ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(конспект спецкурса)

Часть I

Новосибирск • 2007

Предисловие

Данное пособие представляет собой конспект спецкурса, читавшегося для студентов 4–6 курсов ММФ НГУ и аспирантов, специализирующихся по уравнениям в частных производных, анализу, интегральной геометрии и другим близким областям.

Псевдодифференциальные операторы (ПДО) и интегральные операторы Фурье (ИОФ) являются обобщением дифференциальных операторов в частных производных. Теория таких операторов активно развивается с 60-х годов прошлого века. Целый ряд результатов современной теории дифференциальных уравнений может быть получена только в рамках теории ПДО и ИОФ. В некоторых случаях применение теории ПДО и ИОФ дает более простые доказательства по сравнению с классическими методами. Ознакомление с теорией ПДО и ИОФ может быть полезно в виду того, что оно дает общий, целостный подход ко многим вопросам анализа.

Теория ПДО и ИФО широко представлена в монографической литературе (см. список в конце). По большей части указанные книги дают фундаментальное изложение предмета и рассчитаны на подготовленного читателя. Цель данного пособия — выделить из большого количества материала самое необходимое и ознакомить читателя/слушателя с основами теории на языке и в объеме доступном студентам 4–6 курсов.

При написании пособия автор попытался сохранить неформальную специфику устной речи. Текст условно делится на формальную и неформальную части; последняя набрана наклонным шрифтом и с дополнительным отступом слева. К формальной части относятся определения, формулировки, доказательства и прочие строгие рассуждения, т. е. то, что при чтении лекций подробно записывается на доске. К неформальной части относится все остальное: замечания, пояснения, комментарии, напоминания, мотивировки тех или иных результатов, т. е. все то, что с одной стороны носит необязательный и одноразовый характер, а с другой делает изложение более живым и доступным.

Как это обычно бывает, разные авторы используют разные обозначения. Мы будем придерживаться обозначений, которые согласуются с [X, X1, X3, GS], иногда позволяя себе по ходу изложения не объяснять некоторые общепринятые обозначения, смысл которых понятен из контекста. На всякий случай, в конце приведен достаточно полный список используемых обозначений.

1. Теория распределений

Мы начинаем с обзора теории распределений. Для тех, кто уже хорошо знаком с этим разделом, достаточно будет уточнить обозначения. Тот же, кто впервые слышит о распределениях, *должен почерпнуть здесь основные понятия и результаты этой теории. Изложение будет по возможности кратким, но в то же время с достаточным количеством примеров, которые помогут прочувствовать обсуждаемые понятия. В качестве основы мы используем первую главу монографии Л. Хёрмандера* [Х]. *За дополнительными сведениями по теории распределений стоит обращаться к более полной версии* [Х1].

Хорошо известно, что не все «вполне нормальные» функции дифференцируемы в классическом смысле. Например, функция модуль $x \mapsto |x|$ *не имеет производной в нуле. Можно обойти эту проблему, рассматривая обобщенную производную в смысле С. Л. Соболева. В этом случае производной* $|x|$ *будет функция сигнум* (*знак числа*)*:*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Однако, сама эта функция недифференцируема даже по Соболеву. (*Во всех точках кроме нуля ее классическая производная равна нулю, и значит производная по Соболеву, которая понимается почти всюду, равна нулю. А это по крайней мере сомнительно, все таки* $\operatorname{sgn} x$ *не константа!*)

Итак, наша цель — найти и изучить наименьшее расширение (*пространства непрерывных функций, например*)*, в котором дифференцирование всегда возможно. Основной идеей здесь выступает интегрирование по частям* (*здесь и далее знак интеграла без указания множества интегрирования обозначает интегрирование по всему пространству* $\mathbb{R}^n$*, размерность которого ясна из контекста*)*:*

$$\int \big(\partial_{x_j} u(x)\big)\varphi(x)\,dx = -\int u(x)\big(\partial_{x_j}\varphi(x)\big)\,dx$$

для достаточно гладких функций $u(x)$ *и* $\varphi(x)$ *таких, что* $\varphi = 0$ *вне некоторого ограниченного множества. Последнее условие обеспечивает сходимость интеграла, а также отсутствие внеинтегральных членов.*

Выражение в правой части равенства не предполагает гладкости $u(x)$, поэтому о нее можно отказаться. Предположим, что существует такая локально интегрируемая f, что для любой гладкой финитной $\varphi(x)$

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = -\int u(x)\partial_{x_j}\varphi(x)\,dx.$$

Эту функцию $f(x)$ естественно назвать обобщенной производной $u(x)$. Это и есть обобщенная производная по Соболеву. Однако можно пойти еще дальше, отказавшись от требования интегрируемости и понимания интеграла в обычном смысле. А именно, рассматривать его как функционал, сопоставляющий φ число $-\int u\partial_{x_j}\varphi\,dx$, и называть этот функционал обобщенной производной u.

На этом пути прежде всего необходимо изучить множество функций φ, на которые «перебрасываются» производные. Их называют пробными. Чем большее количество производных выдерживает φ, тем больше производных будет у u.

1. Пробные функции.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Пространство* $C^k(\Omega)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определятся как множество всех функций на Ω, которые имеют непрерывные производные до порядка k включительно. Определим пространство $C_0^k(\Omega)$ как множество функций из $C^k(\Omega)$, у которых носитель компактен и лежит в Ω.

Напомним, что носитель $\operatorname{supp} u$ функции $u(x)$ на Ω определяется как замыкание (в Ω) множества точек, в которых $u(x)$ отлична от нуля:

$$\operatorname{supp} u := \operatorname{cl}\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}.$$

Таким образом, носитель всегда замкнут, но не всегда компактен. Например $\operatorname{supp}(\sin x) = \mathbb{R}$.

Пусть

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Сужение $u(x)$ на $\Omega = (-1, 1)$ не принадлежит $C_0^0(\Omega)$, несмотря на то что функция обращается в нуль на границе Ω. В этом примере $\operatorname{supp} u = (-1, 1)$ лежит в Ω, однако некомпактен! Можно взглянуть *на это иначе, рассматривая u как функцию на $\mathbb{R}$. Тогда $\operatorname{supp} u = [-1,1]$ и теперь уже $\operatorname{supp} u \not\subset \Omega$. В то же время $u \in C_0^0((-1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$. Грубо говоря, чтобы u принадлежала $C_0^k(\Omega)$, ее носитель должен лежать в Ω с некоторым «зазором».*

Здесь стоит упомянуть о разнице между пространствами $C(K)$ и $C(\Omega)$ непрерывных функции на компакте и на области. Вообще, понятие непрерывности и дифференцируемости предполагают работу на открытом множестве (области). Функция непрерывна (дифференцируема) на компактном множестве, если она такова в некоторой окрестности этого компакта. Однако, пространство $C(K)$ устроено проще чем $C(\Omega)$. Первое — просто нормированное пространство с равномерной нормой $\|u\| = \sup_K |u(x)|$ (компактность гарантирует конечность супремума). Второе же пространство может содержать функции, которые уходят на бесконечность при приближении к границе Ω, так, например, $\operatorname{tg} x$ — непрерывная функция на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Поэтому естественная сходимость на $C(\Omega)$ устроена сложнее. А именно $u_j \to u$ в $C(\Omega)$, если $u_j \to u$ равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega$. Говоря формально, $C(\Omega)$ — мультинормированное пространство относительно семейства полунорм

$$p_K(u) = \sup_K |u(x)|, \quad K \text{ — компакт в } \Omega.$$

Если функция имеет производные всех порядков, мы говорим, что она *бесконечно дифференцируема* и используем обозначения $C^\infty(\Omega)$ и $C_0^\infty(\Omega)$ для множеств бесконечно дифференцируемых и бесконечно дифференцируемых финитных функций. Функции класса $C_0^\infty(\Omega)$ называются *пробными*.

Если первое пространство (точнее $C^\infty(\mathbb{R}^n)$), очевидно, содержит хорошо известные функции $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$, $\sin x$, e^x и т. д., то с $C_0^\infty(\Omega)$ дело обстоит сложнее.

Хорошо известные бесконечно дифференцируемые функции аналитичны, а если функция аналитична на $\mathbb{R}^n$ и имеет компактный носитель, то она тождественно обращается в ноль. И возникает вопрос: существуют ли вообще такие функции? Оказываться, что аналитичность, т. е. возможность представляться в виде степенного ряда, — более сильное свойство чем бесконечная дифференцируемость и среди бесконечно дифференцируемых существуют неаналитические, и в том числе с компактным носителем.

Пример 1. Пользуясь определением производной, можно показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема. Достаточно проверить, что $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в остальных точках это очевидно.

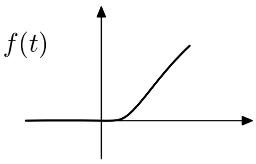

Рис. 1. Гладкая неаналитическая функция

Кстати, если бы она была аналитична, она бы раскладывалась в ряд $f(t) = 0 + 0t + 0t^2 + \cdots$, *что очевидно неверно.*

Пример 2. С помощью $f(t)$ можно построить классического представителя $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, именуемого «шапочкой». Определим $\varphi(x)$ так

$$\varphi(x) = f(1 - |x|^2) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Она очевидно бесконечно дифференцируема (как композиция) и $\operatorname{supp}\varphi = [-1, 1]$. Умножая φ на константу, можно получить функцию $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ со свойствами

$$\omega(x) \geqslant 0, \quad \int \omega(x)\,dx = 1,$$
$$\operatorname{supp}\omega = \{x \mid |x| \leqslant 1\}.$$

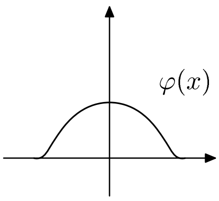

Рис. 2. «Шапочка»

Сжимая и растягивая ее так, чтобы интеграл оставался равным единице, получаем замечательную функцию

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

со свойствами

$$\omega_\varepsilon(x) \geqslant 0, \quad \int \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1, \quad \operatorname{supp}\omega_\varepsilon = \{x \mid |x| \leqslant \varepsilon\},$$

называемую иногда *усредняющим ядром.*

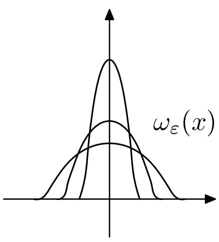

Рис. 3.
Усредняющее ядро

Теперь можно получать другие пробные функции как свертки интегрируемых функций $u(x)$ *с компактным носителем и* ω_ε*:*

$$u_\varepsilon(x) := \int u(x-y)\omega_\varepsilon(y)\,dy = \int \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy.$$

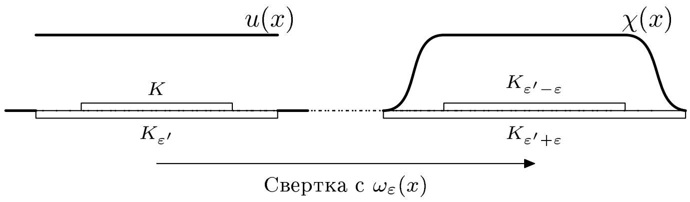

Рис. 4. Построение срезки

Теорема 1 [X, с. 10]**.** *Пусть u — интегрируемая функция, равная нулю вне компакта $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

1. *Если ε меньше расстояния от K до дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, то $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$.*
2. $\operatorname{supp} u_\varepsilon \subset K_\varepsilon = \{x \mid \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \varepsilon\}$.
3. *Если $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, то $u_\varepsilon \to u$ по норме $L_p(\Omega)$.*
4. *Если $u \in C(\Omega)$, то $u_\varepsilon \to u$ равномерно на Ω.*

Построим еще одну полезную функцию, называемую срезкой. Она дает возможность локализовать (сделать финитной) изучаемую функцию, в то же время не меняя ее поведения в окрестности интересующей нас точки.

Пример 3. Пусть K — компактное подмножество Ω. Мы строим функцию

$$\chi \in C_0^\infty(\Omega), \quad 0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1, \quad \chi(x) = 1 \text{ в окрестности } K.$$

Для построения возьмем характеристическую функцию ε'-окрестности $K_{\varepsilon'}$ компакта K и «размажем» ее с помощью свертки с ω_ε. При этом нужно выбрать ε меньшим чем ε', чтобы «не повредить единицу в K», а $\varepsilon + \varepsilon'$ должно быть меньше расстояния от K до дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, чтобы $\operatorname{supp}\chi$ «не вылез из Ω».

Выберем ε и ε' так, что

$$0 < \varepsilon' - \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon' + \varepsilon < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega),$$

и положим

$$\chi(x) := \int \omega_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy,$$

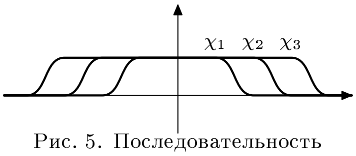

Рис. 5. Последовательность из C_0^∞, не сходящаяся в C_0^∞

где

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_{\varepsilon'} := \{y \mid \operatorname{dist}(y, K) < \varepsilon'\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Построенная функция, очевидно, удовлетворяет всем требованиям.

Мы завершим рассмотрение $C_0^\infty(\Omega)$ указанием его естественной топологии, т. е. той топологии, относительно которой $C_0^\infty(\Omega)$ полно. Очевидно, что $C_0^\infty(\Omega)$ — векторное пространство. Однако сходимость в нем устроена непросто. Это не нормированное пространство (как, например, L_p) и даже не мультинормированное пространство или пространство Фреше (как, например, $C^\infty(\Omega)$ или пространство Шварца $\mathscr{S}$). Естественная топология $C_0^\infty(\Omega)$ — топология индуктивного предела. Интересующиеся могут найти эту конструкцию, например, в книге [РР]. *Здесь мы ограничимся указанием содержания сходимости последовательности.*

Определение 1. Говорят, что *последовательность $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ сходится к φ*, если

1. существует такой компакт $K \subset \Omega$ (общий для всех φ_j), что $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ для всех j;
2. $\partial_x^\alpha \varphi_j \to \partial_x^\alpha \varphi$ равномерно на K для всех мультииндексов α, т. е. φ_j сходится к φ равномерно на K со всеми своими производными.

Первое условие не разрешает, например, последовательности $\chi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, где $\chi_j(x)$ — гладкая срезка, построенная выше для шара $B(0, j)$, сходиться в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. И это верно, поскольку предел такой последовательности — это тождественная единица!

2. Пространство распределений.

Напомним, что если X — некоторое топологическое векторное пространство, то $u : X \to \mathbb{R}$ называется линейной формой (функционалом), если

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y), \quad x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Форма называется непрерывной, если из сходимости $x_j \to x$ в топологии X следует, что $u(x_j) \to u(x)$ (как числовая последовательность). В силу линейности достаточно рассматривать последовательности, сходящиеся к нулю. Векторное пространство линейных непрерывных функционалов на X обозначается через X'.

Определение 2. *Распределение u* в области Ω — это линейная форма на $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $u(\varphi_j) \to 0$ для любой последовательности $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, сходящейся к нулю в $C_0^\infty(\Omega)$ в смысле определения 1. Множество всех распределений на Ω обозначают через $\mathscr{D}'(\Omega)$

Этим обозначением мы обязаны Шварцу, который писал $\mathscr{D}$ вместо C_0^∞.

На практике удобнее использовать следующее эквивалентное определение.

Определение 3. *Распределение u* в области Ω — это линейная форма на $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что для всякого компакта $K \subset \Omega$ существуют константы C и k, для которых

$$|u(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup |D^\alpha \varphi| \quad \text{для любой } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp} \varphi \subset K. \qquad (1)$$

Если k может быть выбрано одинаковым для всех K, то говорят, что u имеет *порядок k*.

Доказательство эквивалентности определений. Пусть u — распределение в смысле определения 2, т. е. $u(\varphi_j) \to 0$ для любой $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, сходящейся к нулю. Предположим, что K — некоторый компакт и неравенство (1) не выполнено ни при каких C и k. Это означает, что для $C = j$ и $k = j$ можно найти функцию $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$, на которой это неравенство нарушается, т. е.

$$|u(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha| \leqslant j} \sup |D^\alpha \varphi_j|.$$

Кроме того, если умножить φ_j на подходящую константу так, чтобы $u(\varphi_j) = 1$, то

$$\frac{1}{j} > \sum_{|\alpha|\leqslant j} \sup |D^\alpha \varphi_j|.$$

Это означает, что $\varphi_j \to 0$ в $C_0^\infty(\Omega)$, и вместе с тем $u(\varphi_j) = 1$; противоречие. В обратную сторону утверждение очевидно.

Пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$, очевидно, является векторным пространством с естественными операциями сложения и умножения на скаляр:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(\varphi) = \lambda_1 u_1(\varphi) + \lambda_2 u_2(\varphi), \quad u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

При этом $\mathscr{D}'(\Omega)$ наделяется слабой топологией, т. е. $u_j \to u$ по определению, если $u_j(\varphi) \to u(\varphi)$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Пример 4. Пусть u — локально интегрируемая функция на Ω, а α — мультииндекс. Линейная форма

$$\varphi \mapsto \int u(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx$$

определяет распределение порядка не выше $|\alpha|$.

Оказывается, что **локально** *любое распределение может быть записано в указанном виде (см.* [X, теорема 1.4.1]). *В простейшем случае* $\alpha = 0$, *т. е.*

$$\varphi \mapsto u(\varphi) = \int u(x)\varphi(x)\, dx, \tag{2}$$

мы используем одну и ту же букву для обозначения распределения и функции, его породившей. (Что имеется в виду обычно понятно из контекста: $u(\varphi)$ *— распределение,* $u(x)$ *— функция).*

Пример 5. *Дельта функция Дирака* δ_a, определенная по правилу $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$, очевидно, является распределением. (Для краткости будем писать $\delta = \delta_0$.) Действительно,

$$|\delta_a(\varphi)| \leqslant 1 \sum_{|\alpha|\leqslant 0} \sup |D^\alpha \varphi|.$$

Распределение δ *нельзя представить при помощи локально интегрируемой функции в виде интеграла (докажите):*

$$\delta(\varphi) = \int \delta(x)\varphi(x)\, dx.$$

Однако такая формальная форма записи вполне удобна. При этом δ_a записывается при помощи свертки

$$\delta_a(\varphi) = \int \delta(a-y)\varphi(y)\,dy = \int \delta(y)\varphi(a-y)\,dy.$$

(*Убирая интеграл, нужно просто подставить вместо переменной интегрирования то значение, при котором аргумент $\delta(x)$ обращается в нуль.*)

Пример 6. Комбинируя примеры 4, 5, можно определить распределения

$$u_1(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(0,\dots,0,x_n)\,dx_n,$$

$$u_2(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x_1,\dots,x_{n-1},0)\,dx_1\dots dx_{n-1},$$

которые сопоставляют φ интегралы по прямой и гиперплоскости. Эти распределения удобно записывать формально в виде

$$u_1(\varphi) = \int \delta(x')\varphi(x)\,dx,$$

$$u_2(\varphi) = \int \delta(x_n)\varphi(x)\,dx.$$

(Те переменные, которые встречаются в качестве «аргументов» δ, полагаются равными нулю, а по остальным производится интегрирование.)

В следующем примере мы увидим, что граничное значение **аналитической** *функции $\frac{1}{z}$ представляет собой распределение. Так что от аналитической функции до распределения один предельный переход.*

Пример 7. Формула

$$u_{\pm}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\,dx$$

задает распределение, которое символически обозначается через

$$u_{\pm}(x) = \frac{1}{x \pm i0}.$$

Кроме того,

$$u_\pm(\varphi) = \text{p.v.}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \mp i\pi\delta(\varphi).$$

Действительно,

$$\int \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\,dx = \varphi(0)\int \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \int \frac{(x \mp i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx,$$

где первое слагаемое равно

$$\varphi(0)\int \frac{\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \mp i\varphi(0)\operatorname{arctg}(x/\varepsilon)\big|_{-\infty}^{\infty} = \mp i\pi\varphi(0),$$

а второе стремится к

$$\int \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = \text{p.v.}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

по теореме Лебега, так как подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту:

$$\frac{(x^2+\varepsilon^2)^{1/2}|\varphi(x)-\varphi(0)|}{x^2+\varepsilon^2} \leqslant \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{x^2}.$$

Мы легко можем определить сужение распределения $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ на подобласть $\Omega' \subset \Omega$, просто сузив его область определения до пространства $C_0^\infty(\Omega')$. Может оказаться, что сужение обладает некоторыми свойствами регулярности (задается в виде интеграла (2) с помощью функции, которая принадлежит L_{loc}, C^k или просто равна нулю). Это приводит к понятиям носителя и сингулярного носителя.

Определение 4. Будем говорить, что точка **не** принадлежит носителю распределения u, если x обладает окрестностью, в которой $u = 0$. Носитель $\operatorname{supp} u$ — это соответственно дополнение к множеству упомянутых точек.

Определение 5. Будем говорить, что точка **не** принадлежит сингулярному носителю распределения u, если x обладает окрестностью, в которой $u \in C^\infty$. Сингулярный носитель $\operatorname{sing\,supp} u$ — это соответственно дополнение к множеству упомянутых точек.

Носитель и сингулярный носитель всегда замкнуты, поскольку дополнения к ним открыты.

3. Дифференцирование распределений.

Напомним, что для $u \in C^1(\Omega)$ *и* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$\int D_k u(x)\varphi(x)\,dx = -\int u(x) D_k \varphi(x)\,dx,$$

которое мотивирует следующее определение.

Определение 6. *Производная* $D_k u$ распределения $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ определяется как распределение, действующее по правилу

$$(D_k u)(\varphi) := -u(D_k \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3}$$

Очевидно, что дифференцировать можно сколь угодно много раз, так как все производные «ложатся» на φ.

Для производной произвольного порядка получается правило

$$(D^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пример 8. Определим функции

$$x_+^k = \begin{cases} x^k, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{(функция Хевисайда).}$$

Тогда в смысле теории распределений

$$\frac{d}{dx}(x_+) = \theta(x), \quad \frac{d}{dx}\theta(x) = \delta.$$

4. Умножение на функцию.

Если u *— локально интегрируемая и* φ *— гладкая финитная функции, то мы можем по-разному расставлять скобки в интеграле:*

$$\int (ua)\varphi\,dx = \int u(a\varphi)\,dx,$$

что приводит к следующему определению.

Определение 7. Для $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $a \in C^\infty(\Omega)$ их *произведение* — это распределение, определенной формулой

$$(au)(\varphi) := u(a\varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4}$$

Пользуясь определением, легко показать, что

$$D_k(au) = (D_k a)u + a(D_k u).$$

Действительно,

$$\begin{gathered}(D_k(au))(\varphi) = -(au)(D_k\varphi) = -u(aD_k\varphi) = \\ = -u(D_k(a\varphi) - (D_k a)\varphi) = -u(D_k(a\varphi)) + u((D_k a)\varphi) = \\ = (D_k u)(a\varphi) + ((D_k a)u)(\varphi) = ((D_k u)a + u(D_k a))(\varphi).\end{gathered}$$

Заметим, что

$$\operatorname{supp}(au) \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} u.$$

5. Распределения с компактным носителем. Если распределение $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ имеет компактный носитель, то можно расширить его область определения с $C_0^\infty(\Omega)$ до $C^\infty(\Omega)$. Действительно, так как $\operatorname{supp} u$ — компакт, существует такая функция $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, что $\chi(x) = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} u$ (см. пример 3). Для произвольной $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ положим

$$u(\varphi) := u(\chi\varphi). \tag{5}$$

Выражение в правой части имеет смысл, поскольку $\chi\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Покажем, что определение не зависит от выбора $\chi(x)$. Пусть $\chi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ — другая функция, такая что $\chi_1(x) = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} u$. Тогда

$$u(\chi\varphi) - u(\chi_1\varphi) = u((\chi - \chi_1)\varphi) = 0$$

ввиду того, что $\chi = \chi_1 = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} u$.

Множество всех распределений на Ω с компактным носителем будем обозначать через $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Оказывается, пространство можно получить иначе. Кстати, на этим пути мы увидим, откуда взялось обозначение $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Рассмотрим пространство $C^\infty(\Omega)$ с топологией равномерной сходимости на любом компакте со всеми производными, в которой сходимость $\varphi_j \to \varphi$ означает по определению, что

$$\sup_K |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi| \to 0$$

для любого компакта $K \subset \Omega$ и любого мультииндекса α. Пространство распределений с компактным носителем есть не что иное как сопряженное к $C^\infty(\Omega)$ с указанной топологией (докажите), что оправдывает обозначение $\mathscr{E}'$, введенное Шварцем, который обозначал C^∞ через $\mathscr{E}$.

Полезно иметь в виду следующее утверждение, доказательство которого можно найти в [X, теорема 1.5.3].

Теорема 2. *Распределение u, носитель которого состоит из одной точки $a \in \mathbb{R}^n$, представляет собой линейную комбинацию дельта функции Дирака и ее производных:*

$$u = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha \delta_a \quad (\textit{сумма конечна}).$$

6. Свертка распределений.

Для двух непрерывных функций $u(x)$ и $\varphi(x)$, одна из которых имеет компактный носитель, свертка определяется так:

$$(u * \varphi)(x) = \int u(x-y)\varphi(y)\,dy = \int u(y)\varphi(x-y)\,dy. \qquad (6)$$

Компактность носителя гарантирует сходимость интеграла.

Заметим, что говоря о свертке мы всегда рассматриваем функции определенные на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ (или каким-то образом продолженные на $\mathbb{R}^n$).

Хорошо известно, что свертка обладает рядом свойств (проверяются непосредственно при помощи замены переменной):

1. коммутативность: $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$;
2. ассоциативность: $(u_1 * u_2) * u_3 = u_1 * (u_2 * u_3)$ (в этом равенстве все функции, возможно, кроме одной имеют компактный носитель);
3. $D_k(u_1 * u_2) = (D_k u_1) * u_2 = u_1 * (D_k u_2)$;

Цель этого пункта — определить свертку двух распределений, одно из которых имеет компактный носитель, с сохранением всех указанных выше свойств. Для начала мы определим свертку распределения и пробной функции и изучим ее свойства. Затем докажем некоторое утверждение, позволяющее определить свертку двух распределений.

Определение 8. Глядя на определение (6) свертки двух функций, определим *свертку* $u \in \mathscr{D}'$ и $\varphi \in C_0^\infty$ как функцию

$$(u * \varphi)(x) := u_y(\varphi(x - y))$$

(индекс y у u_y означает, что u действует на $\varphi(x-y)$ как функцию от y при фиксированном x).

Точно так же можно определить свертку $u \in \mathscr{E}'$ и $\varphi \in C^\infty$.

Напомним, что векторная сумма двух множеств A и B — это

$$A + B := \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\},$$

т. е. состоит из элементов множества A, сдвинутых на элементы множества B. В частности, $A + B(0, \varepsilon)$ — это ε-окрестность множества A. Заметим, что $A + B$ может не пересекаться ни с A, ни с B (например, если $A = B = [2, 3] \subset \mathbb{R}$).

Теорема 3. *Если $u \in \mathscr{D}'$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty$, то*

1. $u * \varphi \in C^\infty$;
2. $\operatorname{supp}(u * \varphi) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi$;
3. $D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u(D^\alpha \varphi)$;
4. $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$;

Доказательство. 1. Очевидно, что $\varphi(x_j - y) \to \varphi(x - y)$ в топологии C_0^∞ при $x_j \to x$ (докажите). Следовательно,

$$(u * \varphi)(x_j) = u_y(\varphi(x_j - y)) \to u_y(\varphi(x - y)) = (u * \varphi)(x),$$

т. е. функция $u * \varphi$ непрерывна. Бесконечная дифференцируемость будет позже следовать из свойства 3.

2. Возьмем $x \in \operatorname{supp}(u * \varphi)$ и покажем, что $x \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi$. По определению носителя существует последовательность $x_j \to x$ такая, что $(u * \varphi)(x_j) = u_y(\varphi(x_j - y)) \neq 0$. Значит, носители u и $\varphi(x_j - y)$ (как функции от y) пересекаются в некоторой точке y_0. Но если $y_0 \in$

$\operatorname{supp}_y \varphi(x_j - y)$, то $x_j - y_0 \in \operatorname{supp}\varphi$, т. е. $x_j \in \operatorname{supp}\varphi + y_0 \subset \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp} u$. В силу замкнутости $x_0 \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi$.

3. Здесь придется вспомнить определение производной по направлению и вычислить первую производную D_k (далее по индукции):

$$\begin{aligned} D_k(u * \varphi)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(u*\varphi)(x+he_k) - (u*\varphi)(x)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} u_y\Big(\frac{\varphi(x+he_k-y) - \varphi(x-y)}{ih}\Big) \\ &= u_y\Big(\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+he_k-y) - \varphi(x-y)}{ih}\Big) \\ &= u_y(D_k\varphi(x-y)) = (u * D_k\varphi)(x). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью u.

Наконец, последнее равенство $(D_k u) * \varphi = u * (D_k\varphi)$ следует из определений свертки и производной распределения:

$$\begin{aligned} ((D_k u) * \varphi)(x) = D_k u_y(\varphi(x-y)) = u_y(-D_{y_k}\varphi(x-y)) = \\ = u_y(D_{x_k}\varphi(x-y)) = u * (D_k\varphi). \end{aligned}$$

4. См. [X, теорема 1.6.2].

В качестве следствия получается, что любое распределение на $\mathbb{R}^n$ можно приблизить гладкой функцией. Этот результат аналогичен теореме 1 для функций.

Теорема 4. *Пусть $u \in \mathscr{D}'$. Регуляризация $u_\varepsilon := u * \omega_\varepsilon$ обладает следующими свойствами:*

1. $u_\varepsilon \in C^\infty$;
2. $\operatorname{supp} u_\varepsilon \subset \operatorname{supp} u + B(0,\varepsilon)$;
3. $u_\varepsilon \to u$ *в пространстве* $\mathscr{D}'$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. В проверке нуждается только свойство 3. Докажем сходимость по определению, т. е. возьмем $\varphi \in C_0^\infty$ и покажем, что

$$(u * \omega_\varepsilon)(\varphi) = \int (u * \omega_\varepsilon)(x)\varphi(x)\,dx \to u(\varphi).$$

Действие распределения u на φ можно записать при помощи свертки:

$$u(\varphi) = u_y(\varphi(y-x))|_{x=0} = (u * \check{\varphi})(0),$$

где $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. С учетом этого требуемое соотношение имеет вид

$$(u * \omega_\varepsilon)(\varphi) = ((u * \omega_\varepsilon) * \check{\varphi})(0) = (u * (\omega_\varepsilon * \check{\varphi}))(0) \to (u * \check{\varphi})(0) = u(\varphi).$$

С некоторыми ухищрениями можно доказать, что и в случае произвольной области Ω для $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ существует такая последовательность $u_j \in C^\infty(\Omega)$, что $u_j \to u$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$ [X, теорема 1.6.3′].

Мы приблизились к определению свертки двух распределений. Отметим два свойства свертки:

1) *если $\varphi_j \to \varphi$ в C_0^∞, то $u * \varphi_j \to u * \varphi$ в C^∞;*
2) *инвариантность относительно сдвигов: $u*(\tau_h\varphi) = \tau_h(u*\varphi)$, где τ_h — оператор сдвига на $h \in \mathbb{R}^n$: $\tau_h\varphi(x) := \varphi(x-h)$.*

Оказывается, что эти два свойства однозначно характеризуют свертку.

Теорема 5. *Пусть U — линейное отображение на C_0^∞ такое, что*

1) *если $\varphi_j \to \varphi$ в C_0^∞, то $U(\varphi_j) \to U(\varphi)$ в C^∞;*
2) *U инвариантно относительно сдвигов: $U(\tau_h\varphi) = \tau_h(U\varphi)$.*

Тогда существует единственное распределение $u \in \mathscr{D}'$ такое, что $U\varphi = u * \varphi$, $\varphi \in C_0^\infty$.

Доказательство. По первому свойству отображение

$$\varphi \mapsto (U\check{\varphi})(0), \quad \varphi \in C_0^\infty,$$

непрерывно и линейно. Значит, это некоторое распределение $u \in \mathscr{D}'$:

$$(U\check{\varphi})(0) = u(\varphi) = (u * \check{\varphi})(0),$$

т. е. функции $U\check{\varphi}$ и $u * \check{\varphi}$ совпадают в нуле. Заменяя φ на $\varphi_h(x) = \tau_h\varphi(x) = \varphi(x-h)$ и пользуясь тем, что U инвариантно относительно сдвигов, получаем

$$\begin{aligned}(U\check{\varphi})(h) = (\tau_{-h}U\check{\varphi})(0) = (U\tau_{-h}\check{\varphi})(0) = (U\check{\varphi}_h)(0) = (u * \check{\varphi}_h)(0) = \\ = (u * \tau_{-h}\check{\varphi})(0) = \tau_{-h}(u * \check{\varphi})(0) = (u * \check{\varphi})(h).\end{aligned}$$

Определение 9. Пусть $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'$ и одно из них имеет компактный носитель. Тогда отображение

$$\varphi \mapsto u_1 * (u_2 * \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty,$$

линейно, непрерывно и инвариантно относительно сдвигов. По теореме 5 существует единственное распределение $u \in \mathscr{D}'$ такое, что

$$u * \varphi = u_1 * (u_2 * \varphi).$$

Оно и называется *сверткой* u_1 и u_2 и обозначается через $u_1 * u_2$.

Естественно, определенная таким образом свертка обладает всеми подобающими свойствами.

Теорема 6 [X, с. 27]**.** *Пусть u_1, u_2, u_3 принадлежат $\mathscr{D}'$ и все, кроме, возможно, одного, имеют компактные носители. Тогда*

1) $(u_1 * u_2) * u_3 = u_1 * (u_2 * u_3)$*;*
2) $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$*;*
3) $\operatorname{supp} u_1 * u_2 \subset \operatorname{supp} u_1 + \operatorname{supp} u_2$*;*
4) $D^\alpha(u_1 * u_2) = (D^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * (D^\alpha u_2)$*.*

Пример 9. Свертка распределения с дельта-функцией δ дает то же распределение: $u * \delta = u$.

Действительно, пользуясь коммутативностью и ассоциативностью свертки, получаем

$$\delta * \check{\varphi} = \delta_y(\check{\varphi}(x-y)) = \delta_y(\varphi(y-x)) = \varphi(-x) = \check{\varphi}$$

и, далее,

$$(\delta * u)(\varphi) = (\delta * u)_y(\varphi(y-0)) = ((\delta * u) * \check{\varphi})(0) = \\ = (u * \delta * \check{\varphi})(0) = (u * \check{\varphi})(0) = u(\varphi).$$

Производную любого порядка от распределения (или функции) можно представить как свертку с производной дельта функции δ:

$$D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u.$$

Оператор интегрирования

$$\mathscr{J}\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi$$

можно записать как свертку с функцией Хевисайда: $\mathscr{J}\varphi(x) = (\theta * \varphi)(x)$.

7. Преобразование Фурье.

Преобразование Фурье занимает важнейшее место в теории распределений, теории дифференциальных уравнений и математике вообще.

Хорошо известно, что преобразование Фурье интегрируемой функции u на $\mathbb{R}^n$ определяется так:

$$\mathscr{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\, dx. \tag{7}$$

Если $\hat{u}(\xi)$ окажется интегрируемой, то к ней можно применить обратное преобразование Фурье, которое даст исходную функцию:

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

Однако не для всякой $u \in L_1$ ее преобразование Фурье — интегрируемая функция. Так образом, пространство L_1 не очень подходит для изучения преобразования Фурье, и мы начнем с поиска подходящего пространства, на котором «поселить» преобразование Фурье. Таким пространством является пространство Шварца.

Определение 10. *Пространство Шварца* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < \infty$$

для любых мультииндексов α и β. Такие функции называются *быстро убывающими*. Пространство Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ наделяют топологией, в которой $\varphi_j \to \varphi$ означает

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\beta D^\alpha (\varphi_j(x) - \varphi(x)) \right| \to 0$$

для любых мультииндексов α и β.

Иначе говоря, пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из гладких функций, которые убывают вместе со всеми производными на бесконечности быстрее любой степени. Введенная топология естественная, т. е. относительно нее $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ полно.

Подчеркнем, что пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ определяется только на всем $\mathbb{R}^n$. Поэтому для краткости мы будем писать $\mathscr{S}$, используя обозначение $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ только в случае, когда нужно указать размерность пространства.

Пространство $\mathscr{S}$ занимает промежуточное положение между C_0^∞ и C^∞:

$$C_0^\infty \subset \mathscr{S} \subset C^\infty,$$

кроме того, вложения непрерывны и плотны (докажите)

Следующая теорема подтверждает, что $\mathscr{S}$ — естественная среда обитания для преобразования Фурье, и устанавливает некоторые его свойства.

Теорема 7. 1. *Преобразование Фурье*

$$\mathscr{F}\varphi(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx \tag{9}$$

переводит $\mathscr{S}$ *в* $\mathscr{S}$, *причем непрерывно;*

2. *Обратное отображение* $\hat{\varphi} \mapsto \varphi$ *осуществляется по формуле обратного преобразования Фурье*

$$\varphi(x) = \mathscr{F}^{-1}\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Кроме того, каждый элемент $\psi \in \mathscr{S}$ — *преобразование Фурье некоторого* $\varphi \in \mathscr{S}$, *т. е. образ* $\mathscr{S}$ *под действием преобразования Фурье совпадает с* $\mathscr{S}$.

3. *При преобразовании Фурье производной соответствует умножение на независимую переменную и наоборот:*

$$\widehat{(D_k\varphi)}(\xi) = \xi_k\hat{\varphi}(\xi), \tag{11}$$

$$\widehat{(x_k\varphi)}(\xi) = -D_{\xi_k}\hat{\varphi}(\xi). \tag{12}$$

Прямое и обратное преобразования Фурье отличаются по существу знаком перед i. *В связи с этим, заменяя в* (10) x *на* $-x$, *можно записать формулу обратного преобразования Фурье так*

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x) = (2\pi)^{-n}\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{\varphi}}(x). \tag{13}$$

Таком видом формулы обратного преобразования мы будем пользоваться, говоря о преобразовании Фурье от распределений.

Доказательство. Дифференцируя равенство

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx,$$

получаем

$$D^\alpha\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x)^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, так как быстрое убывание φ *обеспечивает сходимость всех возникающих интегралов.*

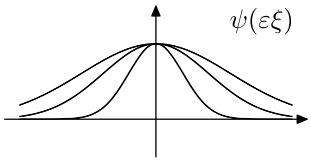

Рис. 6. $\psi(\varepsilon\xi) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$

Следовательно, $\hat{\varphi} \in C^\infty$. Далее, заметим, что

$$\xi_k e^{-i\langle x,\xi\rangle} = -D_k e^{-i\langle x,\xi\rangle},$$

и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) &= \int \big((-D_x)^\beta e^{-i\langle x,\xi\rangle}\big)(-x)^\alpha \varphi(x)\,dx = \\ &= \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta\big((-x)^\alpha\varphi(x)\big)\,dx.\end{aligned}$$

Наконец, умножим и разделим на $(1+|x|)^{n+1}$ и перейдем к оценке

$$\begin{aligned}\sup|\xi^\beta D^\alpha\hat{\varphi}(\xi)| &\leqslant \int \Big|(1+|x|)^{n+1} D_x^\beta\big((-x)^\alpha\varphi(x)\big)\Big| \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} \leqslant \\ &\leqslant C\sup\Big|(1+|x|)^{n+1} D_x^\beta\big((-x)^\alpha\varphi(x)\big)\Big|.\end{aligned}$$

Это означает, что образ Фурье $\hat{\varphi}$ принадлежит $\mathscr{S}$ и преобразование Фурье действует из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ непрерывно.

Попутно мы получили свойства п. 3. Достаточно положить $\alpha = 0$ или $\beta = 0$.

2. Пусть $\hat{\varphi}(\xi)$ — преобразование Фурье некоторой $\varphi \in \mathscr{S}$. Очевидно, нужно посчитать повторный интеграл

$$(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\varphi(y)\,dy\,d\xi$$

и показать, что он равен $\varphi(x)$. Проблема в том, что этот интеграл не сходится абсолютно и, значит, поменять порядок нельзя ($e^{i\langle x-y,\xi\rangle}$ не убывает по ξ). Мы обойдем эту сложность при помощи регуляризации по ξ.

Заметим, что отображение

$$\hat{\varphi}(\xi) \mapsto (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

действует непрерывно из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (по той же причине, что и прямое преобразование Фурье). Таким образом, если мы возьмем $\psi \in \mathscr{S}$ такую, что $\psi(0) = 1$ (рис. 6) и, следовательно, $\psi(\varepsilon\xi)\hat{\varphi}(\xi) \to \hat{\varphi}(\xi)$, $\varepsilon \to 0$, в топологии $\mathscr{S}$ (докажите последний переход), то

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\psi(\varepsilon\xi)\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi \to \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi.$$

Положим $\psi(\xi) := e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ и заметим, что $\psi(0) = 1$. Рассмотрим регуляризованный интеграл, который теперь уже сходится абсолютно:

$$\begin{aligned}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\psi(\varepsilon\xi)\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi &= \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\psi(\varepsilon\xi)\varphi(y)\,dy\,d\xi = \\ &= \int\Big(\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\psi(\varepsilon\xi)\,d\xi\Big)\varphi(y)\,dy = \\ &= \int\Big(\int e^{i\langle\frac{x-y}{\varepsilon},\varepsilon\xi\rangle}\psi(\varepsilon\xi)\,\frac{d(\varepsilon\xi)}{\varepsilon^n}\Big)\varphi(y)\,dy = \\ &= \int\frac{1}{\varepsilon^n}\hat{\psi}\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big)\varphi(y)\,dy = \left|\frac{y-x}{\varepsilon} = z\right| = \\ &= \int\hat{\psi}(z)\varphi(x+\varepsilon z)\,dz.\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и пользуясь теоремой Лебега, получаем

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi) = \varphi(x)\int\hat{\psi}(z)\,dz.$$

Ниже в примере 11 мы увидим, что

$$\hat{\psi}(z) = (2\pi)^{n/2}e^{-\frac{|z|^2}{2}} \quad \text{и} \quad \int\hat{\psi}(z)\,dz = (2\pi)^{-n}.$$

Утверждение об обратном преобразовании Фурье доказано.

Тот факт, что образ $\mathscr{S}$ при преобразовании Фурье — это всё $\mathscr{S}$ очевиден, поскольку обратное преобразование Фурье определено для любой $\varphi \in \mathscr{S}$. Доказательство завершено.

Пример 10. Оператору Лапласа при преобразовании Фурье соответствует умножение на $-|\xi|^2$:

$$\widehat{\Delta u} = -|\xi|^2\hat{u}, \quad \mathscr{F}((1-\Delta)u) = (1+|\xi|^2)\hat{u}.$$

Следующая теорема устанавливает фундаментальные свойства преобразования Фурье, которые лежат, в частности, в основе определения преобразования Фурье от распределений.

Теорема 8. *Пусть* $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. *Тогда*

$$\int \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx = \int \hat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx; \tag{14}$$

$$\int \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}}(\xi)\,d\xi; \tag{15}$$

$$\widehat{(\varphi * \psi)} = \hat{\varphi}\,\hat{\psi}; \tag{16}$$

$$\widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}. \tag{17}$$

Доказательство. Всё доказывается простой проверкой:

$$\int \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx = \iint \varphi(x)e^{i\langle x,y\rangle}\psi(y)\,dy\,dx = \int \hat{\varphi}(y)\psi(y)\,dy.$$

Для доказательства второго тождества предположим, что $\overline{\psi} = \hat{\chi}$ (в этом случае $\chi = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{\psi}}$; докажите) и используем первое тождество:

$$\int \varphi\overline{\psi}\,dx = \int \varphi\chi\,dx = \int \hat{\varphi}\chi\,d\xi = (2\pi)^{-n}\iint \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}\,d\xi.$$

Докажем (16):

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi * \psi} &= \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,dx = \\
&= \iint e^{-i\langle x-y,\xi\rangle}\varphi(x-y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}\psi(y)\,dy\,dx = |x-y=z| = \\
&= \iint e^{-i\langle z,\xi\rangle}\varphi(z)e^{-i\langle y,\xi\rangle}\psi(y)\,dy\,dz = \hat{\varphi}\,\hat{\psi}.
\end{aligned}$$

Наконец, последняя формула выводится из предыдущей (докажите).

Пример 11. $\mathscr{F}\Big(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\Big) = (2\pi)^{n/2}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ (рис. 7). Действительно, дополним показатель до полного квадрата:

$$\begin{aligned}
\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,dx &= \int e^{-(\langle x,i\xi\rangle + \frac{\langle x,x\rangle}{2} + \frac{\langle i\xi,i\xi\rangle}{2} - \frac{\langle i\xi,i\xi\rangle}{2})}\,dx = \\
&= e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}\int e^{-\frac{\langle x+i\xi,x+i\xi\rangle}{2}}\,dx.
\end{aligned}$$

В силу очевидного равенства

$$e^{-\frac{\langle x+i\xi,x+i\xi\rangle}{2}} = e^{-\frac{(x_1+i\xi_1)^2}{2}}e^{-\frac{(x_2+i\xi_2)^2}{2}}\cdots e^{-\frac{(x_n+i\xi_n)^2}{2}}$$

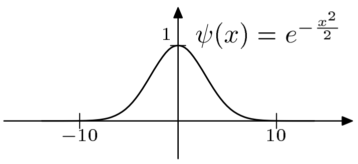

Рис. 7.
Гауссово распределение

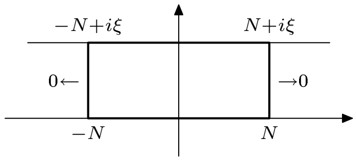

Рис. 8. Замена контура интегрирования

последний интеграл — произведение n одномерных интегралов:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}}\, dx.$$

Функция $e^{-\frac{z^2}{2}}$ аналитична и быстро убывает при $|\operatorname{Re} z| \to \infty$. Значит, пользуясь леммой Жордана и тем, что интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру равен нулю, можно сместить контур интегрирования, полагая $\xi = 0$ (рис. 8):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Наконец,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, d\Big(\frac{r^2}{2}\Big) = 2\pi.$$

Мы собираемся ввести пространство, сопряженное к $\mathscr{S}$, которое, естественно, будет некоторым пространством распределений, и перенести на него преобразование Фурье, используя соображения двойственности.

Определение 11. Непрерывная линейная форма на $\mathscr{S}$ называется *умеренным* (или *медленно растущим*) *распределением.* Множество всех таких распределений обозначается через $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ (или просто $\mathscr{S}'$). Пространство $\mathscr{S}'$ наделяют слабой топологией, в которой $u_j \to u$ означает, что $u_j(\varphi) \to u(\varphi)$ для любой $\varphi \in \mathscr{S}$.

Поскольку $\mathscr{S}$ занимает промежуточное положение между C_0^∞ и C^∞, пространство $\mathscr{S}'$ занимает промежуточное положение между $\mathscr{D}'$ и $\mathscr{E}'$:

$$C_0^\infty \subset \mathscr{S} \subset C^\infty, \quad \mathscr{D}' \supset \mathscr{S}' \supset \mathscr{E}',$$

причем все вложения непрерывны в соответствующих топологиях (докажите).

Определение 12. Преобразование Фурье умеренного распределения $u \in \mathscr{S}'$ определяется равенством (ср. (14))

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}). \tag{18}$$

Из непрерывности отображения $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ в $\mathscr{S}$ следует, что $\hat{u}$ — непрерывное отображение на $\mathscr{S}$ ($\varphi_j \to 0 \Rightarrow \hat{\varphi}_j \to 0 \Rightarrow u(\hat{\varphi}_j) \to 0 \Rightarrow \hat{u}(\varphi_j) \to 0$).

В случае регулярного распределения (представленного локально интегрируемой функцией) это определение, очевидно, согласуется с определением (7).

Теорема 9 [X, теорема 1.7.3]**.**

1. *Преобразование Фурье устанавливает изоморфизм пространства $\mathscr{S}'$ на себя.*
2. *Для распределений $u \in \mathscr{S}'$ справедлива формула обратного преобразования Фурье: $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$, где $\check{u}$ действует по правилу $\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})$, $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, (ср. (13)).*
3. *Отображение $u \mapsto \hat{u}$ непрерывно в $\mathscr{S}'$.*

В качестве примеров мы посчитаем преобразования Фурье некоторых умеренных распределений. Некоторые из них — «вполне нормальные» функции. Однако мы не сделали это раньше, когда изучили преобразование Фурье на пространстве $\mathscr{S}$, так как по разным причинам они не принадлежат $\mathscr{S}$:

- $e^{-|x|}$, $\theta(x)e^{-\gamma x}$, $\chi_{[-1,1]}(x)$ *недостаточно гладкие, впрочем, мы увидим, что это не создает проблем;*
- $e^{\pm i\frac{x^2}{2}}$, x^α *неубывающие на бесконечности;*
- $\theta(x)$ *негладкая и плохо убывающая на бесконечности;*

Строго говоря, в нашем контексте — это лишь умеренные распределения. В случае, когда исследуемая функция лежит в L_1 мы *действуем по определению (7). Если же убывание слабее (или вообще отсутствует), мы приближаем функцию последовательностью достаточно быстро убывающих функций, а затем переходим к пределу, пользуясь непрерывностью преобразования Фурье.*

Пример 12. $\mathscr{F}\left(e^{-|x|}\right) = \frac{2}{1+\xi^2}$. Действительно, в силу четности

$$\int e^{-\langle x,\xi\rangle} e^{-|x|}\,dx = \int (\cos\xi x - i\sin\xi x) e^{-|x|}\,dx =$$
$$= 2\int\limits_0^\infty \cos\xi x\, e^{-|x|}\,dx = 2\frac{1}{1+\xi^2}.$$

(Интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \cos\xi x\, e^{-|x|}\,dx$ вычисляется двукратным интегрированием по частям.)

Результат следующего примера потребуется нам, когда мы будем изучать метод стационарной фазы.

Пример 13. $\mathscr{F}\left(e^{\pm i\frac{x^2}{2}}\right) = \sqrt{2\pi}\, e^{\pm i\pi/4}\, e^{\mp i\frac{\xi^2}{2}} \quad (n = 1)$. Действительно, результат примера 10 можно обобщить на быстро убывающие функции $\psi_a(x) = e^{-a\frac{x^2}{2}}$, $\operatorname{Re} a > 0$:

$$\mathscr{F}\left(e^{-a\frac{x^2}{2}}\right) = \hat\psi_a(\xi) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{a^{1/2}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}, \quad \operatorname{Re} a > 0.$$

Если же a — чисто мнимое число ($\operatorname{Re} a = 0$, $\operatorname{Im} a \neq 0$), то существует последовательность $a_j \to a$, $\operatorname{Re} a_j > 0$. По теореме Лебега

$$\int e^{-a_j\frac{x^2}{2}}\varphi(x)\,dx \to \int e^{-a\frac{x^2}{2}}\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{S},$$

т. е. $\psi_{a_j} \to \psi_a$ в топологии $\mathscr{S}'$, что в силу непрерывности преобразования Фурье влечет $\hat\psi_{a_j} \to \hat\psi_a$:

$$\mathscr{F}\left(e^{-a\frac{x^2}{2}}\right) = \lim_{j\to\infty} \hat\psi_{a_j}(\xi) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{a^{1/2}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}, \quad \operatorname{Re} a = 0, \quad \operatorname{Im} a \neq 0.$$

В частности при $a = \mp i$

$$\mathscr{F}\left(e^{\pm i\frac{x^2}{2}}\right) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{(\mp i)^{1/2}} e^{\mp i\frac{\xi^2}{2}} = (2\pi)^{1/2} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} e^{\mp i\frac{\xi^2}{2}}.$$

Пример 14. Преобразование Фурье дельта-функции δ есть функция, тождественно равная 1:

$$\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int e^{-i\langle x,0\rangle}\varphi(x)\,dx = \int 1\varphi(x)\,dx.$$

Преобразование Фурье функции $u \equiv 1$ равно $(2\pi)^n\delta$:

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}) = \int 1\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \int e^{i\langle 0,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^n\varphi(0) = (2\pi)^n\delta(\varphi).$$

Пример 15. Найдем преобразование Фурье от функции Хевисайда $\theta(x)$. Для этого приблизим ее в пространстве $\mathscr{S}'$ последовательностью интегрируемых функций, а затем воспользуемся непрерывностью преобразования Фурье в $\mathscr{S}'$. Имеем

$$\theta(x)e^{-\varepsilon x} \to \theta(x) \quad \text{в } \mathscr{S}'.$$

Теперь

$$\begin{aligned}\int e^{-ix\xi}\theta(x)e^{-\varepsilon x}\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-(\varepsilon+i\xi)x}\,dx = \\ = -\frac{1}{\varepsilon+i\xi}\int\limits_0^\infty de^{-(\varepsilon+i\xi)x} = \\ = \frac{1}{\varepsilon+i\xi} \to \frac{-i}{\xi-i0} \quad (\text{сходимость в } \mathscr{S}').\end{aligned}$$

Последнее распределение определено в примере 7.

Пример 16. Найдем преобразование Фурье от характеристической функции $\chi(x) := \chi_{[-1,1]}(x)$ отрезка $[-1,1]$:

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(\xi) = \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\,dx = \frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{i\xi} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(i\xi)^j-(-i\xi)^j}{(i\xi)j!} = \\ = \sum_{j=1}^{\infty}(1-(-1)^j)\frac{(i\xi)^{j-1}}{j!} = \sum_{k\ \text{четно}}\frac{-2(\xi)^k}{(k+1)!}\end{aligned}$$

Результаты предыдущих примеров собраны для наглядности в виде таблицы 1.

Таблица 1

	Функция/ распр.	Гладкость	Пов. на ∞	Преобразование Фурье
1.	δ	распр.	финит.	1
2.	$D^\alpha\delta$	распр.	финит.	ξ^α
3.	$\chi_{[-1,1]}(x)$	неглад.	финит.	$\sum_{k \text{ четно}} \frac{-2\xi^k}{(k+1)!}$
4.	$e^{-\frac{\lvert x\rvert^2}{2}}$	глад.	б. убыв.	$(2\pi)^{n/2}e^{-\frac{\lvert\xi\rvert^2}{2}}$
5.	$e^{-\lvert x\rvert}$	неглад.	б. убыв.	$\frac{2}{1+\xi^2}$
6.	$\theta(x)e^{-\gamma x}$	неглад.	б. убыв.	$\frac{1}{\gamma+i\xi}$
7.	$e^{\pm i\frac{x^2}{2}}$	глад.	неубыв.	$(2\pi)^{1/2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}e^{\mp i\frac{\xi^2}{2}}$
8.	1	глад.	неубыв.	$(2\pi)^n\delta$
9.	x^α	глад.	неубыв.	$(2\pi)^n(-1)^{\lvert\alpha}D_\xi^\alpha\delta$
10.	$\theta(x)$	неглад.	неубыв.	$\varphi \mapsto \text{p.v.}\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ $\mp i\pi\delta(\varphi)$

Глядя на эту таблицу, можно сделать некоторые выводы. Быстрое убывание влечет гладкость преобразования Фурье (3–6)*, а компактность носителя — аналитичность, причем не только на вещественной оси, но и на все комплексной плоскости, даже если речь идет о распределении* (1–3)*. Эти наблюдения формализуются в следующих двух теоремах, доказательства которых можно найти, например, в* [X].

Теорема 10. *Преобразование Фурье распределения $u \in \mathscr{E}'$ с компактным носителем является функцией. Значение этой функции в точке $\xi \in \mathbb{R}^n$ — результат действия распределения u на элемент $e^{i\langle x,\xi\rangle} \in C^\infty$:*

$$\hat{u}(\xi) = u_x(e^{-i\langle x,\xi\rangle}).$$

Более того, $\hat{u}(\zeta)$ определена для любого $\zeta \in \mathbb{C}^n$ и является целой аналитической функцией.

В случае, когда ξ разрешается принимать комплексные значения, принято говорить о преобразовании Фурье — Лапласа. Кроме того, *в этом случае мы будем заменять* ξ *на* ζ*, подразумевая, что* $\zeta = \xi + i\eta$ *по аналогии с* представлением $z = x + iy$.

Из примеров, приведеных в таблице 1, видно, что не только функции и распределения с компактным носителем имеют аналитические преобразования Фурье (4–5). *Где «подвох» в 5 понятно:* $\frac{2}{1+\zeta^2}$ *аналитична везде кроме точек* $\zeta = \pm i$*, в которых она имеет полюсы, т. е. не целая. А вот преобразование Фурье в 7 аналитично на всей плоскости … Оказывается, что компактность носителя дает нечто большее чем аналитичность на всем* $\mathbb{C}^n$*, а именно оценку на рост при* $|\zeta| \to \infty$ *(которой преобразование Фурье из 7 и не удовлетворяет). С учетом этой оценки импликация верна уже в обе стороны.*

Теорема 11 (теорема Пэли — Винера).

1. *Преобразование Фурье — Лапласа распределения $u \in \mathscr{E}'$ с носителем в шаре $B(0,R)$ — целая аналитическая функция, удовлетворяющая оценке*
$$\hat{u}(\zeta) \leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}$$
с некоторыми вещественными C и N. Обратно, любая целая аналитическая функция, удовлетворяющая предыдущей оценке, — преобразование Фурье — Лапласа некоторого распределения с носителем в шаре $B(0,R)$.
2. *Преобразование Фурье — Лапласа функции $u \in C_0^\infty$ с носителем в шаре $B(0,R)$ — целая аналитическая функция, удовлетворяющая оценке*
$$\hat{u}(\zeta) \leqslant C_N(1+|\zeta|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}$$
для любого N с некоторой C_N (своей для каждого N). Обратно, любая целая аналитическая функция, удовлетворяющая предыдущей оценке, — преобразование Фурье — Лапласа некоторой гладкой функции с носителем в шаре $B(0,R)$.

Формулировки для распределения и функции различаются лишь тем, что в случае распределения допускается полиномиальный рост в «вещественном» направлении, а в случае функции мы имеем убывание быстрее любой степени. В «мнимом» направлении в обоих случаях допускается экспоненциальный рост.

Теперь мы можем сказать, в чем дело с $e^{\pm i\frac{\xi^2}{2}}$. Она растет быстрее чем экспоненциально.

8. Теорема Шварца о ядре.

Понятие интегрального оператора хорошо известно: если $\mathscr{K}(x,y)$ — непрерывная функция на $X \times Y$, то определен непрерывный оператор $K : C(Y) \to C(X)$, действующий по формуле
$$Ku(x) = \int\limits_Y \mathscr{K}(x,y)u(y)\,dy.$$
Функция $\mathscr{K}$ называется ядром интегрального опертаора K. Хотя множество интегральных операторов с непрерывными и интегрируемыми ядрами довольно широко, оно не содержит многие интересующие нас операторы: тождественный, дифференциальный,

и т. п. (докажите, что они не могут представляться в указанном виде). Если же в качестве $\mathscr{K}(x,y)$ брать распределение и понимать интеграл как действие распределения на пробную функцию, класс операторов заметно расширяется.

Теорема 1 (теорема Шварца о ядре). *Существует взаимно однозначное соответствие между непрерывными операторами $K : C_0^\infty(Y) \to \mathscr{D}'(X)$ и распределениями $\mathscr{K} \in \mathscr{D}'(X \times Y)$.*

А именно, любое распределение $\mathscr{K} \in \mathscr{D}'(X \times Y)$ определяет непрерывный оператор $K : C_0^\infty(Y) \to \mathscr{D}'(X)$ по формуле

$$\langle K\varphi, \psi\rangle = \mathscr{K}(\psi \otimes \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(Y),\ \psi \in C_0^\infty(X),$$

где $(\psi \otimes \varphi)(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ — тензорное произведение пробных функций.

И обратно, любому непрерывному оператору $K : C_0^\infty(Y) \to \mathscr{D}'(X)$ соответствует единственное распределение $\mathscr{K} \in \mathscr{D}'(X \times Y)$, при помощи которого K записывается указанным образом.

Распределение $\mathscr{K}$ называется ядром оператора K.

Пример 1. Тождественный оператор $I : C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X)$ имеет ядро, записываемое символически как $\delta(x-y)$ и действующее по правилу

$$\Phi(x,y) \mapsto \int\limits_X \Phi(x,x)\,dx, \quad \Phi \in \mathscr{D}'(X \times X).$$

Ядро оператора

$$I + K : u \mapsto u(x) + \int\limits_X \mathscr{K}(x,y)u(y)\,dy,$$

где $\mathscr{K}$ — непрерывная функция, действует так:

$$\Phi(x,y) \mapsto \int\limits_X \Phi(x,x)\,dx + \int\limits_{X\times Y} \mathscr{K}(x,y)\Phi(x,y)\,dx\,dy, \quad \Phi \in \mathscr{D}'(X \times X).$$

Пример 2. Оператор дифференцирования ∂_{x_j} имеет ядро

$$\Phi(x,y) \mapsto \int \bigl(\partial_{y_j}\Phi(x,y)\bigr)|_{y=x}\,dx.$$

Общий дифференциальный оператор

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x)$$

имеет ядро

$$\Phi(x,y) \mapsto \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int a_\alpha(x)\big(\partial_y^\alpha \Phi(x,y)\big)\big|_{y=x}\, dx.$$

Обсуждая псевдодифференциальные операторы и интегральные операторы Фурье, мы будем постоянно работать в терминах их ядер.

2. Подготовительный материал

1. Наводящие соображения.

Легко проверить, что в терминах преобразования Фурье дифференциальный оператор $P = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$ с символом $p(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ действует как умножение

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Естественным обобщением дифференциального оператора будет псевдодифференциальный оператор, т. е. оператор вида (1), где $p(x,\xi)$ уже необязательно полином по ξ, а достаточно произвольная функция из некоторого пространства символов. Основное ограничение на $p(x,\xi)$ — не более чем полиномиальный рост при $|\xi| \to 0$.

По теореме Шварца о ядре оператор $K : C_0^\infty(Y) \to \mathscr{D}'(X)$ имеет ядро $\mathscr{K} \in \mathscr{D}'(X\times Y)$, при помощи которого K записывается в виде

$$K\varphi(\psi) = \langle K, \psi\otimes\varphi\rangle,$$

где $(\psi\otimes\varphi)(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$, или в случае достаточно регулярного ядра

$$K\varphi(x) = \int \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Посмотрим, как выглядит ядро (псевдо)дифференциального оператора. Для этого распишем, что такое $\hat{u}(\xi)$, а затем формально поменяем порядок интегрирования:

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\left(\int e^{-\langle y,\xi\rangle}u(y)\,dy\right)d\xi = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}p(x,\xi)\,d\xi\,u(y)\,dy$$

Отсюда видно, что ядро — это интеграл

$$\mathscr{P}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}p(x,\xi)\,d\xi.$$

Здесь напрашивается еще одно обобщение — добавить y в число переменных, от которых зависит $p(x,\xi)$. Кроме того, можно заменить

$\langle x - y, \xi\rangle$ на произвольную *фазовую функцию* $\varphi(x, y, \xi)$, удовлетворяющую некоторым естественным условиям. Такой переход приводит нас к понятию *интегрального оператора Фурье* и мы приходим к необходимости изучения интегралов вида

$$\int e^{i\varphi(x,y,\xi)} p(x, y, \xi)\, d\xi,$$

которые называются *осцилляторными* в связи с тем, что $e^{i\varphi}$ представляет собой быстро осциллирующую функцию. К изучению осциллирующих интегралов мы приступим в п. 3, сразу же после того, как введем необходимые пространства символов и операции с ними.

Кроме привычных операций сложения и умножения для символов вводится понятие асимптотической суммы. Попробуем объяснить необходимость этой процедуры на следующих примерах.

Важным вопросом в теории дифференциальных уравнений является построение фундаментального решения дифференциального оператора, т. е. такого распределения $E \in \mathscr{D}'$, что $P(D)E = \delta_0$ (для начала возьмем оператор с постоянными коэффициентами). Тогда решение уравнения $Pu = f$ с достаточно хорошей f (например, $f \in \mathscr{E}'$) получается как свертка с E: $u = E * f$. Действительно,

$$Pu = P(E * f) = (PE) * f = \delta * f = f.$$

Если же P имеет переменные коэффициенты, решение, вообще говоря, нельзя представить в виде свертки и приходится говорить об операторе E (например, из $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{D}'$) таком, что

$$PEf = f, \quad f \in \mathscr{E}'.$$

Пример 1. Попробуем построить такой оператор в простейшем случае $P(D) = 1 - \Delta$. Этот оператор соответствует умножению $\hat{u}$ на $1 + |\xi|^2$. В качестве обратного естественно взять оператор

$$Ef(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \frac{1}{1 + |\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

(благо на $1 + |\xi|^2$ можно делить). Действительно,

$$\begin{aligned} PEf &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \widehat{Ef}(\xi)\, d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} (1 + |\xi|^2) \frac{1}{1 + |\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, d\xi = f(x) \end{aligned}$$

Пример 2. Возьмем оператор посложнее:

$$P = -\Delta = \sum_{j=1}^{n} D_j^2.$$

В этом случае мы не можем просто разделить на символ $p(\xi) = |\xi|^2$. Предполагается, что символы ПДО гладкие, иначе мы не сможем легко умножать их. Нам придется вырезать особенность при помощи функции $\overline{\chi}(\xi) := 1 - \chi(\xi)$, где $\chi \in C_0^\infty$, $\chi = 1$ в окрестности $\xi = 0$. Положим

$$Ef(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \frac{1-\chi(\xi)}{|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

В результате получается

$$\begin{aligned} PEf(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} |\xi|^2 \widehat{Ef}(\xi)\, d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} (1-\chi(\xi)) \hat{f}(\xi)\, d\xi = \\ &= f(x) - \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{2}$$

Оператор

$$Rf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi = (g * f)(x),$$

где $g = \mathscr{F}^{-1}\chi$, так что $\chi = \hat{g}$ и, очевидно, $g \in \mathscr{S}$, обладает тем свойством, что переводит любое распределение $f \in \mathscr{E}'$ в гладкую функцию из пространства Шварца ($\chi(\xi)\hat{f}(\xi) \in C_0^\infty \subset \mathscr{S}$). Такие операторы называются (*бесконечно*) *сглаживающими*.

Буква R от английского regularizing.

Вообще, заметим, что свойство ПДО добавлять или забирать гладкость зависит от поведения символа при $|\xi| \to \infty$. Порядком оператора *называется наименьшая возможная степень m в оценке*

$$|p(x,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^m.$$

Действительно, у дифференциального оператора порядка m символ имеет степень m. Бесконечно сглаживающие операторы имеют символы, убывающие на бесконечности быстрее любой степени. В *частности, финитные (по ξ) символы порождают сглаживающие операторы.*

Вернемся к обсуждению (2). *Мы построили оператор E, который дает решение уравнения $Pu = f$ с точностью до бесконечно сглаживающего оператора:*

$$PE = I - R.$$

Во многих случаях нам достаточно будет иметь такой оператор приближенного решения, который называется параметрикс. В случае постоянных коэффициентов можно построить оператор точного решения (см. [X]*). В случае переменных коэффициентов это не так, и приходится довольствоваться параметриксом. Хотя, имея параметрикс, и в этом случае* **локально** *можно избавиться от R.*

Наконец, посмотрим, какие дополнительные проблемы возникают в случае переменных коэффициентов.

Пример 3. Пусть

$$P(x, D) = -c(x)\Delta = \sum_{j=1}^{n} c(x) D_j^2$$

с $c(x) > 0$ всюду, соответственно $p(x, \xi) = c(x)|\xi|^2$. Попробуем построить параметрикс в виде

$$Ef(x) = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x, \xi)\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

выбирая $a(x, \xi) = \dfrac{1 - \chi(\xi)}{p(x, \xi)} = \dfrac{1 - \chi(\xi)}{c(x)|\xi|^2}$:

$$PEf(x) = \int P\big(e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x, \xi)\big)\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^n} =$$

$$= \int e^{i\langle x,\xi\rangle} c(x)\Big(|\xi|^2 a(x, \xi) + \sum 2\xi_j D_{x_j} a(x, \xi) + D_{x_j}^2 a(x, \xi)\Big)\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^n} =$$

$$= \int e^{i\langle x,\xi\rangle}(1 - \chi(\xi))\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^n} +$$

$$+ \int e^{i\langle x,\xi\rangle} c(x)\left[\frac{1 - \chi(\xi)}{|\xi|^2}\sum\Big(2\xi_j D_{x_j} c^{-1}(x) + D_{x_j}^2 c^{-1}(x)\Big)\right]\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^n} =$$

$$= f(x) - Rf + R_{-1}f.$$

Здесь R тот же самый, что и раньше, а R_{-1} — оператор порядка -1 (т. е. повышающий гладкость на единицу), поскольку выражение в прямых скобках оценивается величиной $(1+|\xi|)^{-1}$. Если к первоначальному символу $a_{-2}(x,\xi) := \dfrac{1-\chi(\xi)}{c(x)|\xi|^2}$ порядка -2 добавить символ $a_{-3}(x,\xi)$ порядка -3 и положить

$$a(x,\xi) := a_{-2}(x,\xi) + a_{-3}(x,\xi),$$

то появляются дополнительные возможности. Запишем

$$PEf(x) = f(x) - Rf(x) + \\ + \int e^{i\langle x,\xi\rangle} c(x)\Big(|\xi|^2 a_{-3} + \sum 2\xi_j D_{x_j} a_{-2}\Big)\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^n} + R_{-2}f(x)$$

(мы выписываем явно только слагаемые порядка -1, собирая остальные в $R_{-2}f(x)$). Выбирая

$$a_{-3}(x,\xi) := \frac{\sum 2\xi_j D_{x_j} a_{-2}(x,\xi)}{|\xi|^2}$$

так, чтобы обратить в ноль выражение в скобках, получаем

$$PEf = f - Rf + R_{-2}f.$$

Добавляя следующие «поправки» к символу, мы постепенно снижаем порядок остатка $-R + R_{-m}$. Если бы можно было устроить предельный переход, мы бы получили параметрикс, т. е. оператор E такой, что

$$PEf = f - Rf + R_{-\infty}f.$$

Однако, сумма

$$a_{-2}(x,\xi) + a_{-3}(x,\xi) + a_{-4}(x,\xi) + \cdots$$

может не существовать в обычном смысле. И здесь нам потребуется асимптотическое суммирование символов. *При добавлении очередного a_{-m} мы будем умножать его на срезку $1-\chi_m(\xi)$, которая обращается в нуль в шаре достаточно большого радиуса. Эта процедура, очевидно, не портит поведение при $|\xi|\to\infty$ (которое нам собственно и важно) и в то же время дает по-настоящему сходящийся ряд. Этот ряд и есть асимптотическая сумма символов. При этом пишут*

$$a(x,\xi) \sim a_{-2}(x,\xi) + a_{-3}(x,\xi) + a_{-4}(x,\xi) + \cdots$$

ПДО с таким символом и будет искомым параметриксом.

В следующих пунктах мы придадим точный смысл всем проделанным выше манипуляциям.

2. Пространства символов.

Как отмечено выше, основным условием, характеризующим символы, является не более чем степенное возрастание. Кроме того, при дифференцировании скорость возрастания/убывания изменяется.

Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $N \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *Символом порядка m типа (ρ, δ)* называется такая функция $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$, что для любого компакта $K \Subset X$ выполнена оценка

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x,\theta)\right| \leqslant C(1+|\theta|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}, \quad (x,\theta) \in X \times \mathbb{R}^N,$$

с некоторой константой C, зависящей от K и мультииндексов α, β. Пространство таких символов будем обозначать через $S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Выше символы зависели от x, y и ξ. На самом деле важно различать частотную переменную и остальные переменные. Поэтому при изучении символов мы будем рассматривать x и y как одну переменную x, а вместо ξ, которая ассоциируется у нас с независимой переменной преобразования Фурье и имеет ту же размерность, что и x, будем использовать букву θ. В общем x и θ имеют разные размерности n и N, которые не обязательно связаны соотношением $n = 2N$, как в предыдущих примерах. Мультииндексы α и β имеют соответственно разную длину.

Как видно из определения, дифференцирование по θ улучшает убывание символа на порядок ρ, а дифференцирование по x ухудшает на порядок δ. Для наших целей вполне можно было бы ограничиться «основным» случаем $\rho = 1$, $\delta = 0$, однако ничего не стоит рассмотреть общую ситуацию.

Далее там, где это несущественно, мы не будем указывать, на каком множестве определены символы, т. е. будем писать $S^m_{\rho,\delta}$ или даже S^m вместо $S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Перечислим основные свойства символов.

Теорема 1.

1. *$S^m_{\rho,\delta} \subset S^{m'}_{\rho',\delta'}$ при $m \leqslant m'$, $\rho \leqslant \rho'$, $\delta \geqslant \delta'$.*
2. *$\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta$ — непрерывный оператор из $S^m_{\rho,\delta}$ в $S^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}_{\rho,\delta}$.*

3. *Если* $a_1 \in S^{m_1}_{\rho,\delta}$ *и* $a_2 \in S^{m_2}_{\rho,\delta}$, *то* $a_1 a_2 \in S^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}$, *причем билинейное отображение* $a_1,\ a_2 \mapsto a_1 a_2$ *непрерывно.*

Доказательство. Первые два свойства очевидны. Третье доказывается напосредственно с использованием формулы Лейбница.

Пример 1. Если $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ положительно однородна степени m по частотной переменной, т. е.

$$a(x, \lambda\theta) = \lambda^m a(x,\theta), \quad x \in X,\ |\theta| \geqslant 1,\ \lambda > 1,$$

то $a \in S^m_{1,0}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Там, где речь идет о символах, однородность всегда будет означать однородность вне некоторой окрестности $\theta = 0$, *например, при* $|\theta| \geqslant 1$. *Заметим, что однородную функцию достаточно задавать на единичной сфере.*

Действительно, в силу однородности $a(x,\theta) = |\theta|^m a\bigl(x, \theta/|\theta|\bigr)$ при больших $|\theta|$. Дифференцирование по формуле Лейбница дает

$$\partial^\beta_\theta a(x,\theta) = \sum_{\beta'+\beta''=\beta} C_{\beta'\beta''} \bigl(\partial^{\beta'}_\theta |\theta|^m\bigr) \Bigl(\partial^{\beta''}_\theta a\Bigl(x, \frac{\theta}{|\theta|}\Bigr)\Bigr),$$

после чего по индукции можно доказать, что

$$\bigl|\partial^{\beta'}_\theta |\theta|^m\bigr| \leqslant C(1+|\theta|)^{m-|\beta'|},$$

а $\partial^{\beta''}_\theta a\bigl(x, \frac{\theta}{|\theta|}\bigr)$ ограничена при $x \in K$ и $|\theta| \geqslant 1$.

Во п. 1 мы встретились с проблемой суммирования бесконечного числа символов, порядки которых стремятся к $-\infty$. *Следующая теорема дает строгое решение этой задачи.*

Теорема 2. *Пусть* $a_j \in S^{m_j}_{\rho,\delta}$, $j = 0,1,2,\ldots$, *и* $m_j \to -\infty$ *при* $j \to \infty$. *Тогда существует* $a \in S^{m_0}_{\rho,\delta}$ *такой, что*

$$a - \sum_{j=0}^{k} a_j \in S^{m_{k+1}}_{\rho,\delta}, \tag{1}$$

причем a *определяется единственным образом по модулю* $S^{-\infty}$, *т. е. с точностью до элемента* $S^{-\infty}$. *В этой ситуации говорят, что* a —

асимптотическая сумма ряда $\sum a_j$ *или что* $\sum a_j$ *— асимптотическое разложение* a *и пишут*

$$a \sim \sum a_j.$$

Теорема говорит о том, что для любого формального ряда существует подходящий фактический символ.

Такая конструкция используется при доказательстве леммы Бореля: Для любой последовательности $a_\alpha \in \mathbb{R}$ *существует такая функция* $f \in C^\infty$*, что* $a_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!}\partial_x^\alpha f(0)$*, т. е. такая что* a_α *— коэффициенты в разложении* $f(x)$ *по формуле Тейлора. При этом ряд* $\sum a_\alpha x^\alpha$ *может оказаться расходящимся!*

Доказательство.

Суммируя символы, мы делаем всё по модулю $S^{-\infty}$*. Вводя срезки* $\chi(\theta)$ *и* $\overline{\chi}(\theta) = 1 - \chi(\theta)$*, любой символ можно представить в виде «существенной» части и «довеска» из* $S^{-\infty}$*:*

$$a(x,\theta) = a(x,\theta)\overline{\chi}(\theta) + a(x,\theta)\chi(\theta).$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы подправить члены формального ряда $\sum a_j$ *так, чтобы получить по-настоящему сходящийся ряд, который сходился бы в* $S^{m_0}_{\rho,\delta}$ *и обладал всеми необходимыми свойствами. Мы сделаем это, умножая каждый член на срезку* $\overline{\chi}_j(\theta) = 1 - \chi_j(\theta)$*, где* $\chi_j(\theta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *и* $\chi_j = 1$ *в шаре* $B(0, r_j)$*.*

Дело в том, что порядки m_j *стремятся к* $-\infty$*, и при больших* j *символы стремятся к* 0 *при* $|\theta| \to \infty$*. Таким образом, мы вырежем подходящую окрестность* $\theta = 0$ *у каждого символа, а в остальных точках сходимость получится за счет стремления* $a_j(x,\theta)$ *к нулю при* $|\theta| \to 0$*.*

Итак, символ ищется в виде

$$a(x,\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\chi}_j(\theta) a_j(x,\theta).$$

Строго говоря, по критерию Коши для сходимости ряда нужно, чтобы хвост сходился к нулю в соответствующей топологии, т. е. для любых

$K \Subset X$, α и β

$$\sup_{K\times\mathbb{R}^N} \frac{\left|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \sum\limits_{j=k}^{k+p} \overline{\chi}_j(\theta) a_j(x,\theta)\right|}{(1+|\theta|)^{m_0-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}} \to 0, \quad k,p\to\infty.$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. По формуле Лейбница

$$\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \big(\overline{\chi}_j(\theta) a_j(x,\theta)\big) = \sum_{\beta'+\beta''=\beta} C_{\beta'\beta''} \big(\partial_\theta^{\beta'} \overline{\chi}_j(\theta)\big) \big(\partial_x^\alpha \partial_\theta^{\beta''} a_j(x,\theta)\big).$$

По построению первая скобка ограничена константой, зависящей от j, и обращается в нуль при $|\theta| \leqslant r_j$, т. е., оценивая, можно считать, что $|\theta| \geqslant r_j$, а для второй по определению есть оценка

$$\sup_K \big|\partial_x^\alpha \partial_\theta^{\beta''} a_j(x,\theta)\big| \leqslant C(1+|\theta|)^{m_j-\rho|\beta''|+\delta|\alpha|},$$

где C зависит от K, α, β и j.

Итак,

$$\begin{aligned}\sup_{K\times\mathbb{R}^N} \frac{\big|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \big(\overline{\chi}_j(\theta) a_j(x,\theta)\big)\big|}{(1+|\theta|)^{m_0-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}} &\leqslant \\ &\leqslant C(1+|\theta|)^{m_j-\rho|\beta''|+\delta|\alpha|-(m_0-\rho|\beta|+\delta|\alpha|)} \leqslant \\ &\leqslant C(1+r_j)^{m_j-m_0+\rho|\beta|} \leqslant \frac{C}{r_j}\end{aligned}$$

для достаточно больших j, таких что показатель становится меньше -1, а C зависит от K, α и β. Отсюда уже видно, что если выбрать в качестве r_j достаточно быстро возрастающую последовательность, то у нашего ряда будет сходящаяся мажоранта.

Однако полученные $\overline{\chi}_j$ подойдут только для фиксированных K, α и β, в то время как нам нужна «универсальная» конструкция. Для этого воспользуемся диагональным методом. Пусть K_j — последовательность компактов, исчерпывающая X, т. е. $X = \bigcup K_j$. Пусть C_j — константа в (2), соответствующая K_j и всевозможным α и β таким, что $|\alpha|+|\beta| = j$. Подберем r_j так, чтобы ряд $\sum C_j r_j^{-1}$ сходился, например, $C_j r_j^{-1} \leqslant \frac{1}{2^j}$. Выбранные таким образом $\overline{\chi}_j$ подходят для любого K и любых α и β.

Для завершения доказательства осталось проверить, что построенный $a(x,\theta)$ обладает свойством (1) и единствен по модулю $S^{-\infty}$.

Имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\overline{\chi}_j a_j - \sum_{j=0}^{k} a_j = \sum_{j+0}^{k}(\overline{\chi}_j - 1)a_j + \sum_{j=k+1}^{\infty}\overline{\chi}_j a_j = \sum_{j=0}^{k}\chi_j a_j + \sum_{j=k+1}^{\infty}\overline{\chi}_j a_j.$$

Первая сумма лежит в $S^{-\infty}$, а вторая в $S^{m_{k+1}}_{\rho,\delta}$ по построению. Единственность также достаточно очевидна. Если $a'(x,\theta)$ — другой символ со свойством

$$a' - \sum_{j=0}^{k} a_j \in S^{m_{k+1}}_{\rho,\delta},$$

то

$$a - a' = a - \sum_{j=0}^{k} a_j + \sum_{j=0}^{k} a_j - a' \in S^{m_{k+1}}_{\rho,\delta}$$

для любого k и, значит, $a - a' \in S^{-\infty}$.

На практике часто приходится проверять асимптотическое равенство $a \sim \sum a_j$ для заданных a и a_j. По определению мы должны установить оценки вида

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \left(a - \sum_{j=0}^{k} a_j\right)\right| \leqslant (1+|\theta|)^{m_{k+1}-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

для всех производных. Оказывается, если априори известно, что функция $a(x,\theta)$ достаточно хорошая, то достаточно установить предыдущую оценку только для $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Теорема 3 [GS, Proposition 1.9; X3]**.** *Пусть $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ и $a_j \in S^{m_j}_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, причем $m_j \to -\infty$. Предположим, что*

1) *для всякого $K \Subset X$, α и β*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x,\theta)\right| \leqslant (1+|\theta|)^{M}, \quad (x,\theta) \in K \times \mathbb{R}^N,$$

где C зависит от K, α и β, а M зависит от α и β;

2) *существует последовательность $m'_k \to -\infty$ такая что для любого $K \Subset X$ и k*

$$\left|a - \sum_{j=0}^{k} a_j\right| \leqslant (1+|\theta|)^{m'_k}, \quad (x,\theta) \in K \times \mathbb{R}^N,$$

где C зависит от K и k.

Тогда $a \sim \sum a_j$.

В заключение отметим свойство плотности для пространств символов. Как известно, C_0^∞ *плотно в* C^k, L_p, $\mathscr{D}$, *и т. д. Для* $S^m_{\rho,\sigma}$ *имеет место аналогичное свойство, однако с одной оговоркой относительно топологии.*

Теорема 4 [GS, Proposition 1.7; X3]**.** *Пространство* $S^{-\infty}$ *плотно в* $S^m_{\rho,\sigma}$ *в топологии пространства* $S^{m'}_{\rho,\sigma}$, *где* $m' > m$, *(т. е. в топологии любого большего пространства).*

Мы будем иногда пользоваться этим свойством. Кстати, используя его, можно дать еще одно доказательство теоремы 2 (*как?*).

3. Осцилляторные интегралы.

Ядра псевдодифференциальных опертаоров (ПДО) и интегральных операторов Фурье (ИОФ) представляют собой (по определению) осцилляторные интегралы

$$I_{\varphi,a}(x,y) = \int e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta)\, d\theta.$$

Цель этого пункта — придать строгий смысл этому интегралу для любых $a \in S^m_{\rho,\sigma}$, $m \in \mathbb{R}$. *Оказывается, при больших* m *осцилляторный интеграл определяется лишь как распределение.*

Как и при рассмотрении символов, мы будем воспринимать x *и* y *как одну переменную* x.

Для строгого определения осцилляторного интеграла необходимо понятие фазовой функции.

Определение 1. Гладкая функция $\varphi \in C^\infty(X \times \dot{\mathbb{R}}^N)$ называется *фазовой функцией*, если

1) $\operatorname{Im}\varphi(x,\theta) \geqslant 0$ для всех $(x,\theta) \in X \times \dot{\mathbb{R}}^N$;
2) $\varphi(x,\lambda\theta) = \lambda\varphi(x,\theta)$ для всех $(x,\theta) \in X \times \dot{\mathbb{R}}^N$, $\lambda > 0$, (положительная однородность);
3) $d\varphi = \sum_1^n \varphi_{x_j} dx_j + \sum_1^N \varphi_{\theta_j} d\theta_j \neq 0$ для всех $(x,\theta) \in X \times \dot{\mathbb{R}}^N$;

Первое свойство исключает экспоненциальный рост. Второе и третье позволяют, как мы увидим, определить $I_{\varphi,a}$ при помощи интегрирования по частям.

Заметим, что фазовая функция положительно однородная и вместе с тем гладкая. Поэтому ее естественно определять по θ не на всем $\mathbb{R}^N$ а на $\dot{\mathbb{R}}^N = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Выполнение условий 1–3 также требуется при всех $\theta \neq 0$!

Пример 1. Функция $\varphi(x,\xi) = \langle x,\xi\rangle$ удовлетворяет условиям 1–3 и тем самым — фазовая функция.

Предположим, что $\varphi(x,\theta)$ — фазовая функция, а $a \in S^m_{\rho,\sigma}$, где $m < -N$. Тогда интеграл

$$I_{\varphi,a}(x) := \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\, d\theta$$

сходится. Действительно, $|a(x,\theta)| \leqslant \dfrac{C}{(1+|\theta|)^{N+\varepsilon}}$, где $\varepsilon = -N - m > 0$. Более того, пользуясь однородностью $\varphi(x,\theta)$ по θ, можно показать, что если $k + m < -N$, то $I_{\varphi,a} \in C^k(X)$ (докажите).

Чтобы понять, как определить $I_{\varphi,a}$ в общем случае, рассмотрим простой пример.

Пусть $\varphi(x,\xi) = \langle x,\xi\rangle$, $a(x,\xi) \equiv 1$. Тогда $I_{\varphi,a}$ с точностью до множителя и замены x на $-x$, которое здесь несущественно, — преобразование Фурье от умеренного распределения $u(x) = 1$, которое, как известно, равно $2\pi\delta$:

$$2\pi\delta = I_{\varphi,a} = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} 1\, d\xi.$$

По определению преобразования Фурье

$$\langle I_{\varphi,a}, \psi\rangle = \langle \widehat{1}, \psi\rangle = \langle 1, \widehat{\psi}\rangle = \int \left(\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(x)\, dx \right) d\xi$$

Заметим, что

$$(1+\partial_x) e^{i\langle x,\xi\rangle} = (1+i\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}$$

т. е. оператор $L = \dfrac{\partial_x + 1}{(i\xi+1)}$ обладает свойством $L(e^{i\langle x,\xi\rangle}) = e^{i\langle x,\xi\rangle}$ и, значит,

$$\begin{aligned}\int \left(\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(x)\, dx \right) d\xi &= \int \left(\int L^2(e^{i\langle x,\xi\rangle}) \psi(x)\, dx \right) d\xi \\ &= \iint e^{i\langle x,\xi\rangle} ({}^tL)^2 \psi(x)\, dx\, d\xi = \iint e^{i\langle x,\xi\rangle} \frac{(1-\partial_x)^2}{(i\xi+1)^2} \psi(x)\, dx\, d\xi.\end{aligned}$$

Тем самым, вводя оператор L и интегрируя по частям, мы получили двойной интеграл, сходящийся в обычном смысле!

Отсюда видно, что нам нужен аналогичный оператор L для произвольной фазовой функции φ, коэффициенты которого обеспечивали бы убывание по θ. Однако удобнее считать, что мы строим транспонированный оператор ${}^tL$, который определяется равенством

$$\iint (Lf)(x,\theta)g(x,\theta)\,dx\,d\theta = \iint f(x,\theta)({}^tLg)(x,\theta)\,dx\,d\theta$$

(без комплексного сопряжения).

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x,\theta)$ — фазовая функция. Существуют символы $a_k \in S^0_{1,0}$, $b_j \in S^{-1}_{1,0}$, $c \in S^{-1}_{1,0}$ такие, что дифференциальный оператор*

$$L = \sum_1^N a_k(x,\theta)\partial_{\theta_k} + \sum_1^n b_j(x,\theta)\partial_{x_j} + c(x,\theta)$$

обладает свойством

$${}^tL(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}.$$

Доказательство. Будем строить транспонированный оператор ${}^tL$, который, очевидно, имеет такой же вид, как и L:

$${}^tL = \sum_1^N a_k'(x,\theta)\partial_{\theta_k} + \sum_1^n b_j'(x,\theta)\partial_{x_j} + c(x,\theta).$$

Положим

$${}^tL := \frac{1-\chi(\theta)}{i\Phi(x,H)}\left(\sum_1^N |\theta|^2\overline{\varphi}_{\theta_k}\partial_{\theta_k} + \sum_1^n \overline{\varphi}_{x_j}\partial_{x_j}\right) + \chi(\theta),$$

где

$$\Phi(x,\theta) = \sum_1^N |\theta|^2\overline{\varphi}_{\theta_k}\varphi_{\theta_k} + \sum_1^n \overline{\varphi}_{x_j}\varphi_{x_j},$$

а $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ равна единице в окрестности $\theta = 0$. Непосредственно проверяется, что ${}^tL$ — искомый.

Множитель $|\theta|^2$ нужен для того, чтобы $\Phi(x,\theta)$ была однородной степени 2 по θ. Кроме того, по условию 3 из определения фазовой *функции имеем $\Phi(x,\theta)\neq 0$ при всех $\theta\neq 0$. Возможная особенность в нуле вырезается при помощи срезки $\chi(\theta)$.*

Очевидно, что

$$a'_k(x,\theta)=\frac{1-\chi(\theta)}{i\Phi(x,\theta)}|\theta|^2\overline{\varphi}_{\theta_k}\in S^0_{1,0},$$
$$b'_j(x,\theta)=\frac{1-\chi(\theta)}{i\Phi(x,\theta)}\overline{\varphi}_{x_j}\in S^{-1}_{1,0},$$
$$c'(x,\theta)\in S^{-\infty}.$$

Наконец,

$$a_k=a'_k,\quad b_j=b'_j,\quad c=c'-\sum_1^N\frac{\partial}{\partial\theta_k}a'_k-\sum_1^n\frac{\partial}{\partial x_j}b'_j\in S^{-1}.$$

Теорема доказана.

Предположим, что $a\in S^{-\infty}$, а $\psi\in C_0^\infty(X)$ — пробная функция. Тогда $I_{\varphi,a}$ определен как функция и для любого $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\langle I_{\varphi,a},\psi\rangle&=\iint e^{i\varphi}a(x,\theta)\psi(x)\,d\theta\,dx=\\&=\iint {}^tL^k(e^{i\varphi})a(x,\theta)\psi(x)\,d\theta\,dx=\\&=\iint e^{i\varphi}L^k\bigl(a(x,\theta)\psi(x)\bigr)\,d\theta\,dx\end{aligned}$$

(все интегралы сходятся абсолютно как двойные).

Пусть m произвольно и $a\in S^m_{\rho,\sigma}$. Тогда $L^k(a(x,\theta)\psi(x))\in S^{m-kt}_{\rho,\sigma}$, где $t=\min(\rho,1-\sigma)$. Действительно, $a\psi\in S^m_{\rho,\sigma}$, а порядки слагаемых в

$$L(a\psi)=\sum a_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}(a\psi)+\sum b_j\frac{\partial}{\partial x_j}(a\psi)+ca\psi$$

равны соответственно

$$(0+(-\rho)+m),\quad(-1+\delta+m),\quad(-1+m)$$

и не превосходят $m-\min(\rho,1-\sigma)=m-t$. Далее по индукции.

В дальнейшем нам нужно, чтобы $t>0$. Для этого предположим, что $\delta<1$ и $\rho>0$, и будем считать, что эти условия выполнены всегда.

Определение 2. Пусть $a \in S^m_{\rho,\sigma}$. Распределение $I_{\varphi,a}$ определяется следующим образом. Найдем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $m - kt < -N$ и для $\psi \in C_0^\infty(X)$ положим

$$\langle I_{\varphi,a}, \psi \rangle := \iint e^{i\varphi} L^k(a\psi)\, dx\, d\theta.$$

Однако определение зависит от k и его корректность требует обоснования. Обозначим временно через $I^k_{a\varphi}$ распределение из определения 2 с конкретным k. Основными моментами здесь являются плотность $S^{-\infty}$ в $S^m_{\rho,\sigma}$ и непрерывность:

1) *для $a \in S^{-\infty}$ распределения $I^{k'}_{a\varphi}$ и $I^{k''}_{a\varphi}$ с разными k' и k'' совпадают;*
2) *??отображение $a \mapsto I^k_{a\varphi}$ непрерывно в смысле $S^m_{\rho,\sigma} \to C$ при условии, что $m < -N$;* **?!**
3) *пространство $S^{-\infty}$ плотно в $S^m_{\rho,\sigma}$ в топологии $S^{m'}_{\rho,\sigma}$, $m' > m$, (теорема 4 предыдущего пункта).*

Применение этих утверждений показывает, что определение корректно и не зависит от числа k.

Даже в случае, когда m велико, формально пишут

$$I_{\varphi,a}(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\, d\theta,$$
$$\langle I_{\varphi,a}, \psi \rangle = \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) \psi(x)\, dx\, d\theta.$$

Заметим наконец, что, проделав некоторую работу, можно было бы определить $I_{\varphi,a}$ при помощи предельного перехода в пространстве распределений:

$$I_{\varphi,a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{i\varphi(x,\theta)} \chi(\varepsilon\theta) a(x,\theta)\, d\theta,$$

где $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $\chi(0) = 1$ (докажите эквивалентность определений).

Одной из характеристик любого распределения является его сингулярный носитель. Оказывается, сингулярный носитель распределения представленного в виде осцилляторного интеграла находится (точнее, локализуется) довольно просто.

Определение 3. *Критическим множеством* фазовой функции $\varphi(x,\theta)$ называется множество

$$C_\varphi := \{(x,\theta) \in X \times \dot{\mathbb{R}}^N \mid d_\theta\varphi(x,\theta) = 0\}.$$

Здесь и далее $d_\theta\varphi(x,\theta) = 0$ означает, что $\varphi_{\theta_1}(x,\theta) = \varphi_{\theta_2}(x,\theta) = \dots = \varphi_{\theta_N}(x,\theta) = 0$.

Можно сразу заметить, что если соответствующая матрица Якоби имеет максимальный ранг, то C_φ представляет собой многообразие размерности $n + N - N = n$.

Определение 4. *Естественная проекция* $\Pi : X \times \dot{\mathbb{R}}^N \to X$ действует по правилу $\Pi : (x,\theta) \mapsto x$.

Теорема 2. $\operatorname{sing\,supp} I_{\varphi,a} \subset \Pi C_\varphi$.

Доказательство. По определению сингулярного носителя нужно показать для любой $\psi \in C_0^\infty$ такой, что $\operatorname{supp}\psi \cap \Pi C_\varphi = \varnothing$, верно

$$\langle I_{\varphi,a}, \psi\rangle = \int u(x)\psi(x)\,dx$$

с некоторой гладкой $u \in C^\infty$.

По определению для достаточно большого k

$$\langle I_{\varphi,a}, \psi\rangle = \iint e^{i\varphi} L^k(a\psi)\,dx\,d\theta.$$

Заметим, что, повторяя предыдущие построения в нашем случае, вместо L с тем же успехом можно использовать любой оператор для которого

1) ${}^tL(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$ на $\operatorname{supp}(a\psi)$;

2) применение L понижает порядок по θ.

Поскольку $(\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_N}) \neq 0$ на $\operatorname{supp}(a\psi)$ (иначе ΠC_φ и $\operatorname{supp}\psi$ имели бы общую точку), в качестве L можно взять оператор вида $L = \sum a_k \partial_{\theta_k} + c$ (без дифференцирования по x), а именно

$${}^tL = \frac{(1-\chi(\theta))}{\sum \varphi_{\theta_k}\overline{\varphi}_{\theta_k}} \sum_1^N \overline{\varphi}_{\theta_k}\partial_{\theta_k} + \chi(\theta).$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\langle I_{\varphi,a}, \psi\rangle = \iint ({}^tL)^k(e^{i\varphi})a(x,\theta)\psi(x)\,dx\,d\theta =$$
$$= \iint e^{i\varphi} L^k(a(x,\theta))\psi(x)\,dx\,d\theta = \int \left(\int e^{i\varphi} L^k(a(x,\theta))\,d\theta\right)\psi(x)\,dx$$

для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$. Здесь

$$u(x) = \int e^{i\varphi} L^k(a(x,\theta))\, d\theta$$

как функция, рассматриваемая в окрестности $\operatorname{supp}\psi$, принадлежит C^r, где r удовлетворяет неравенству $m - kt + r < -N$. Поскольку k произвольно, $u(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности $\operatorname{supp}\psi$.

Пример 2. Пусть $\varphi(x,\xi) = \langle x, \xi\rangle$. Тогда $d\varphi \sim (\xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n) \neq 0$ при $\xi \neq 0$. Таким образом, $\varphi(x,\xi)$ — фазовая функция с критическим множеством $C_\varphi = \{(x,\xi) \mid x = 0,\ \xi \text{ произвольно}\}$. Значит, сингулярный носитель любого распределения вида

$$I_{\varphi,a} = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x,\xi)\, d\xi$$

состоит не более чем из одной точки 0: $\operatorname{sing\,supp} I_{\varphi,a} \subset \{0\}$. В частности,

$$\delta = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} 1\, d\xi$$

и $\operatorname{sing\,supp}\delta \subset \{0\}$.

Пример 3. Пусть $\varphi(x,y,\xi) = \langle x - y, \xi\rangle$. Как и в предыдущем примере, φ — фазовая функция и $C_\varphi = \{(x,y,\xi) \mid x = y,\ \xi \text{ любое}\}$. В данном случае $I_{\varphi,a} = \int e^{i\varphi} a\, d\theta$ задает ядро ПДО. Заметим, что особенность ядра лежит на диагонали: $\operatorname{sing\,supp} I_{\varphi,a} \subset \Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$.

Пример 4 (линейные по θ фазовые функции). Пусть $\varphi(x,\theta) = \langle \Phi(x), \theta\rangle$, где $\Phi : X \to \mathbb{R}^N$ — гладкая функция с компонентами $\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x)$.

Выясним, при каких условиях φ — фазовая функция. Имеем

$$\varphi'(x,\theta) = \left(\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \theta\right\rangle, \dots, \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}, \theta\right\rangle, \quad \Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x)\right).$$

Первые два условия из определения фазовой функция, очевидно, выполняются, а третье выполняется в следующих двух случаях:

1) $(\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x)) \neq 0$ всюду, однако этот случай не представляет интереса, так как здесь $C_\varphi = \varnothing$ и $I_{\varphi,a}$ — просто гладкая функция;
2) $(\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x))$ может обращаться в нуль в некоторых точках x, но в них отлична от нуля первая половина φ':

$$\left(\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \theta\right\rangle, \dots, \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}, \theta\right\rangle\right) \neq 0, \quad \theta \neq 0.$$

Это неравенство с необходимостью означает, что

1) $N \leqslant n$;
2) система
$$\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \theta \right\rangle = 0$$
не имеет нетривиальных решений, т. е. ранг матрицы $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ максимален.

Рассмотрим теперь частный случай $N = 1$ и $a \equiv \dfrac{1}{2\pi}$, т. е.
$$I_{\varphi,a} = \int e^{i\Phi(x)\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$
В этом случае второе условие означает, что градиент $\Phi'(x)$ отличен от нуля везде, где $\Phi(x) = 0$. Критическое множество равно $C_\varphi = \{(x,\theta) \mid \Phi(x) = 0\}$, и сингулярный носитель $I_{\varphi,a}$ сосредоточен на гиперповерхности $\Phi^{-1}(0)$.

Выясним, что представляет собой распределение $I_{\varphi,a}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in \Phi^{-1}(0)$ и достаточно малую окрестность X_0 этой точки, которая однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей, например, $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Для $\psi \in C_0^\infty(X_0)$, используя тот факт, что
$$I_{\varphi,a} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \text{в } \mathscr{D}'}} \int e^{i\varphi}\chi(\varepsilon\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad \chi \in \mathscr{S}, \quad \chi(0) = 1,$$
запишем
$$\langle I_{\varphi,a}, \psi\rangle = \left\langle \lim \int e^{i\Phi(x)\theta}\chi(\varepsilon\theta)\frac{d\theta}{2\pi}, \psi \right\rangle =$$
$$= \lim \left\langle \int e^{i\Phi(x)\theta}\chi(\varepsilon\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}, \psi \right\rangle = \lim \int \left(\int e^{i\Phi(x)\theta}\psi(x)\,dx \right) \chi(\varepsilon\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$
Введем новую систему координат $y = y(x)$:
$$y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = \Phi(x).$$
Заметим сразу, что в этой системе координат точки поверхности $\Phi^{-1}(0)$ имеют вид $(y', 0)$ и $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right| = \Phi_{x_n}(x)$. Рассмотрим интеграл в скобках:
$$\int e^{i\Phi(x)\theta}\psi(x)\,dx = \int e^{iy_n\theta}\psi(x(y))\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|\,dy$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iy_n\theta}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(x(y', y_n))\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|\,dy' \right) dy_n = \int e^{iy_n\theta}\Psi(y_n)\,dy_n,$$

где $\Psi(y_n)$ — интеграл в скобках. Вернемся к $\langle I_{\varphi,a},\psi\rangle$:

$$\langle I_{\varphi,a},\psi\rangle = \lim \iint e^{iy_n\theta}\chi(\varepsilon\theta)\Psi(y_n)\,dy_n\,d\theta \to \Psi(0).$$

Осталось вычислить

$$\Psi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(x(y',0)) \left|\frac{\partial x}{\partial y}(x(y',0))\right| dy'.$$

Заметим, что $y' \mapsto x(y',0)$ — параметризация $\Phi^{-1}(0)$, т. е. $\Phi(x(y',0)) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, x_n(y',0)) = 0$. Дифференцируя это равенство и суммируя с квадратом, последовательно получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_j} = 0;$$

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right)^2 = \sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right)^2\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right)^2;$$

$$|\Phi'| = |\Phi_{x_n}|\left(1 + \sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\Psi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(x(y',0))|\Phi_{x_n}(x(y',0))|^{-1}\,dy' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\psi(x(y',0))}{|\Phi'(x(y',0))|}\left(1 + \sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right)^2\right)^{1/2} dy' = \int\limits_{\Phi^{-1}(0)} \frac{\psi(x)}{|\Phi'(x)|}\,dS.$$

Наконец, пользуясь разбиением единицы, можно показать, что $I_{\varphi,a}$ действует на любую пробную функцию $\psi \in C_0^\infty$ как интеграл по поверхности с весом $|\Phi'|^{-1}$.

Можно аналогично рассмотреть случай $N = 2$:

$$I_{\varphi,a} = \int e^{i(\Phi_1(x)\theta_1 + \Phi_2(x)\theta_2)}a(x,\theta)\,d\theta.$$

В этом случае сингулярный носитель будет содержаться в множестве $\{x \mid \Phi_1(x) = \Phi_2(x) = 0\}$. Если $n = 3$ и Φ_1', Φ_2' линейно независимы, то это просто кривая (выясните, как действует $I_{\varphi,a}$ в таком случае).

При помощи осцилляторных интегралов можно представить много полезных распределений, сингулярный носитель которых — гладкое вложенное многообразие размерности $d = n - N$.

Пример 5. Пусть $H(\xi)$ — однородная гладкая функция, заданная при $\xi \neq 0$. Тогда $\varphi(x, \xi) = \langle x, \xi \rangle - H(\xi)$ — фазовая функция с критическим множеством

$$C_\varphi = \Big\{ (x, \xi) \mid x = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi} \Big\}.$$

В некотором смысле это фазовая функция наиболее общего вида.

В частности,

- При $H \equiv 0$ приходим к известной уже функции $\varphi(x, \xi) = \langle x, \xi \rangle$.
- При $H(\xi) = |\xi|$ имеем $\varphi(x, \xi) = \langle x, \xi \rangle - H(\xi)$ и $\Pi C_\varphi = \{x \mid x = \xi/|\xi|\}$ — единичная сфера.
- При $H(\xi) = \frac{\xi_1^2}{\xi_2}$ в качестве ΠC_φ получаем параболу

$$\Pi C_\varphi = \Big\{ x \mid x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_2},\ x_2 = -\Big(\frac{\xi_1}{\xi_2}\Big)^2 \Big\}.$$

- И наконец, при $H(\xi) = \dfrac{\xi_1^3}{\xi_2^2}$ получаем полукубическую параболу

$$\Pi C_\varphi = \Big\{ x \mid x_1 = 3\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2, \quad x_2 = -2\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^3 \Big\}.$$

В последних двух примерах $H(\xi)$ определена не для всех $\xi \neq 0$, а лишь в некотором конусе,

Заметим, что в последнем случае сингулярный носитель уже не гладкое вложенное многообразие, а кривая с особенностью!

Если размножить переменные (разбить на x и y), то осцилляторный интеграл даст распределение на произведении пространств $X \times Y$, которое можно рассматривать как ядро оператора из $C_0^\infty(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$.

Напомним, что по теореме Шварца о ядре существует взаимно однозначная связь между операторами $K : C_0^\infty(Y) \to \mathscr{D}'(X)$ и их ядрами $\mathscr{K} \in \mathscr{D}'(X \times Y)$.

Определение 5. Если $\mathscr{K} \in \mathscr{D}'(X \times Y)$ — осцилляторный интеграл, то соответствующий оператор K *называется интегральным оператором Фурье* (ИОФ).

Если при этом $X = Y$ и $\varphi(x, y, \xi) = \langle x - y, \xi \rangle$, то K называется *псевдодифференциальным оператором* (ПДО).

Теорема 3. *Пусть $\varphi(x, y, \theta)$ — фазовая функция, $a \in S^m(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$ и $K : C_0^\infty(Y) \to \mathscr{D}'(X)$ — оператор с ядром*

$$\mathscr{K}(x, y) = \int e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)\, d\theta.$$

1. *Если $(\varphi_{y_1}, \dots, \varphi_{y_l}, \varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_N}) \neq 0$ всюду (кроме $\theta = 0$), то K действует непрерывно из $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$.*
2. *Если $(\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n}, \varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_N}) \neq 0$ всюду (кроме $\theta = 0$), то K однозначно продолжается до непрерывного оператора из $\mathscr{E}'(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$.*

Доказательство. 1. Рассуждения, естественно, опираются на интегрирование по частям. По определению распределение Ku действует по правилу

$$\langle Ku, \psi \rangle = \langle \mathscr{K}, \psi \otimes u \rangle = \iiint e^{i\varphi(x,y,\theta)} L^k\big(a(x, y, \theta)\psi(x)u(y)\big)\, dx\, dy\, d\theta$$

с некоторым подходящим L. На этот раз $(\varphi_{y_1}, \dots, \varphi_{y_l}, \varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_N}) \neq 0$, и при построении L можно обойтись без дифференцирования по x:

$$L = \sum_{k=1}^{N} a_k(x, y, \theta)\partial_{\theta_k} + \sum_{j=1}^{l} b_j(x, y, \theta)\partial_{y_j} + c(x, y, \theta),$$

где $a_k \in S^0_{1,0}$, $b_j \in S^{-1}_{1,0}$, $c \in S^{-1}_{1,0}$. Значит, можно вынести $\psi(x)$ из под действия оператора L и поменять порядок интегрирования:

$$\langle Ku, \psi \rangle = \langle \mathscr{K}, \psi \otimes u \rangle = \int \left(\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} L^k\big(a(x, y, \theta)u(y)\big)\, dy\, d\theta \right) \psi(x)\, dx.$$

Таким образом, Ku — функция

$$Ku(x) = \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} L^k\big(a(x, y, \theta)u(y)\big)\, dy\, d\theta.$$

Произвольность k позволяет иметь любой порядок убывания $|L^k(au)|$ по θ и тем самым переходить к пределу и дифференцировать:

$$\partial_{x_j}(Ku)(x) = \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} \Big(i\varphi_{x_j} L^k(au) + \partial_{x_j} L^k(au) \Big)\, dy\, d\theta.$$

Итак, $Ku \in C^\infty(X)$.

Непрерывность оператора K доказывается непосредственно (хотя и требует некоторых выкладок): берем u_j, сходящуюся к 0 в $C_0^\infty(Y)$, и показываем, что $Ku_j(x) \to 0$ в $C^\infty(X)$.

2. Рассмотрим оператор ${}^tK$, транспонированный к K; он определяется равенством

$$\langle {}^tKv, u\rangle = \langle Ku, v\rangle, \quad u \in C_0^\infty(Y),\ v \in C_0^\infty(X).$$

Очевидно ядро ${}^tK$ — это то же самое ядро $\mathscr{K}(x,y)$, только x теперь рассматривается как «переменная интегрирования», а y — как «выходная переменная»:

$$\langle {}^tKv, u\rangle = \iiint e^{i\varphi(x,y,\theta)} L^k\big(a(x,y,\theta)v(x)u(y)\big)\, dx\, dy\, d\theta.$$

По первому утверждению теоремы ${}^tK : C_0^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ — непрерывный оператор. Теперь можно продолжить K на всё $\mathscr{E}'(Y)$ следующим образом: пусть $u \in \mathscr{E}'(Y)$ и $\psi \in C_0^\infty(X)$, тогда положим (оставив прежнюю букву для продолжения)

$$\langle Ku, \psi\rangle := \langle u, {}^tK\psi\rangle,$$

где правая часть осмыслена, так как ${}^tK\psi \in C^\infty(Y)$, и понимается как действие распределения u на гладкую функцию ${}^tK\psi$.

Непрерывность продолженного оператора K доказывается непосредственно: достаточно взять последовательность u_j, сходящуюся к 0 в $\mathscr{E}'(Y)$, и подставить в последнее тождество. Теорема доказана.

В случае фазовой функции $\varphi(x,y,\theta) = \langle x - y, \xi\rangle$ распределение

$$\mathscr{A}(x,y) = \int e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\theta)\, d\xi$$

задает некоторый ПДО A.

Теорема 4. ПДО *действует непрерывно из $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$ и имеет единственное непрерывное продолжение до оператора из $\mathscr{E}(Y)$ в $\mathscr{D}'(X)$.*

Доказательство. Выпишем $\varphi' = (\xi, -\xi, x - y)$. Отсюда видно, что выполнены условия обоих пунктов теоремы 3.

Пример 6 (сужение на гиперплоскость). Рассмотрим оператор взятия следа на гиперповерхности $x_n = 0$:

$$T : u(x) \mapsto u(x', 0).$$

его можно представить как ИОФ. Действительно,

$$(Tu)(x') = u(x', 0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle (x',0),\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(\langle x',\xi'\rangle - \langle y,\xi\rangle)} u(y)\, dy\, d\xi$$

(интеграл понимается как повторный). Тем самым наш оператор имеет ядро

$$\int e^{i\varphi(x',y,\xi)} \frac{d\xi}{(2\pi)^n},$$

где $\varphi(x', y, \xi) = \langle x', \xi'\rangle - \langle y, \xi\rangle$. Выпишем $\varphi' = (\xi', -\xi, (x' - y', -y_n))$. Заметим, что $\varphi'_{(y,\xi)} \neq 0$, и по первой части теоремы 3 $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, в то время как $\varphi'_{(x',\xi)} = 0$ при $\xi = (0, \xi_n) \neq 0$ и, значит, для распределений T вообще говоря не определен.

Оказывается, что T определен на некоторых классах распределений, но соответствующая конструкция опирается на понятие волнового фронта распределения.

Пример 7 (оператор частичного интегрирования). Рассмотрим теперь оператор

$$R : u(x) \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} u(x', x'')\, dx'', \quad u \in C_0^\infty.$$

Чтобы записать R как ИОФ, обратимся к преобразованию Фурье:

$$\mathscr{F}(Ru)(\xi') = \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{-i\langle y',\xi'\rangle} (Ru)(y')\, dy' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{-i\langle y',\xi'\rangle} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} u(y', y'')\, dy''\, dy' = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y',\xi'\rangle} u(y)\, dy.$$

С помощью него $Ru(x')$ можно записать так:

$$Ru(x') = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{Ru})(x') = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{i\langle x',\xi'\rangle} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y',\xi'\rangle} u(y)\, dy\, d\xi' =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x'-y',\xi'\rangle} u(y)\, dy\, d\xi'$$

(интеграл понимается как повторный). Тем самым наш оператор имеет ядро

$$\int e^{i\varphi(x',y,\xi')}\frac{d\xi'}{(2\pi)^k},$$

где $\varphi(x',y,\xi) = \langle x'-y',\xi'\rangle$. Выпишем $\varphi' = (\xi',(-\xi,0),x'-y')$ и заметим, что φ удовлетворяет условиям обеих частей теоремы 3. Таким образом, R действует из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ (что, впрочем, и так очевидно) и имеет непрерывное продолжение $R : \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^k)$ (что уже неочевидно).

Преобразование Радона и лучевое преобразование, встречающиеся в интегральной геометрии и томографии, имеют ту же природу, что и оператор R. Они тоже являются ИОФ.

Пример 8 (замена переменных). Пусть $f : X \to Y$ — диффеоморфизм областей в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим оператор замены переменных $f^*u(x) = u(f(x))$. Имеем

$$f^*u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle f(x),\xi\rangle}\hat{u}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i\langle f(x)-y,\xi\rangle}u(y)\,dy\,d\xi$$

(интеграл понимается как повторный). Следовательно, f^* — ИОФ с фазовой функцией $\varphi(x,y,\xi) = \langle f(x)-y,\xi\rangle$. Глядя на

$$\varphi' = \Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^t\xi, -\xi, f(x)-y\Big),$$

можно утверждать, что в силу невырожденности матрицы $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы и поэтому $f^* : C_0^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ действует непрерывно и имеет непрерывное продолжение $f^* : \mathscr{E}'(Y) \to \mathscr{D}'(X)$. Заметим, наконец, что $\Pi C_\varphi = \{(x,y) \mid f(x) = y\}$, т. е. особенность ядра содержится в графике f.

Тот факт, что $f^* : \mathscr{E}'(Y) \to \mathscr{D}'(X)$, означает, что корректно определена композиция распределения с диффеоморфизмом. При некоторых дополнительных условиях можно определить композицию распределения с произвольным гладким отображением $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $k \neq n$, (найдите эти условия, используя схему примера 8).

4. Метод стационарной фазы.

В теории ПДО и ИОФ приходится исследовать асимптотическое поведение интегралов вида

$$I(\lambda) = \int e^{i\lambda\varphi(x)} u(x)\, dx$$

при $\lambda \to 0$. Заметим, что $\varphi(x)$ здесь не является фазовой функцией в смысле определения 1 предыдущего пункта, а $I(\lambda)$ и осцилляторный интеграл $I_{\varphi,a}$, вообще говоря, не связаны.

В случае, когда $\varphi'(x) \neq 0$ всюду в области интегрирования, интегрируя по частям, можно показать, что $I(\lambda)$ быстро убывает.

Теорема 1. *Если вещественная функция $\varphi \in C^\infty(X)$ такова, что $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in X$, а $u \in C_0^\infty(X)$, то*

$$|I(\lambda)| \leqslant C\lambda^{-N}, \quad \lambda \geqslant 1,$$

для любого $N \in \mathbb{N}$, где C зависит от φ, u, N.

Доказательство. Утверждение, очевидно, доказывается при помощи интегрирования по частям. Пусть

$${}^tL = \frac{1}{i\lambda|\varphi'|^2} \sum_1^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Тогда ${}^tL(e^{i\lambda\varphi}) = e^{i\lambda\varphi}$ и

$$I(\lambda) = \int ({}^tL)^k (e^{i\lambda\varphi}) u(x)\, dx = \int e^{i\lambda\varphi} L^k(u(x))\, dx = O(\lambda^{-k}), \quad \lambda \to \infty.$$

Если же $\varphi'(x) = 0$ в некоторой точке $x \in X$, то асимптотическое разложение $I(\lambda)$ перестает быть тривиальным.

Определение 1. Точка $x \in X$, в которой $\varphi'(x) = 0$, называется *критической точкой* φ. Критическая точка x называется *невырожденной*, если $\det\bigl(\varphi''(x)\bigr) \neq 0$.

Важным примером функции $\varphi(x)$, имеющей одну невырожденную критическую точку, является квадратичная форма $\varphi(x) = \langle Qx, x\rangle/2$, где Q — вещественная симметричная невырожденная матрица. При рассмотрении ПДО нам будет вполне достаточно этого частного случая.

Теорема 2 (метод стационарной фазы в случае квадратичных форм). *Пусть* $\varphi(x) = \langle Qx, x\rangle/2$ *— квадратичная форма, а* $u \in C_0^\infty(X)$*. Тогда интеграл* $I(\lambda)$ *имеет асимптотику*

$$I(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda^{k+\frac{n}{2}}} \left(\frac{(2\pi)^{n/2} e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}}{k!\,|\det Q|^{1/2}}\right) \left(\frac{\langle Q^{-1}D, D\rangle}{2i}\right)^k u(0) + S_N,$$

где остаточный член оценивается так:

$$|S_N| \leqslant \frac{1}{\lambda^{N+\frac{n}{2}}} \frac{C_Q}{N!} \sum_{|\alpha|\leqslant n+1} \left\| D^\alpha \left(\frac{\langle Q^{-1}D, D\rangle}{2}\right)^N u \right\|_{L_1}.$$

Здесь $\operatorname{sgn} Q = r - (n - r)$*,* r *— число положительных собственных чисел* Q*, а константа* C_Q *зависит только от формы* Q*. В частности, разложение до первого члена выглядит так:*

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{(2\pi)^{n/2} e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}}{|\det Q|}\right) u(0) + O\!\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}+1}}\right), \quad \lambda \to \infty.$$

Остаточный член можно оценивать по-разному. Главное, что $I(\lambda)$ *убывает по* λ *как* $\lambda^{-n/2}$ *и имеет асимптотическое разложение, коэффициенты которого зависят от производных* $u(x)$ *в нуле, т. е. в критической точке.*

Доказательство.

Идея доказательства заключается в том, чтобы, используя тождество Парсеваля, перейти в интеграле $\int e^{i\lambda\langle Qx,x\rangle} u(x)\,dx$ *к образам Фурье, затем разложить преобразование Фурье* $\mathscr{F}(e^{i\lambda\langle Qx,x\rangle})$ *по формуле Тейлора и вернуться обратно.*

Тем самым доказательство начинается с нахождения преобразование Фурье от $e^{i\lambda\langle Qx,x\rangle}$*. В одномерной ситуации это уже сделано в примере 1.7.13:*

$$\mathscr{F}\left(e^{\pm i\frac{x^2}{2}}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{\pm\frac{i\pi}{4}}\, e^{\mp i\frac{\xi^2}{2}}.$$

Распространим результат на многомерный случай.

Как известно, квадратичную форму можно привести к главным осям, т. е. существует такая ортогональная матрица Φ ($\Phi\Phi^T = I$), что

$\Phi^T Q\Phi = \Lambda$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(q_1, \dots, q_n)$, а q_j — собственные числа Q. При этом $Q^{-1} = \Phi\Lambda^{-1}\Phi^T$. Перейдем к новой переменной y по формуле $x = \Phi y$. Тогда

$$\langle Qx, x\rangle = \langle Q\Phi y, \Phi y\rangle = \langle \Lambda y, y\rangle, \quad \det Q = q_1 q_2 \cdots q_n, \quad |\det\Phi| = 1.$$

Имеем

$$\int e^{-i\langle\xi,x\rangle} e^{i\lambda\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}}\,dx = \int e^{-i\langle\xi,\Phi y\rangle} e^{i\lambda\frac{\langle\Lambda y,y\rangle}{2}} |\det\Phi|\,dy =$$
$$= \left(\int e^{-i(\Phi^T\xi)_1 y_1} e^{i\lambda\frac{q_1 y_1^2}{2}}\,dy_1\right) \cdots \left(\int e^{-i(\Phi^T\xi)_n y_n} e^{i\lambda\frac{q_n y_n^2}{2}}\,dy_n\right).$$

В каждом интеграле сделаем соответствующую замену $z_j = y_j\sqrt{\lambda|q_j|}$ и воспользуемся результатом в одномерном случае:

$$\int e^{i(\Phi^T\xi)_j y_j} e^{i\lambda\frac{q_j y_j^2}{2}}\,dy_j = \int e^{i\frac{(\Phi^T\xi)_j}{\sqrt{\lambda|q_j|}} z_j}\, e^{i\frac{z_j^2}{2}\operatorname{sgn} q_j}\,\frac{dz_j}{\sqrt{\lambda|q_j|}} =$$
$$= (2\pi)^{1/2}\, e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} q_j}\, e^{-i\frac{(\Phi^T\xi)_j^2}{2\lambda|q_j|}\operatorname{sgn} q_j}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda|q_j|}}.$$

Собирая вместе, получаем

$$\mathscr{F}\left(e^{i\lambda\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}}\right) = (2\pi)^{n/2}\, e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}\, e^{-i\frac{\langle\Lambda^{-1}\Phi^T\xi,\Phi^T\xi\rangle}{2\lambda}}\,\frac{1}{\lambda^{n/2}|q_1\cdots q_n|^{1/2}} =$$
$$= (2\pi)^{n/2}\, e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}\, e^{-i\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2\lambda}}\,\frac{1}{\lambda^{n/2}|\det Q|^{1/2}}.$$

По тождеству Парсеваля (формула (15) теоремы 1.7.8)

$$\int e^{i\lambda\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}} u(x)\,dx = (2\pi)^{-n}\int \mathscr{F}(e^{i\lambda\frac{\langle Qx,x\rangle}{2}})\overline{\widehat{u}(\xi)}\,d\xi =$$
$$= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}}{(2\pi)^{n/2}\lambda^{n/2}|\det Q|^{1/2}}\int e^{-i\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2\lambda}}\overline{\widehat{u}(\xi)}\,d\xi.$$

Используя формулу Тейлора

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(it)^k}{k!} + s_N(t), \quad |s_N(t)| \leqslant \frac{|t|^N}{N!},$$

разложим экспоненту под интегралом:

$$e^{-i\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2\lambda}} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2i\lambda}\right)^k + s_N(\xi).$$

Наконец, заметим, что

$$\int \xi^\alpha \overline{\widehat{u}(\xi)}\,d\xi = (2\pi)^n D^\alpha u(0),$$

и, значит,

$$\int \langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle^k \overline{\widehat{u}(\xi)}\,d\xi = (2\pi)^n \langle Q^{-1}D,D\rangle^k u(0)$$

(сначала применяется оператор $\langle Q^{-1}D,D\rangle$, затем полагается $x = 0$). Собирая все вместе, получаем

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}}{(2\pi)^{n/2}\,\lambda^{n/2}\,|\det Q|^{1/2}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda^k\,k!} \int \left(\frac{\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}{2i}\right)^k \overline{\widehat{u}(\xi)}\,d\xi + S_N(\lambda) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda^{k+n/2}} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}}{(2\pi)^{n/2}\,|\det Q|^{1/2}} \frac{(2\pi)^n}{k!} \left(\frac{\langle Q^{-1}D,D\rangle}{2i}\right)^k u(0) + S_N(\lambda). \end{aligned}$$

Оценка для остаточного члена получается из оценки для остаточного члена в формуле Тейлора.

Собственно, в теории ПДО нас будет интересовать следующий частный случай. На него будет опираться формула для полного символа ПДО и формула для полного символа произведения двух ПДО.

Пример 1. Пусть размерность пространства равна $2n$, а переменные обозначаются через (x,y). Пусть

$$Q = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $|\det Q| = 1$ и $\operatorname{sgn} Q = n - n = 0$. Квадратичная форма и дифференциальный оператор принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle Q(x,y),(x,y)\rangle &= \frac{1}{2}\langle(-y,-x),(x,y)\rangle = -\langle x,y\rangle, \\ \frac{1}{2i}\langle Q^{-1}D,D\rangle &= \frac{1}{2i}\langle(-D_y,-D_x),(D_x,D_y)\rangle = \\ &= -\sum_{j=1}^n D_{x_j}\frac{D_{y_j}}{i} = \sum_{j=1}^n D_{x_j}\partial_{y_j}. \end{aligned}$$

Применение метода стационарной фазы дает

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint e^{-i\lambda\langle x,y\rangle} u(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda^k k!} \Bigl(\sum_{j=1}^{n} D_{x_j}\partial_{y_j}\Bigr)^k u(0,0) + S_N(\lambda) =$$
$$= \sum_{|\alpha|\leqslant N-1} \frac{1}{\lambda^{|\alpha|}\alpha!} D_x^\alpha \partial_y^\alpha u(0,0) + S_N(\lambda),$$

где S_N оценивается так:

$$|S_N(\lambda)| \leqslant \frac{C}{\lambda^N N!} \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant 2n+1} \Bigl\| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \Bigl(\sum \partial_{x_j}\partial_{y_j}\Bigr)^N u \Bigr\|_{L_1}.$$

Обозначения и сокращения

Мы придерживаемся следующих соглашений относительно обозначений. Не исключено, что одна и та же буква или символ могут обозначать разные объекты и встречаются ниже несколько раз, возможно, в разных качествах. Например, K обозначает компактное множество и произвольный оператор из C_0^∞ в $\mathscr{D}'$. В скобках указан пункт, в котором вводится обозначение.

Сокращения

ПДО — псевдодифференциальный оператор (2.1, 2.3)
ИОФ — интегральный оператор Фурье (2.3).

Числа и константы

C — константа.
$C_{a,b,c}$ — константа, зависящая от a, b, c.
$\operatorname{dist}(x,y)$ — расстояние от x до y в евклидовой метрике.
ε — маленькое число.
m — порядок символа или оператора (2.1)
n — размерность X.
ρ, δ — числа в определении пространства символом, обычно $\rho = 1$, $\delta = 0$.
x' — вектор из первых нескольких компонент x: $x = (x', x_n)$ или $x = (x', x'')$.

Производные

α, β — мультииндексы. Обычно α используется с x и имеет размерность n, такую же, как x, а β используется с θ и имеет размерность N, такую же, как фазовая переменная θ.
∂_{x_j} — частная производная по x_j. Если ясно, по какой переменной дифференцировать, просто пишем ∂_j.
$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ Если ясно, по какой переменной дифференцировать, просто пишем ∂^α.
$D_{x_j} = \dfrac{1}{i}\partial_{x_j}$. Аналогично понимаются D_j, D_x^α, D^α.

Множества

$B(x,r)$ — открытый шар с центром в x радиуса r.
$\overline{B}(x,r)$ — замкнутый шар с центром в x радиуса r.
cl — замыкание множества.

$C_\varphi = \{(x, \theta) \mid \varphi_\theta(x, \theta) = 0\}$ — критическое множество фазовой функции (п. 2.3).

$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ — диагональ X

K — компактное множество, как правило в Ω или X.

K_ε — ε-окрестность компакта. Будем считать, что она замкнута $K_\varepsilon = \mathrm{cl}(K + B(0, \varepsilon))$.

$\operatorname{supp} f$ — носитель функции f: $\operatorname{supp} f = \mathrm{cl}\{x \in \operatorname{dom} f \mid f(x) \neq 0\}$, (1.1).

$\operatorname{supp} u$ — носитель распределения (1.2).

$\operatorname{sing\,supp} u$ — сингулярный носитель распределения (1.2).

Ω, X, Y — области в $\mathbb{R}^n$ или многообразия.

Пространства

$\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}^n$ — пространство векторов $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j \in \mathbb{C}$.

$\dot{\mathbb{R}}^N = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ — область изменения переменной θ фазовой функции $\varphi(x, \theta)$ (2.3)

$C^k(\Omega)$ — векторное пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на области Ω. $C(\Omega) = C^0(\Omega)$.

$C^\infty(\Omega)$ — векторное пространство бесконечно дифференцируемых функций на области Ω.

$C_0^k(\Omega)$ — векторное пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в области Ω. $C_0(\Omega) = C_0^0(\Omega)$.

$C_0^\infty(\Omega)$ — векторное пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в области Ω.

$\mathscr{D} = C_0^\infty$.

$\mathscr{D}'(X)$ — векторное пространство распределений на области X (1.2).

$\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (1.2)

$\mathscr{E} = C^\infty$.

$\mathscr{E}'(X)$ — векторное пространство финитных распределений на области X (1.5).

$\mathscr{E}' = \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ (1.5).

L_p — векторное пространство функций интегрируемых со степенью p.

L_{loc} — векторное пространство локально интегрируемых функций.

$\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ — векторное пространство быстро убывающих функций (пространство Шварца) (1.7).

$\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ — векторное пространство медленно растущих распределений (1.7).

$S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ — векторное пространство символов типа (ρ, δ) порядка m. Иногда для краткости $S^m = S^m_{\rho,\delta} = S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ (2.2).

Функции

$\omega(x)$ — «шапочка» (1.1).

$\omega_\varepsilon(x)$ — усредняющее ядро: $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega(\frac{x}{\varepsilon})$ (1.1).

$u_\varepsilon(x)$ — усреднение функции или распределения: $u_\varepsilon = u * \omega_\varepsilon$ (1.6).

$u * \varphi$ — свертка распределения и функции (1.6).

φ, ψ — пробные функции (1.1).

$\varphi(x,\theta)$ — фазовая функция (2.3).

$\varphi'(x,\theta) = (\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n}, \varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_N})$ — вектор частных производных

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)$ — матрица Якоби

$\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)^t = \Big(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)$ — транспонированная матрица Якоби

$\varphi \otimes \psi$ — тензорное произведение: $(\varphi \otimes \psi)(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ (1.8).

$\chi_K(x)$ — характеристическая функция множества K.

$\chi(x)$, $\chi_j(x)$ — срезка: $\chi \in C_0^\infty$ и $\chi = 1$ в некоторой окрестности компакта (1.1).

$\overline{\chi}(x) = 1 - \chi(x)$ — обратная срезка.

$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ (1.7).

$\overline{\varphi}$ — комплексное сопряжение.

$\theta(x)$ — функция Хевисайда: $\theta(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

$a(x,\theta)$, $b(x,\theta)$ — символы (2.2).

$a(x,y,\theta)$, $b(x,y,\theta)$ — символы, зависящие от x и y. Иногда называются амплитудами (2.2).

$p(x,\xi)$ — символ (псевдо)дифференциального оператора $P(x,D)$ (2.1).

Распределения

$\langle u, \varphi\rangle = u(\varphi)$ — действие распределения на пробную функцию. Если u — регулярное распределение, т. е. представляется интегрируемой функцией, то $u(x)$ — соответствующая функция: $\langle u, \varphi\rangle = \int u(x)\varphi(x)\,dx$ (1.2).

δ_a — дельта-функция Дирака сосредоточенная в a: $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ (1.2).

$\delta = \delta_0$

$\delta(x)$ — формальная функция в записи $\delta(\varphi) = \int \delta(x)\varphi(x)\,dx$ (1.2).

$u * v$ — свертка двух распределений (1.6).

$I_{\varphi,a}(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\,d\theta$ — осцилляторный интеграл (в случае произвольного символа это обозначение формальное) (2.3).

$\mathscr{K}$ — распределение из $\mathscr{D}'(X \times Y)$, рассматриваемое как ядро оператора $K : C_0^\infty \to \mathscr{D}'$ (1.8).

Операторы

$(\mathscr{F}\varphi)(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$ — преобразование Фурье функции (1.7).

$\mathscr{F}u = \hat{u}$ — преобразование Фурье распределения (1.7).

$(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(x)$ — обратное преобразование Фурье функции (1.7).
$\mathscr{F}^{-1}u$ — обратное преобразование Фурье распределения (1.7).
$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$ — оператор Лапласа (1.7).
K — произвольный оператор из C_0^∞ в $\mathscr{D}'$ (1.8).
P, Q — дифференциальный оператор.
A, B — псевдодифференциальный оператор (2.3).
$P(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.
$P(x, D)$ — дифференциальный оператор с переменными коэффициентами.
Π — естественная проекция $X \times \dot{\mathbb{R}}^N$ на X: $\Pi : (x, \theta) \mapsto x$ (2.3).

Разное

ξ — независимая переменная преобразования Фурье; как правило имеет ту же размерность, что и x (1.7).
θ — фазовая переменная (в фазовой функции $\varphi(x, \theta)$); может иметь размерность отличную от размерности x (2.3).
$e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ — базисный вектор (единица на k-м месте).
$\langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$ (в преобразовании Фурье) (1.7).
$\int = \int_{\mathbb{R}^n}$.
$\operatorname{sgn} x$ — знак числа x.
$\operatorname{sgn} Q = r - (n - r)$ — разность числа положительных собственных чисел и числа отрицательных собственных чисел симметричной матрицы Q (2.4).

Литература

[В] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

Здесь можно найти введение в теорию распределений. Изложение сопровождается большим количеством примеров, помогающих прочувствовать предмет.

[РР] *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

Из аннотации: «Книга представляет собой элементарное введение в современную теорию топологических векторных пространств. Хотя ее объем невелик, она содержит достаточно полное изложение наиболее важных понятий и результатов этой теории, соединяющее высокий научный уровень с максимально возможной доступностью...»

[Те] *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.

Книга содержит краткое введение в теорию ПДО и ИОФ. Поэтому вряд ли стоит использовать ее как учебник для первоначального знакомства с предметом. Бóльшая часть книги посвящена приложениям теории, в частности, распространению особенностей гиперболических уравнений.

[Тр] *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. М.: Мир, 1984. Т. I (Псевдодифференциальные операторы).

Здесь можно найти подробное введение в теорию псевдодифференциальных операторов, расчитанное на тех, кто впервые знакомится с предметом.

[Х] *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.

Классическая монография по теории дифференциальных операторов. Наше изложение теории распределений опирается на первую главу.

[Х1] *Хёрмандер Л.* Анализ дифференциальных операторов в частных производных. М.: Мир, 1986. Т. I (Теория распределений).

[Х3] *Хёрмандер Л.* Анализ дифференциальных операторов в частных производных. М.: Мир, 1987. Т. III (Псевдодифференциальные операторы).

Две предыдущие книги — часть фундаментального четырехтомника. Это своеобразная библия. Однако, чтение отдельных глав требует подготовки.

[GS] *Grigis A., Sjöstrand J.* Microlocal Analysis for Differential Operators. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

Краткое, но в то же время, всеохватывающее введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Есть упражнения. Иногда для понимания требуется обращение к более полному источнику, особенно в вопросах касающихся теории Гамильтона — Якоби и глобальной теории интегральных операторов Фурье. Наше изложение в целом опирается именно на эту книгу.

Содержание

Дятлов Глеб Владимирович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Часть I

Подписано в печать ??.??.07. Формат $60 \times 84\,{}^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. ??. Уч.-изд. л. ??. Тираж ?0 экз. Заказ №   .

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2