_1(\alpha, R)$, $D_2(\alpha, R)$, $D_3(\alpha, R, \beta)$ и выберем среди них наименьшее. Соответствующая этому значению модель покрытия полосы будет наилучшей среди моделей М1, М2, М3.

Введём следующие обозначения: h_α, h_β, h_R — величина шага по переменным α, β и R соответственно, R_{\max} — максимально возможное значение параметра R . Для модели М3 значение параметра β выбирается оптимально из множества $\{kh_\beta \mid kh_\beta \leq \pi/2 - \alpha/2 - \arcsin 1/R, k = 0, 1, 2, \dots\}$ для заданных значений α, R . Расчёты производились с помощью пакета Scilab [<http://www.scilab.org>].

На рис. 5 указаны зоны предпочтения каждой модели покрытия. При разных значениях областей допустимости параметров сектора будут по-

лучаться разные зоны, но характер рисунка не изменится. Изображение на рис. 5 получено с использованием следующих параметров:

$$R_{\max} = 5, \quad h_R = 0.02, \quad h_\alpha = 0.25^\circ, \quad h_\beta = 0.125^\circ.$$

Пункты утверждения описывают области, представленные на рис. 5. Утверждение 1 доказано.

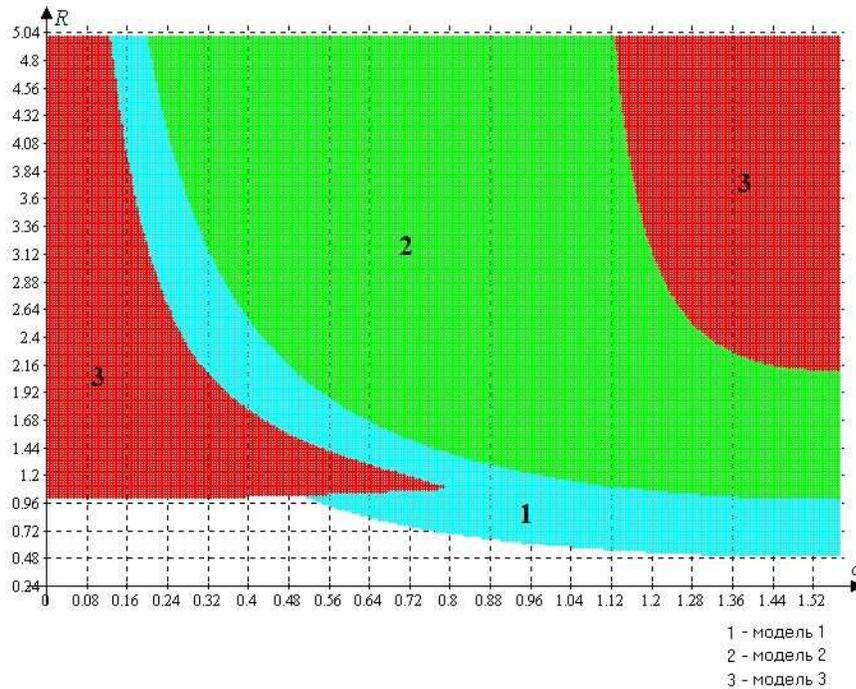


Рис. 5. Области предпочтения моделей покрытия M1, M2, M3.

Замечание 1. Очевидно, что при $\alpha \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ плотность покрытия стремится к единице, так как в случае $R \sin \alpha = 1$ плотности моделей M1 и M2 совпадают: $D_1(\alpha, R) = D_2(\alpha, R) = \frac{\alpha}{\sin \alpha}$. Однако на практике параметры сектора зачастую ограничены. Поэтому далее предположим, что $\alpha \geq 1^\circ$.

Утверждение 2. Оптимальное покрытие полосы одинаковыми секторами при $\alpha \in [\pi/180, \pi/2]$ имеет плотность не более 1.000051.

Доказательство. Пусть $R \geq 0.5$. Для доказательства утверждения достаточно указать допустимое покрытие, плотность которого не превосходит 1.000051. В ходе доказательства утверждения 1 для модели M3

для каждой допустимой пары (α, R) было найдено оптимальное значение угла $\beta(\alpha, R) = \beta^*(\alpha, R)$, при котором значение плотности D_3 минимально. Далее для каждого фиксированного значения α найдём оптимальное значение $R(\alpha) = R^*(\alpha)$, при котором

$$D(\alpha) = \min\{D_1(\alpha, R^*(\alpha)), D_2(\alpha, R^*(\alpha)), D_3(\alpha, R^*(\alpha), \beta^*(\alpha, R^*))\}.$$

На рис. 6 представлена зависимость плотности $D(\alpha)$ от угла α при оптимально выбранном R . Наименьшее значение представленной функции не превосходит 1.000051. При этом $\alpha \approx 1^\circ$, $R \approx 57.25$ и используется модель покрытия M1. Утверждение 2 доказано.

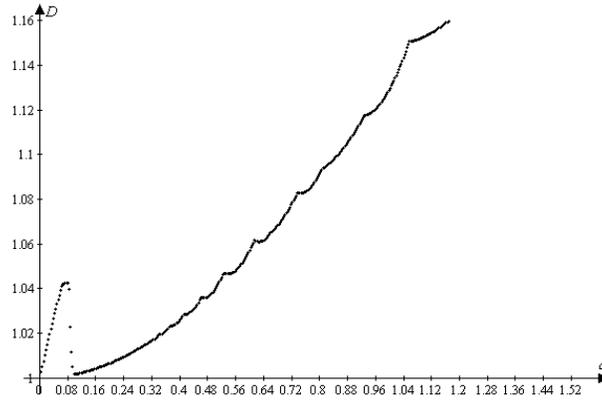


Рис. 6. График функции плотности $D(\alpha)$.

Замечание 2. Вычисления, приведённые в доказательстве утверждения 2, позволяют определить минимальную плотность покрытия также в случае, когда α изменяется в произвольном заданном промежутке $[\alpha', \alpha''] \subseteq (0, \pi/2]$.

Ниже приведена табл. 1 наименьших значений плотности $D(\alpha)$ для некоторых значений α (в градусах) с указанием оптимального значения радиуса $R^*(\alpha)$ и соответствующей лучшей модели покрытия.

Т а б л и ц а 1

Значения плотности в зависимости от α и R

α	0.4	1	10	20	30	45	60	90
$R^*(\alpha)$	1.25	57.25	5.75	3	2.25	1.25	1	1.25
$D(\alpha)$	1.00517	1.00005	1.00507	1.01968	1.04626	1.08746	1.14618	1.22718
Модель	M3	M1	M1	M2	M2	M1	M1	M2

Заключение

В данной работе рассмотрена задача построения наименее плотного покрытия полосы одинаковыми секторами с углом сектора $\alpha \in (0, \pi/2]$. Предложены три модели регулярного покрытия, и проведён их сравнительный анализ. Получена оценка сверху на минимальную плотность покрытия полосы секторами.

Как видно из табл. 1, при покрытии полосы секторами плотность покрытия в большинстве случаев существенно меньше, чем при покрытии полосы кругами [2] или эллипсами [3]. Напомним, что минимальная плотность покрытия полосы одинаковыми кругами и одинаковыми эллипсами не менее 1.2039.

В дальнейшем мы планируем исследовать задачу минимизации плотности покрытия полосы одинаковыми секторами с углом $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, а также рассмотреть задачу минимизации количества секторов на единицу длины полосы. Последняя задача имеет много общего с рассмотренной, но не совпадает с ней полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алдын-оол Т. А., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Покрытие плоской области случайно распределёнными сенсорами // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 4. С. 7–25.
2. Астраков С. Н., Ерзин А. И. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяжённых объектов // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 26–34.
3. Астраков С. Н., Ерзин А. И. Сенсорные сети и покрытие полосы эллипсами // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 2. С. 3–11.
4. Астраков С. Н., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 3. С. 3–19.
5. Ерзин А. И. Сенсорные сети и наименее плотные покрытия // Прикл. математика и фундамент. информатика. 2014. № 1. С. 89–97.
6. Тот Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958. 365 с.
7. Ai J., Abouzeid A. A. Coverage by directional sensors in randomly deployed wireless sensor networks // J. Comb. Optim. 2006. Vol. 11, No. 1. P. 21–41.
8. Cardei M., Wu J., Lu M. Improving network lifetime using sensors with adjustable sensing ranges // Int. J. Sens. Netw. 2006. Vol. 1, No. 1/2. P. 41–49.
9. Deshpande N., Shaligram A. Energy saving in WSN with directed connectivity // Wireless Sens. Netw. 2013. Vol. 5, No. 6. P. 121–126.

10. **Erzin A. I., Astrakov S. N.** Covering a plane with ellipses // Optimization. 2013. Vol. 62, No. 10. P. 1357–1366.
11. **Erzin A., Shabelnikova N.** Optimal regular covering of the plane with equal sectors // Proc. 20th Conf. of the Int. Fed. Oper. Res. Soc. (IFORS 2014) (Barcelona, Spain, July 13–18, 2014). Barcelona: IFORS, 2014. P. 69.
12. **Erzin A. I., Shabelnikova N. A.** Covering a plane with equal sectors // Proc. V Int. Conf. “Optimization and applications” (OPTIMA–2014), (Petrolac, Montenegro, Sept. 28 – Oct. 4, 2014). Moscow: VC RAN, 2014. P. 64–65.
13. **Fan G., Jin S.** Coverage problem in wireless sensor network: a survey // J. Netw. 2010. Vol. 5, No. 9. P. 1033–1040.
14. **Guvensan M. A., Yavuz A. G.** On coverage issues in directional sensor networks: A survey // Ad Hoc Netw. 2011. Vol. 9, No. 7. P. 1238–1255.
15. **Han X., Cao X., Lloyd E. L., Shen Ch.-Ch.** Deploying directional sensor networks with guaranteed connectivity and coverage // 5th Ann. IEEE Commun. Soc. Conf. Sensor, Mesh and Ad Hoc Communications and Networks (San Francisco, USA, June 16–20, 2008). Piscataway, USA: IEEE, 2008. P. 153–160.
16. **Ismailescu D., Kim B.** Packing and covering with centrally symmetric convex disks // Discrete Comput. Geom. 2014. Vol. 51, No. 2. P. 495–508.
17. **Liu L., Zhang X., Ma H.** Exposure-path prevention in directional sensor networks using sector model based percolation // IEEE Int. Conf. Communications (Dresden, June 14–18, 2009). Piscataway: IEEE, 2009. P. 274–278.
18. **Nguyen N. D., Zalyubovskiy V. V., Ha M. Th., Le T. D., Choo H.** Energy-efficient models for coverage problem in sensor networks with adjustable ranges // Ad Hoc. Sens. Netw. 2012. Vol. 16, No. 1–3. P. 1–28.
19. **Sengupta S., Das S., Nasir M. D., Panigrahi B. K.** Multi-objective node deployment in WSNs: In search of an optimal trade-off among coverage, lifetime, energy consumption, and connectivity // Eng. Appl. Artif. Intell. 2013. Vol. 26, No. 1. P. 405–416.
20. **Wang W., Srinivasan V., Wang B., Chua K.-Ch.** Coverage for target localization in wireless sensor networks // IEEE Trans. Wireless Communications. 2008. Vol. 7, No. 2. P. 667–676.
21. **Zalyubovskiy V. V., Erzin A. I., Astrakov S. N., Choo H.** Energy-efficient area coverage by sensors with adjustable ranges // Sensors. 2009. Vol. 9, No. 4. P. 2446–2460.

*Ерзин Адиль Ильясович,
Шабельникова Наталья Андреевна*

Статья поступила
12 февраля 2015 г.
Исправленный вариант —
13 мая 2015 г.

DISKRETNYYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
July–August 2015. Volume 22, No. 4. P. 21–34

UDC 519.7

DOI: 10.17377/dai0.2015.22.475

ABOUT DENSITY OF A COVERING OF A STRIP WITH IDENTICAL
SECTORS

A. I. Erzin^{1,2}, N. A. Shabelnikova¹

¹Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptuyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University,
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia
e-mail: adilerzin@math.nsc.ru, kriagell@gmail.com

Abstract. We study the problem of constructing a regular covering of a strip of the least density with the identical sectors that arises in design of wireless sensor networks. Three coverage models are proposed and the comparative analysis was performed that allowed us to obtain, in particular, an upper bound on the minimum density of a covering of a strip with sectors. Tab. 1, ill. 6, bibliogr. 21.

Keywords: regular coverage, minimization of density, sensor networks.

REFERENCES

1. T. A. Aldyn-ool, A. I. Erzin, and V. V. Zalyubovskiy, The coverage of a planar region by randomly deployed sensors, *Vestn. NGU, Ser. Mat., Mekh., Inform.*, **10**, No. 4, 7–25, 2010.
2. S. N. Astrakov and A. I. Erzin, Construction of efficient coverage models in the monitoring of extended objects, *Vychisl. Tekhnol.*, **17**, No. 1, 26–34, 2012.
3. S. N. Astrakov and A. I. Erzin, Sensor networks and strip covering with ellipses, *Vychisl. Tekhnol.*, **18**, No. 2, 3–11, 2013.
4. S. N. Astrakov, A. I. Erzin, and V. V. Zalyubovskiy, Sensor networks and covering of plane by discs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **16**, No. 3, 3–19, 2009.
5. A. I. Erzin, Sensor networks and the least dense covers, *Prikl. Mat. Fundam. Inform.*, No. 1, 89–97, 2014.
6. L. F. Toth, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verl., Berlin, 1953. Translated under the title *Raspolozheniya na ploskosti, na sfere i v prostranstve*, Gos. Izdatel'stvo Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1958.
7. J. Ai and A. A. Abouzeid, Coverage by directional sensors in randomly deployed wireless sensor networks, *J. Comb. Optim.*, **11**, No. 1, 21–41, 2006.

8. **M. Cardei, J. Wu, and M. Lu**, Improving network lifetime using sensors with adjustable sensing ranges, *Int. J. Sens. Netw.*, **1**, No. 1/2, 41–49, 2006.
9. **N. Deshpande and A. Shaligram**, Energy saving in WSN with directed connectivity, *Wirel. Sens. Netw.*, **5**, No. 6, 121–126, 2013.
10. **A. I. Erzin and S. N. Astrakov**, Covering a plane with ellipses, *Optimization*, **62**, No. 10, 1357–1366, 2013.
11. **A. I. Erzin and N. A. Shabelnikova**, Optimal regular covering of the plane with equal sectors, in *Proc. 20th Conf. Int. Fed. Oper. Res. Soc., Barcelona, Spain, July 13–18, 2014*, p. 69, IFORS, Barcelona, 2014.
12. **A. I. Erzin and N. A. Shabelnikova**, Covering a plane with equal sectors, in *Proc. V Int. Conf. Optim. Methods Appl. “Optimization and applications”, Petrovac, Montenegro, Sept. 28 – Oct. 4, 2014*, pp. 64–65, Dorodnicyn Comput. Cent. RAS, Moscow, 2014.
13. **G. Fan and S. Jin**, Coverage problem in wireless sensor network: A survey, *J. Netw.*, **5**, No. 9, 1033–1040, 2010.
14. **M. A. Guvensan and A. G. Yavuz**, On coverage issues in directional sensor networks: A survey, *Ad Hoc Netw.*, **9**, No. 7, 1238–1255, 2011.
15. **X. Han, X. Cao, E. L. Lloyd, and Ch.-Ch. Shen**, Deploying directional sensor networks with guaranteed connectivity and coverage, in *5th Annual IEEE Commun. Soc. Conf. Sens., Mesh and Ad Hoc Commun. Netw., San Francisco, USA, June 16–20, 2008*, pp. 153–160, IEEE eXpress Conf. Publ., Piscataway, 2008.
16. **D. Ismailescu and B. Kim**, Packing and covering with centrally symmetric convex disks, *Discrete Comput. Geom.*, **51**, No. 2, 495–508, 2014.
17. **L. Liu, X. Zhang, and H. Ma**, Exposure-path prevention in directional sensor networks using sector model based percolation, in *IEEE Int. Conf. on Commun., Dresden, Germany, June 14–18, 2009*, pp. 274–278, IEEE eXpress Conf. Publ., Piscataway, 2009.
18. **N. D. Nguyen, V. V. Zalyubovskiy, M. Th. Ha, T. D. Le, and H. Choo**, Energy-efficient models for coverage problem in sensor networks with adjustable ranges, *Ad Hoc Sens. Wirel. Netw.*, **16**, No. 1–3, 1–28, 2012.
19. **S. Sengupta, S. Das, M. D. Nasir, and B. K. Panigrahi**, Multi-objective node deployment in WSNs: In search of an optimal trade-off among coverage, lifetime, energy consumption, and connectivity, *Eng. Appl. Artif. Intell.*, **26**, No. 1, 405–416, 2013.
20. **W. Wang, V. Srinivasan, B. Wang, and K.-Ch. Chua**, Coverage for target localization in wireless sensor networks, *IEEE Trans. Wirel. Commun.*, **7**, No. 2, 667–676, 2008.

21. **V. V. Zalyubovskiy, A. I. Erzin, S. N. Astrakov, and H. Choo**, Energy-efficient area coverage by sensors with adjustable ranges, *Sens.*, **9**, No. 4, 2446–2460, 2009.

Adil I. Erzin,
Natalia A. Shabelnikova

Received
12 February 2015

Revised
13 May 2015